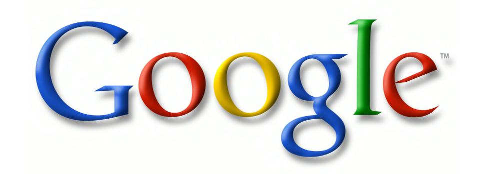


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

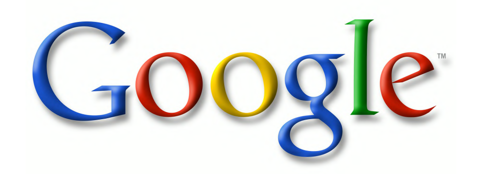
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.




1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



QA
551
.S798a

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXX,1

ANALYTISCHE GEOMETRIE
DES PUNKTEPAARES, DES KEGELSCHNITTES UND DER FLÄCHE ZWEITER ORDNUNG

VON

DR. OTTO STAUDE
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK

ERSTER TEILBAND

MIT 181 FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

Math.
6878
Math.
6-21-1922
2 v.

COPYRIGHT 1910 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Vorwort.

Den Hauptinhalt des vorliegenden Buches bildet die *Theorie der Fläche zweiter Ordnung.* Jedoch ist einleitungsweise die Theorie des *Punktepaares (Strahlenpaares)* und des *Kegelschnittes* beigefügt, um ebenso wie in dem vorausgegangenen Werke: „Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene“ eine einheitliche und vergleichende Darstellung der entsprechenden Gebilde in einer, in zwei und in drei Dimensionen zu erreichen.

Verschiedene Gründe machten diese Ergänzung der Theorie der Fläche zweiter Ordnung unabweisbar. Einmal hat historisch die Theorie der Fläche zweiter Ordnung ihre Fragestellungen aus der Theorie der Kegelschnitte geschöpft, wie beispielsweise die bekannte Brennpunktseigenschaft der Ellipse und Hyperbel fast durch das ganze neunzehnte Jahrhundert immer wieder zu neuen Versuchen Anstoß gegeben hat, entsprechende Eigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide zu entdecken. Sodann aber bildet die Theorie des Kegelschnittes, wie schon dieser sein Name besagt, einen so unerläßlichen Bestandteil der Theorie der Flächen zweiter Ordnung, daß sie in dem Abschnitt über die ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung doch eingeschaltet werden müßte. Weiter aber bietet es für die systematische Darstellung und das tiefere Verständnis der dreidimensionalen Gebilde einen ganz wesentlichen Vorteil, wenn die gleichen Fragestellungen und Methoden für ein- und zweidimensionale Gebilde unmittelbar daneben gestellt werden. Endlich ist auch in den Rezensionen des oben genannten früheren Buches (vgl. *H. Wieleitner*, Unterrichtsblätter für Math. u. Naturw., Jahrg. XII, Heft 4. *G. Holzmüller*, Zeitschr. für lateinlose höh. Schulen, Jahrg. XVIII, Heft 3/4) der Wunsch nach einer solchen vergleichenden Darstellung laut geworden.

So schließt sich denn das vorliegende Buch auch in dem äußeren Aufbau vollkommen an das vorangegangene an. Es setzt, systematisch und pädagogisch betrachtet, die dort entwickelte Theorie der

403029

linearen Gebilde und der Koordinatenmethoden in eine, zwei und drei Dimensionen voraus, kann aber für jeden Leser, dem diese Gebiete bereits geläufig sind, als selbständige Monographie der Fläche zweiter Ordnung einschließlich des Kegelschnittes und Punktepaares dienen.

Dem Charakter der Monographie entsprechend ist die Fläche zweiter Ordnung zunächst nur als Einzelgebilde nach ihren eigenen gestaltlichen Verhältnissen und ihrer Beziehung zu Punkt, gerader Linie und Ebene behandelt, während die Theorie der Systeme von Flächen zweiter Ordnung und der Durchdringungskurven zweier Flächen zweiter Ordnung einer weiteren in sich abgerundeten Monographie vorbehalten bleibt.

Wenn innerhalb dieser Begrenzung möglichste Vollständigkeit angestrebt ist, so war doch anderseits eine gewisse Beschränkung auf die hauptsächlichen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung geboten. Konnten dabei manche interessante Einzelheiten nicht Erwähnung finden, so sind dafür die leitenden Untersuchungen tunlichst lückenlos durchgeführt. So wird beispielsweise die Klassifikation der Flächen zweiter Ordnung und ihrer ebenen Schnitte nicht nur in elementarer Behandlung mit Cartesischen Koordinaten bis zur vollständigen Herstellung aller kanonischen Gleichungen (s. § 26, (2); § 99, (2); § 114, (3)), sondern auch mit Dreiecks- und Tetraederkoordinaten in ihren verschiedenen Erscheinungsformen entwickelt (s. §§ 49; 50; 51; 152; 153; 155; 156). Das Buch will in diesem Sinne gegenüber der sich freier bewegenden akademischen Vorlesung als Handbuch gelten, welches für grundlegende Entwicklungen gerade da eintritt, wo die Vorlesung aus Mangel an Zeit und Raum Verzicht leisten muß. Es lag daher auch nicht in dem Plan des Buches, bloße Beispiele und Übungsaufgaben aufzunehmen, sondern vielmehr für akademische Übungen das wesentliche Material an Lehrsätzen, Formeln und Tabellen zu liefern.

Um den Gebrauch des Handbuches nicht nur zum vergleichenden systematischen Studium, sondern auch zum Nachschlagen einzelner Gegenstände zu erleichtern, ist eine aus dem Inhaltsverzeichnis ersichtliche Einteilung des Stoffes in einzelne Paragraphen getroffen und innerhalb jedes Paragraphen wieder der Inhalt jedes einzelnen Artikels in einer besonderen Überschrift nach Stichworten bezeichnet. Ferner sind zahlreiche Figuren zur schnellen Orientierung über die angewandten Bezeichnungen und die abgeleiteten Sätze beigegeben. Endlich ist am Schluß ein nach Haupt- und Nebenstichworten gegliedertes Sachverzeichnis angefügt, das zugleich die Hinweise auf die

Vergleichspunkte der drei Mannigfaltigkeiten Punktreihe, Ebene und Raum enthält.

Wie die Gestalt der Kegelschnitte (I. Teil, I. Abschnitt) dem Studierenden in der Regel längst bekannt ist, bevor er an die Behandlung der allgemeinen Gleichung der Kurve zweiter Ordnung mittels der Determinanten herantritt, so ist auch die Theorie der Flächen zweiter Ordnung (II. Teil, I. Abschnitt) induktiv mit der Beschreibung der Gestalt und Bestandteile der Flächen selbst sowie ihrer Draht-, Karton- und Fadenmodelle begonnen und hiermit geradezu eine elementare Theorie dieser Flächen ausgebildet, unter alleiniger Benutzung der gemeinen rechtwinkligen, und gelegentlich der homogenen gemeinen Koordinaten. In gleichem Sinne ist eine elementare Beschreibung des linearen Komplexes angefügt. Derjenige Leser, der etwa für technische oder physikalische Anwendungen nur die gestaltlichen Verhältnisse und Eigenschaften dieser Gebilde kennen lernen will, kann diese ohne besondere Vorkenntnisse aus den bezeichneten Abschnitten entnehmen.

Erst für die II. Abschnitte des I. und II. Teils liegt die allgemeine Gleichung der Kurven und Flächen zweiter Ordnung sowie in dualer Darstellung der Kurven und Flächen zweiter Klasse zugrunde. Im Mittelpunkt dieser Abschnitte steht die Polarentheorie und die für sie maßgebende Unterscheidung der Kurven und Flächen nach dem Rang. Den Schluß bildet die Polarentheorie des linearen Komplexes.

Die nächsten Abschnitte beider Teile enthalten die Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung und Klasse, sowie der ebenen Schnitte der Flächen.

Daran schließt sich die Theorie der konfokalen Systeme und der verschiedenen Fokaleigenschaften. Die ersteren haben insofern ihre Stelle schon bei dem Kegelschnitt und der Fläche zweiter Ordnung als Einzelgebilde gefunden, weil sie einerseits zugleich die Lösung des Hauptachsenproblems der Berührungskegel vermitteln und andererseits für die Entwicklung der Fokaleigenschaften unerläßlich sind.

Die Schlußabschnitte behandeln die Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung in Dreiecks- und Tetraederkoordinaten. Die Theorie der Quadratdarstellung der quadratischen Formen von zwei, drei und vier Veränderlichen und der orthogonalen Transformation ist hier unter tunlichster Verknüpfung der algebraischen Operationen mit den parallel laufenden geometrischen Vorstellungen dargestellt. Die orthogonale Transformation greift bereits in die Theorie der Büschel von

Kurven oder Flächen zweiter Ordnung über, hat aber wegen ihrer Wichtigkeit für das einzelne Gebilde bereits hier ihre Stelle gefunden.

Die Anmerkungen enthalten neben Hinweisen auf zusammengehörige Stellen des Buches eine Reihe literarischer Angaben. Diese sollen dazu dienen, dem Studierenden, der sich mit dem sachlichen Inhalt des Buches bekannt macht, gleichzeitig auf die Errungenschaften der historischen Forschung auf dem Gebiete der Mathematik aufmerksam zu machen. Deshalb ist überall auf die vorliegenden geschichtlichen Werke Bezug genommen. Daneben sind aber auch weitere Quellen angegeben, um dem Leser die Entstehung der hauptsächlichsten Lehrsätze nachzuweisen.

Für die literarischen Angaben bin ich Herrn Professor Dr. *Felix Müller* in Loschwitz und Herrn Geheimrat Professor Dr. *Stäckel* in Karlsruhe zu ganz besonderem Danke verpflichtet, die mich dabei in bereitwilligster Weise unterstützt haben.

Ich habe ferner den Herren Dr. *W. Bath* in Stettin, Dr. *F. Budzier* in Doberan und *W. Düker* in Rostock für ihre Beihilfe bei den Korrekturen zu danken.

Zuletzt spreche ich auch der Verlagsbuchhandlung von *B. G. Teubner* meinen besten Dank aus für ihr stets freundliches Entgegenkommen beim Druck und der Ausstattung des Buches.

Rostock, den 26. November 1909.

Otto Staude.

Inhalt des I. Bandes.

Seite

I. Teil: Die Gebilde zweiter Ordnung in der Ebene.

I. Abschnitt: Besondere Gleichungen der Kegelschnitte und ihre Bedeutung.

II. Abschnitt: Beziehungen von Punkten und Geraden zur Kurve zweiter Ordnung oder Klasse.

I. Kapitel: Punktepaare und Strahlenpaare.

II. Kapitel: Die Kurve zweiter Ordnung.

III. Kapitel: Die Kurve zweiter Klasse.

IV. Kapitel: Unterscheidung der Kurven und ihrer Polarsysteme nach dem Rang.

Seite

III. Abschnitt: **Einteilung der Kurven zweiter Ordnung und Klasse.**

I. Kapitel: **Die Arten der Kurven zweiter Ordnung.**

II. Kapitel: **Die Arten der Kurven zweiter Klasse.**

IV. Abschnitt: **Konfokale Kegelschnitte.**

V. Abschnitt: **Bestimmung der Kegelschnitte durch fünf Punkte.**

VI. Abschnitt: **Kegelschnitte in Dreieckskoordinaten.**

I. Kapitel: **Punktepaare in Zweieckskoordinaten.**

II. Kapitel: **Allgemeine Koordinatendreiecke.**

III Kapitel: **Polardreiecke und Berührungsdreiecke.**

II. Teil: Die Gebilde zweiter Ordnung im Raume.

I. Abschnitt: Gestalt und Bestandteile der Flächen zweiter Ordnung.

I. Kapitel: Scheitel- und Brennpunkte, Hauptschnitte und Brennlinien, Draht- und Gipsmodelle.

II. Kapitel: Die Kreisschnitte und die Kartonmodelle.

III. Kapitel: Die geraden Erzeugenden und die Fadenmodelle.

II. Abschnitt: Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen zur Fläche zweiter Ordnung oder Klasse.

I. Kapitel: Die Fläche zweiter Ordnung.

Seite

II. Kapitel: **Die Fläche zweiter Klasse.**

III. Kapitel: **Unterscheidung der Flächen und ihrer Polarsysteme nach dem Rang.**

IV. Kapitel: **Das Strahlengewinde oder der lineare Komplex.**

III. Abschnitt: **Einteilung der Flächen zweiter Ordnung und Klasse.**

I. Kapitel: **Das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung.**

II. Kapitel: **Zurückführung der allgemeinen Gleichung auf kanonische Formen.**

I. Teil.

Die Gebilde zweiter Ordnung in der Ebene.

I. Abschnitt.

Besondere Gleichungen der Kegelschnitte und ihre Bedeutung.

§ 1. Hauptachsengleichung und Gestalt der Ellipse und Hyperbel.

1. Definition der Ellipse und Hyperbel. *Der Ort eines laufenden Punktes P, dessen Abstände von zwei festen Punkten F und F' eine unveränderliche Summe oder Differenz $2a$ haben, ist bezüglich eine Ellipse oder Hyperbel.*[1])

Die beiden festen Punkte F und F' heißen die *Brennpunkte*[2]); ihr gegenseitiger Abstand $2e$ die *Brennweite;* der Wert $2a$ der unveränderlichen Summe oder Differenz die *Hauptachsenlänge.*

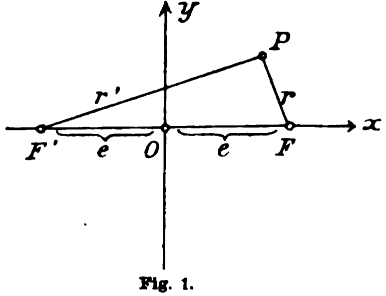


Fig. 1.

2. Analytische Form der Definition. Wir nehmen die Verbindungslinie der beiden Brennpunkte F und F' als x-Achse und ihren Mittelpunkt O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems Oxy (Fig. 1).

Die Koordinaten der beiden Brennpunkte F und F' sind dann:

$$(1) \qquad x = e,\ y = 0; \quad x = -e,\ y = 0 \qquad (e > 0).$$

Sind nun r und r' die absoluten Entfernungen eines laufenden Punktes $P = x, y$ von F und F', also (I § 12, (8)*)):

$$(2) \qquad r = FP = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}, \quad r' = F'P = \sqrt{(x+e)^2 + y^2},$$

so ist *die Bedingung der Ellipse und Hyperbel* bezüglich[3]):

$$(3) \qquad r + r' = 2a \quad \text{und} \quad r - r' = 2a \quad \text{oder} \quad r' - r = 2a$$

*) Die Verweise I § . . . beziehen sich auf des Verfassers Buch: Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, Leipzig, Teubner, 1905.

oder *zusammengefaßt* und mit Hinzufügung des nicht verschwindenden und daher belanglosen Faktors $r + r' + 2a$:

(4) $$R = (r + r' + 2a)(r + r' - 2a)(r - r' + 2a)(r - r' - 2a) = 0.$$

3. Gleichung der Ellipse oder Hyperbel. Nach (2) ist:

(5) $$r^2 + r'^2 = 2(x^2 + y^2 + e^2), \quad r^2 - r'^2 = -4ex,$$

so daß:

$$R = \{(r + r')^2 - 4a^2\}\{(r - r')^2 - 4a^2\} = (r^2 - r'^2)^2 - 8a^2(r^2 + r'^2) + 16a^4,$$

$$\tfrac{1}{16}R = e^2x^2 - a^2(x^2 + y^2 + e^2) + a^4 = -(a^2 - e^2)x^2 - a^2y^2 + a^2(a^2 - e^2).$$

Daher *besteht für jeden Punkt x, y der Ebene identisch die Gleichung*[4]:

(6) $$-a^2(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\}$$
$$= \left(a + \frac{r + r'}{2}\right)\left(a - \frac{r + r'}{2}\right)\left(a + \frac{r - r'}{2}\right)\left(a - \frac{r - r'}{2}\right).$$

Die Gleichung der Ellipse oder Hyperbel ist damit nach (4):

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0.$$

4. Unterscheidung der Ellipse und Hyperbel. Da in dem Dreieck $FF'P$ (Fig. 1) die Summe zweier Seiten größer als die dritte und der absolute Wert der Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte ist, so folgt:

(8) $$r + r' > 2e > |r - r'|.$$

Ist daher die Hauptachsenlänge $2a$ größer als die Brennweite $2e$, so kann nur $r + r' = 2a$ sein; ist aber jene kleiner als diese, so kann nur $|r - r'| = 2a$ sein.

Die Gleichung (7) ist mit Rücksicht auf (6):

(9) *für* $a > e$ *mit* $r + r' = 2a$,

(10) *für* $e > a$ *mit* $r - r' = \pm 2a$

gleichbedeutend. Sie stellt im ersten Falle eine Ellipse, im zweiten Falle eine Hyperbel dar.

5. Mittelpunkt, Hauptachsen und Scheitelpunkte. Da die Gleichung (7) nur die Quadrate von x und y enthält, ist die Ellipse oder Hyperbel gegen jede der beiden Koordinatenachsen symmetrisch (geht durch Spiegelung an jeder in sich über). Diese heißen daher die Symmetrie- oder *Hauptachsen*[5] der Kurve, die Gleichung (7) die *Hauptachsengleichung.*

Der Koordinatenanfangspunkt ist der *Mittelpunkt*[6] der Kurve.

Die Schnittpunkte A, A' der Kurve mit der x-Achse (der *ersten* Hauptachse):

(11) $$x = \pm a, \quad y = 0$$

sind die *(ersten) Scheitelpunkte*[7]) *der Ellipse oder Hyperbel.*

Sie liegen nach (9) und (10) *bei der Ellipse außerhalb, bei der Hyperbel innerhalb der beiden Brennpunkte* (Fig. 2; 3).

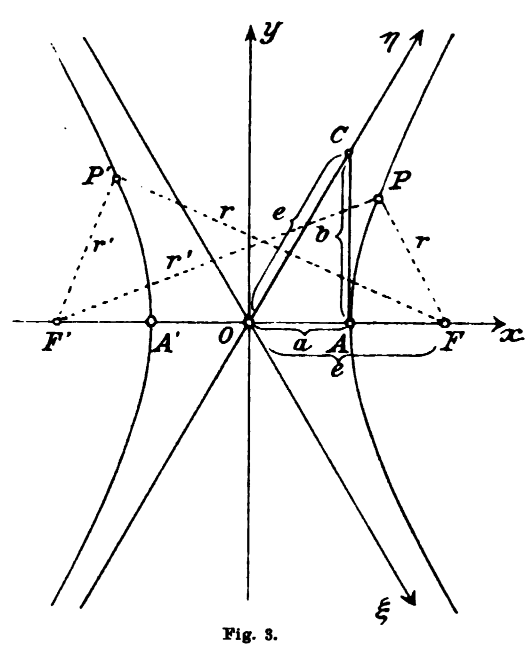


Fig. 3.

6. Die Halbachsenquadrate. Die Koeffizienten a^2 und $a^2 - e^2$ in (7) heißen die beiden *Halbachsenquadrate.* Bei der Ellipse sind sie beide positiv, bei der

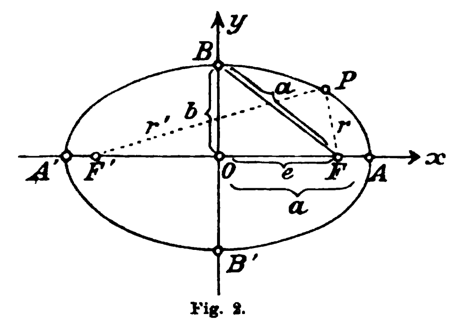


Fig. 2.

Hyperbel ist das zweite negativ. Man setzt daher bezüglich:

(12) $$a^2 - e^2 = b^2;$$ (12′) $$a^2 - e^2 = -b^2,$$

so daß *die Hauptachsengleichungen*[8]) *der Ellipse und Hyperbel* werden:

(13) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$ (13′) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Schnittpunkte B, B' der Kurve mit der *zweiten* Hauptachse sind bei der Ellipse reell, bei der Hyperbel imaginär:

(14) $$x = 0, \quad y = \pm b; \quad x = 0, \quad y = \pm bi.$$

Die Größen $2a$ und $2b$ heißen bei der *Ellipse* auch die *große* und *kleine Achse* (Achsenlänge); die Größen $2a$ und $2bi$ bei der *Hyperbel* die *reelle* und *imaginäre Achse.*

Bei der Ellipse sind nach (12):

(15) $$a = FB, \quad b = OB, \quad e = OF \quad \text{(Fig. 2)}$$

die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks OFB mit dem rechten Winkel in O, bei der Hyperbel nach (12′):

(15′) $$a = OA, \quad b = AC, \quad e = OC \quad \text{(Fig. 3)}$$
die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks OAC mit dem rechten Winkel in A. Danach *kann jedesmal b bei gegebenen a, e oder e bei gegebenen a, b konstruiert werden.*

7. Unendlich ferne Punkte und Asymptoten. In homogenen Koordinaten (I § 22, 1) werden die Gleichungen (13) und (13′):

(16) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = t^2; \qquad (16') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = t^2.$$

Die Ellipse schneidet daher die unendlich ferne Gerade in dem imaginären, die Hyperbel in dem reellen Punktepaar[9]*:*

(17) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \; t = 0; \qquad (17') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \; t = 0.$$

Das imaginäre oder reelle Strahlenpaar:

(18) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0; \qquad (18') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

welches den Mittelpunkt mit den unendlich fernen Punkten der Kurve verbindet, nennt man die *Asymptoten.*[10])

Die reellen Asymptoten ξ und η der Hyperbel haben die Gleichungen:

(19) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0; \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

und daher (I § 17, (5)) *die Richtungskosinus:*

(20) $$\alpha_1 = \frac{a}{e}, \quad \beta_1 = -\frac{b}{e}; \quad \alpha_2 = \frac{a}{e}, \quad \beta_2 = \frac{b}{e},$$

wenn wir sie so richten (Fig. 3), daß sie mit der x-Achse spitze Winkel bilden.

Die Asymptote η geht durch den in (15′) eingeführten Punkt $C: x = a,\; y = b$, wonach sie bei gegebenen a, e oder a, b konstruiert wird.

8. Gestalt der Ellipse und Hyperbel. Bei der Ellipse ist nach (13) der absolute Wert von x stets $\leqq a$, der von y stets $\leqq b$.

Die Ellipse ist eine geschlossene, in das Rechteck der vier Geraden $x = \pm a$ und $y = \pm b$ eingeschlossene Kurve. Alle Punkte entsprechen der Bedingung $r + r' = 2a$ in (9); für die Punkte B, B' ist $r = r' = a$ (vgl. (15)).

Bei der Hyperbel ist nach (13′) der absolute Wert von x stets $\geqq a$. Der zwischen den Geraden $x = -a$ und $x = +a$ liegende Streifen der Ebene trennt daher die *Hyperbel* in *zwei Zweige*, einen *rechten* und einen *linken*. Alle Punkte P des rechten entsprechen der Bedingung $r' - r = 2a$ in (10), alle Punkte P' des linken $r - r' = 2a$

(Fig. 3). Die Kurve nähert sich, je weiter von O entfernt, um so mehr den Asymptoten.

9. Fadenkonstruktion. Befestigt man (Fig. 2) einen Faden FPF' von der Länge $2a$ mit seinen Endpunkten in den Brennpunkten F und F', so beschreibt ein den Faden beständig spannender Stift P die *Ellipse* (den oberen oder unteren Bogen ABA' oder $AB'A'$).

Ein Lineal von der Länge l sei mit dem einen Ende in F' drehbar befestigt (Fig. 4); im andern Ende G sei ein Faden von der Länge

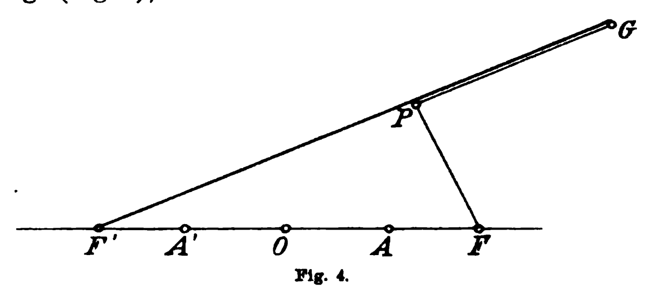


Fig. 4.

$l - 2a$ befestigt. Das andere Ende des Fadens sei in F befestigt, während ein Stift P den Faden spannt und an das um F' sich drehende Lineal andrückt. Da beständig:

$$F'P - FP = (F'G - PG) - FP = F'G - (FP + PG) = l - (l - 2a) = 2a,$$

so beschreibt der Stift P ein Stück des rechten Hyperbelzweiges.[11])

10. Besondere Ellipsen und Hyperbeln. Die Ellipse (13) geht mit $a = b$ in den Kreis:

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{21}$$

über. Mit $a^2 = 2b^2$ ($e^2 = b^2$) wird das rechtwinklige Dreieck OFB (Fig. 2) gleichschenklig.

Die Hyperbel (13') erhält mit $a = b$ die Gleichung:

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{22}$$

und hat dann rechtwinklige Asymptoten, indem das rechtwinklige Dreieck OAC (Fig. 3) gleichschenklig wird. Sie heißt *gleichseitige Hyperbel*[12]).

11. Konjugierte Hyperbeln. Die beiden Hyperbeln (Fig. 5):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{23}$$

heißen *zwei konjugierte Hyperbeln*[13]). Sie haben dieselben Asymptoten. Die erste hat die reelle und imaginäre Achse $2a$ (AA') und $2bi$ in der Richtung der x- und y-Achse, die zweite die reelle und imaginäre

Achse $2b$ (BB') und $2ai$ in der Richtung der y- und x-Achse. Beide haben dieselbe Brennweite $FF' = GG' = 2e$.

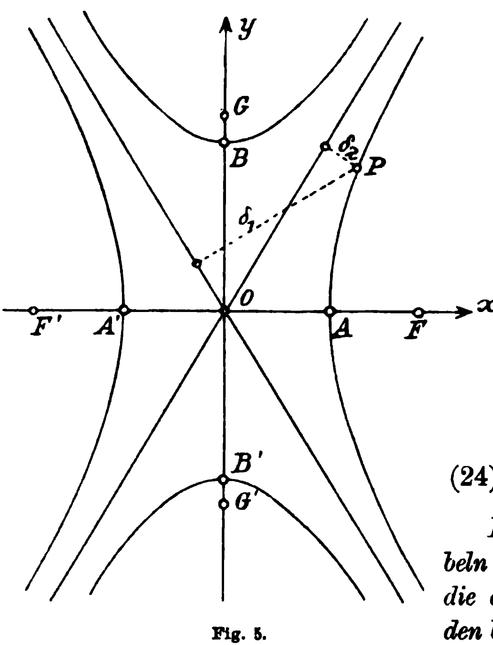


Fig. 5.

Die senkrechten Abstände δ_1 und δ_2 eines Punktes $P = x, y$ (Fig. 5) von den beiden Asymptoten (19) sind (I § 17, (7)):

$$\delta_1 = \pm \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},$$

$$\delta_2 = \pm \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}},$$

und daher ihr Produkt:

$$(24) \quad \delta_1 \delta_2 = \pm \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Die beiden konjugierten Hyperbeln bilden den Ort der Punkte, für die das Produkt der Abstände von den beiden Asymptoten konstant ist.

§ 2. Hauptachsengleichung und Gestalt der Parabel.

1. Begriff der Parabel. *Der Ort eines laufenden Punktes P, der von einem festen Punkte F und von einer festen Geraden d gleichweit entfernt ist, heißt eine Parabel*[1]).

Der feste Punkt F heißt der *Brennpunkt*[2]), die feste Gerade d die *Direktrix*[14]) der Parabel.

2. Analytische Form der Definition. Wir nehmen den *Brennpunkt F als Koordinatenanfangspunkt O* eines rechtwinkligen Systems Oxy und nehmen die *y-Achse der Direktrix d parallel.* Ihre Gleichung ist dann:

$$(1) \qquad x = p,$$

wo

$$(2) \qquad p = OD$$

die relative Entfernung des Fußpunktes D der Direktrix auf der x-Achse vom Anfangspunkt O bedeutet und der (relative) *Parameter*[15]) der Parabel heißt.

Je nachdem p *positiv oder negativ* ist, liegt die *Direktrix rechts* (Fig. 6) *oder links* (Fig. 7) von der y-Achse.

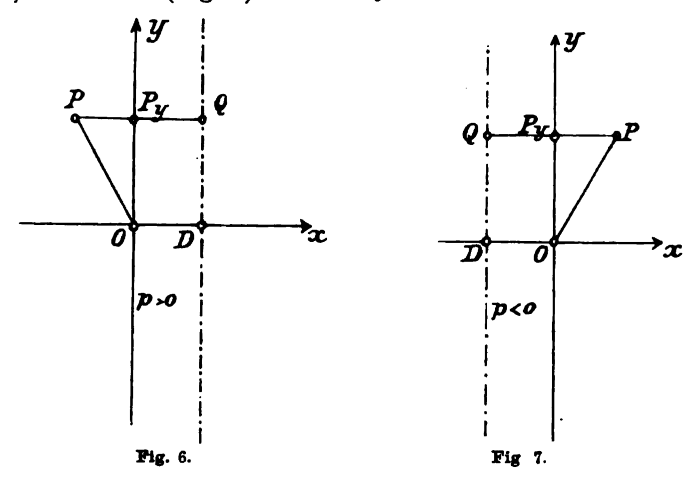


Fig. 6. Fig 7.

Unter *dem (relativen) Abstand eines Punktes* $P = x, y$ *von der Direktrix* verstehen wir die im Sinne der x-Achse relative Länge:

(3) $$d = QP,$$

wo Q den Fußpunkt des von P auf die Direktrix gefällten Perpendikels bezeichnet. Ist P_y der Fußpunkt desselben Perpendikels auf der y-Achse, so ist (I § 1, (3)):

$$QP = QP_y + P_yP = P_yP - OD,$$

also (I § 10, (2)):

(4) $$d = x - p.$$

Dieser Abstand ist negativ oder positiv, je nachdem P links oder rechts von der Direktrix liegt.

Die absolute Entfernung des Punktes P von $O = F$ ist:

(5) $$r = \overline{OP} = \overline{FP} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Die Eigenschaft der Parabel wird daher[16]), *je nachdem d negativ oder positiv ist:*

(6) $$r + d = 0 \quad \text{oder} \quad r - d = 0$$

oder, beides zusammengefaßt:

(7) $$(r + d)(r - d) = r^2 - d^2 = 0.$$

3. Die Brennpunktsgleichung der Parabel. Nach (4) und (5) ist *identisch für alle Punkte der Ebene*[4]):

(8) $$(r + d)(r - d) = (r + x - p)(r - x + p) = x^2 + y^2 - (x - p)^2 \\ = y^2 + 2px - p^2.$$

Die Gleichung der Parabel, deren Brennpunkt der Anfangspunkt O ist und deren Direktrix die Gleichung (1) hat, lautet demnach:

$$y^2 + 2px - p^2 = 0. \tag{9}$$

4. Linke und rechte Parabel. In der Form:

$$y^2 + p^2 + 2p(x - p) = 0$$

geschrieben, zeigt die Gleichung (9), daß für alle Punkte der Parabel:

$$p(x - p) = pd < 0,$$

also d negativ oder positiv sein muß, je nachdem p positiv oder negativ gegeben ist.

Die Parabel (9) liegt ganz links oder ganz rechts von der Direktrix, je nachdem der relative Parameter p positiv oder negativ ist, und hat bezüglich die erste oder zweite Eigenschaft (6).

Wir nennen sie entsprechend eine *linke* (Fig. 8) oder *rechte* (Fig. 9) Parabel.

Beide sind nicht ihrer Gestalt, sondern nur ihrer Lage nach verschieden. Sie gehen, da in (9) eine Änderung des Vorzeichens von p

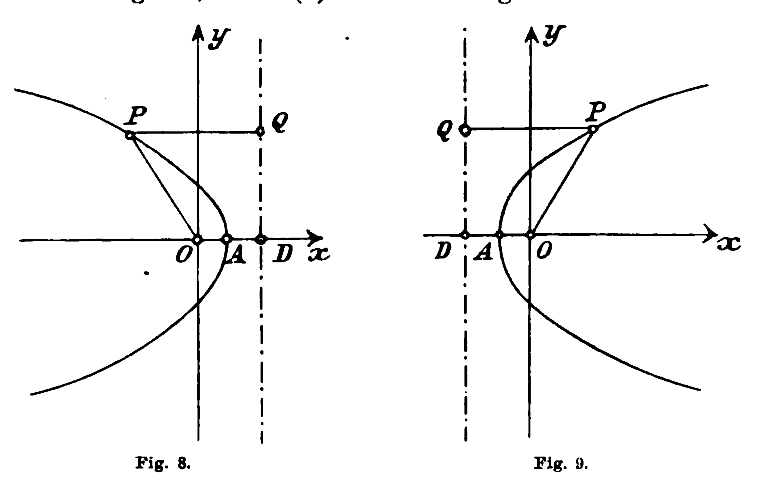


Fig. 8. Fig. 9.

einer solchen von x gleichkommt, durch Spiegelung an der y-Achse ineinander über.

In jedem Falle liegt die Parabel in ihrer ganzen Ausdehnung auf derselben Seite der Direktrix wie der Brennpunkt.

5. Hauptachse und Scheitel. Nach (9) ist die Parabel symmetrisch gegen die x-Achse, die daher ihre *Symmetrie-* oder *Hauptachse*[5]) heißt.

Der Schnittpunkt A der Parabel mit der Hauptachse:

$$x = \frac{p}{2}, \quad y = 0 \tag{10}$$

heißt der *Scheitelpunkt der Parabel*[7]). Er liegt nach (1) und (10) in der Mitte zwischen Brennpunkt O und Fußpunkt D der Direktrix.

6. Scheitelgleichung der Parabel. Nimmt man den Scheitelpunkt A in (10) als Anfangspunkt O' eines parallelen Koordinatensystems $O'x'y'$, so daß (I § 14, (1)):

$$x = x' + \frac{p}{2}, \quad y = y', \tag{11}$$

so nimmt die Gleichung (9) die Form:

$$y'^2 + 2px' = 0 \tag{12}$$

der *Scheitelgleichung*[17]) *der Parabel* an. Für Brennpunkt und Direktrix wird nach (11) mit $x = 0$ und $x = p$:

$$x' = -\frac{p}{2}, \tag{13}$$ $$x' = \frac{p}{2}. \tag{14}$$

Die Parabel bleibt eine *linke* oder *rechte*, je nachdem $p > 0$ oder

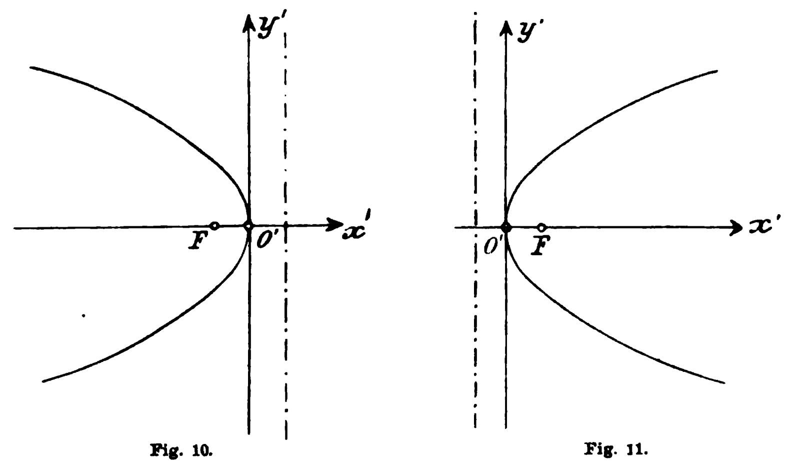


Fig. 10. Fig. 11.

$p < 0$ (Fig. 10; 11). Nach (4) und (6) ist dann beziehungsweise:

$$r = -d = -x' + \frac{p}{2}, \quad r = d = x' - \frac{p}{2}, \tag{15}$$

wo nach (5) und (3) $r = FP$ und $d = QP$.

7. Allgemeine Hauptachsengleichung. Führen wir einen beliebigen Punkt O'' der Hauptachse als Anfangspunkt eines parallelen Systems $O''x''y''$ ein, indem wir setzen:

$$x' = q + x'', \quad y' = y'', \tag{16}$$

so nimmt die Gleichung (12) die Form[8]) an:

$$\frac{y''^2}{p} + 2x'' + 2q = 0. \tag{17}$$

Für Scheitelpunkt, Brennpunkt und Direktrix ist dann:

(18) $x'' = -q$, (19) $x'' = -q - \frac{p}{2}$, (20) $x'' = -q + \frac{p}{2}$,

und die Parabel ist eine linke oder rechte, je nachdem $p > 0$ oder $p < 0$.

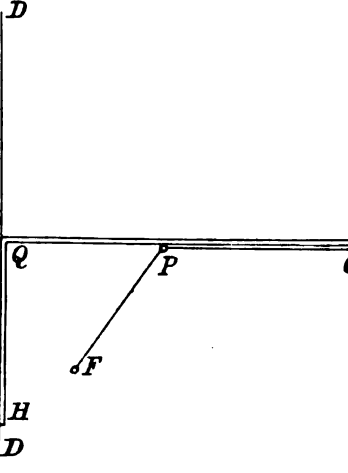


Fig. 12.

8. Mechanische Konstruktion. Um die Parabel nach (6) zu konstruieren, befestigt man in dem einen Endpunkt G eines Winkellineals GQH einen Faden von der Länge $l = GQ$ und befestigt das andere Ende des Fadens in F (Fig. 12). Jetzt schiebt man den Schenkel HQ längs der Direktrix DD und drückt einen den Faden spannenden Stift in P an den andern Schenkel an. Da hierbei:

$$FP + PG = QP + PG = l,$$

also:

$$FP = QP,$$

so beschreibt der Stift P einen Parabelbogen[11]).

9. Unendlich ferne Punkte der Parabel. Die Scheitelgleichung (12) der Parabel lautet in homogenen Koordinaten:

$$y^2 + 2pxt = 0. \tag{21}$$

Die Kurve schneidet also die unendlich ferne Gerade $t = 0$ zweifach im Punkte $x = 1$, $y = 0$, $t = 0$, dem unendlich fernen Punkte der Hauptachse (I § 22, (18)) oder:

Die Parabel berührt die unendlich ferne Gerade in diesem Punkte[9]).

§ 3. Scheitel- und Asymptotengleichung.

1. Der Parameter der Kegelschnitte. Aus der Gleichung der Ellipse und Hyperbel § 1, (7):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1 \tag{1}$$

ergibt sich mit $x^2 = e^2$ für die Ordinaten y der Brennpunkte:

$$y^2 = \frac{(a^2 - e^2)^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2},$$

wo, nach § 1, (12), $b^2 = \delta(a^2 - e^2)$ und *für die Ellipse* $\delta = +1$, *für die Hyperbel* $\delta = -1$ ist.

Der absolute Wert der Brennpunktsordinate für die Ellipse und Hyperbel:

$$(2)\qquad p = \frac{b^2}{a} = \delta\frac{a^2 - e^2}{a},$$

soll der (absolute) *Parameter*[15]) der Kurve genannt werden.

Aus der Gleichung der Parabel § 2, (12):

$$(3)\qquad y'^2 + 2px' = 0$$

ergibt sich für $x' = -\frac{p}{2}$:

$$(4)\qquad y'^2 = p^2,$$

so daß *der absolute Wert der Brennpunktsordinate zugleich der absolute Parameter der Parabel* (§ 2, 2) ist, den wir hier ebenfalls, wie in (2), mit p bezeichnen wollen.

2. Die Scheitelgleichung der Ellipse und Hyperbel. Transformiert man die Gleichung (1) durch die Substitution:

$$(5)\qquad x = \sigma a + \xi,\quad y = \eta$$

auf ein paralleles System $\Omega\xi\eta$, dessen Anfangspunkt der rechte ($\sigma = 1$) oder linke ($\sigma = -1$) Scheitelpunkt ist, so ergibt sich:

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = \frac{a^2 + 2\sigma a\xi + \xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2 - e^2} - 1$$

$$(a^2 - e^2)f = \eta^2 + 2\sigma\frac{a^2 - e^2}{a}\xi + \frac{a^2 - e^2}{a^2}\xi^2$$

oder endlich mit Rücksicht auf (2):

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \eta^2 + 2\delta\sigma p\xi + \delta\frac{p}{a}\xi^2.$$

Bezogen auf den rechten ($\sigma = 1$) *oder linken* ($\sigma = -1$) *Scheitel ist daher die Gleichung der Ellipse* ($\delta = 1$) *oder Hyperbel* ($\delta = -1$):

$$(6)\qquad \eta^2 + 2\delta\sigma p\xi + \delta\frac{p}{a}\xi^2 = 0.$$

3. Entstehung der Parabel aus Ellipse und Hyperbel. Statt der Konstanten a, e oder a, b in § 1, (7), (13) kann man für die Ellipse oder Hyperbel auch a, p in (6) willkürlich geben, worauf nach (2) $b^2 = ap$ ist.

Läßt man nun bei festem p die Konstante a unbegrenzt wachsen, so geht die Gleichung (6) über in:

$$(7)\qquad \eta^2 + 2\delta\sigma p\xi = 0.$$

Dies ist aber nach § 2, (12) eine linke ($\delta\sigma = 1$) oder rechte ($\delta\sigma = -1$) Parabel.

Die Parabel entsteht daher aus der Ellipse oder Hyperbel, indem a bei festem p unbegrenzt wächst.

4. Gleichförmige Scheitelgleichung der drei Kegelschnitte. Die Gleichung (6) umfaßt daher Ellipse, Hyperbel und Parabel, die drei „*Kegelschnitte*"[1]).

Nimmt man der Einfachheit wegen $\delta\sigma = -1$, so folgt aus (6):

Die Ellipse auf den linken, die Hyperbel auf den rechten Scheitel bezogen, und die rechte Parabel sind bezüglich durch die Gleichungen[17]):

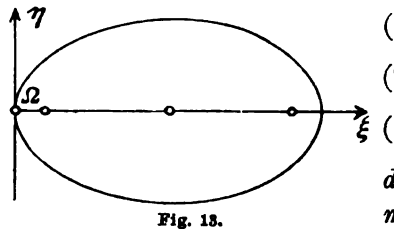


Fig. 13.

$$\eta^2 - 2p\xi + \frac{p}{a}\xi^2 = 0, \tag{8}$$

$$\eta^2 - 2p\xi \qquad = 0, \tag{9}$$

$$\eta^2 - 2p\xi - \frac{p}{a}\xi^2 = 0 \tag{10}$$

dargestellt, wo p den absoluten Parameter bedeutet (Fig. 13—15).

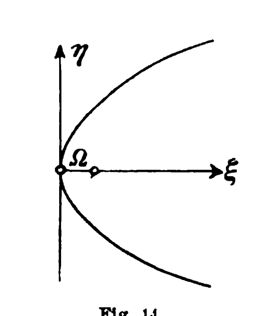


Fig. 14.

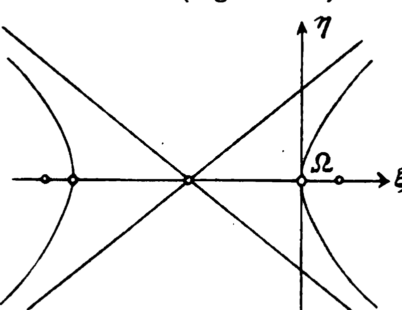


Fig. 15.

5. Die Asymptotengleichung der Hyperbel. Die Hauptachsengleichung der Hyperbel § 1, (13'):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{11}$$

wird auf ein konzentrisches schiefwinkliges System $O\xi\eta$, dessen Achsen die Richtungskosinus $\alpha_1\beta_1$ und $\alpha_2\beta_2$ haben, bezogen durch die Substitution (I § 14, (2)):

$$x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \quad y = \beta_1\xi + \beta_2\eta. \tag{12}$$

Sind insbesondere ξ und η die beiden Asymptoten mit den Richtungskosinus § 1, (20), so werden die Formeln (12):

$$\frac{x}{a} = \frac{\xi + \eta}{e}, \quad \frac{y}{b} = \frac{-\xi + \eta}{e} \tag{13}$$

und daher identisch:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = \frac{4\xi\eta}{e^2} - 1. \tag{14}$$

Bezogen auf ihre beiden Asymptoten als schiefwinkliges Koordinatensystem $O\xi\eta$ hat die Hyperbel die Gleichung[18] (Fig. 16):

(15) $$4\xi\eta = e^2.$$

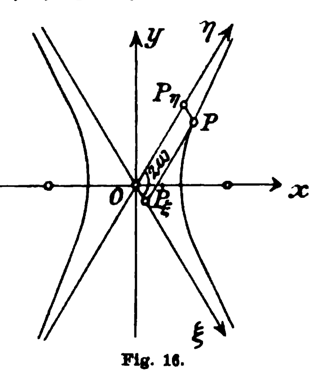


Fig. 16.

Danach kann die Hyperbel aus den beiden Asymptoten punktweise konstruiert werden.

6. Das Asymptotenparallelogramm. Ist 2ω der Winkel zwischen den Asymptoten ξ und η (Fig. 16), so ist für einen beliebigen Punkt $P = \xi, \eta$ der Hyperbel der Inhalt des Parallelogramms $OP_\xi PP_\eta$ mit Rücksicht auf (15):

(16) $$OP_\xi \cdot OP_\eta \sin 2\omega = \xi\eta \sin 2\omega = \frac{e^2}{4} \sin 2\omega$$

unabhängig von P.

Das durch die Asymptoten und den laufenden Punkt der Hyperbel bestimmte Parallelogramm ist von festem Inhalte.

§ 4. Brennpunktsgleichung und Direktrixeigenschaft.

1. Parameter und numerische Exzentrizität. Bei der Ellipse und Hyperbel:

(1) $$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0$$

führen wir neben dem (absoluten) *Parameter* § 3, (2):

(2) $$p = \delta \frac{a^2 - e^2}{a},$$

$\delta = 1$ für die Ellipse, $\delta = -1$ für die Hyperbel, die numerische *Exzentrizität*[19]):

(3) $$\varepsilon = \frac{e}{a} \qquad (a > 0,\ e > 0)$$

ein. Für diese ist:

(4) $$1 - \varepsilon^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = \delta \frac{p}{a}.$$

Bei der Ellipse $(a > e)$ *ist* $\varepsilon < 1$, *bei der Hyperbel* $\varepsilon > 1$.

Bei willkürlich gegebenen a, e sind nach (2) und (3) p, ε bestimmt. Umgekehrt ist bei willkürlich gegebenen p, ε nach (4) und (3):

(5) $$a = \frac{\delta p}{1 - \varepsilon^2}, \qquad (6) \quad e = a\varepsilon = \frac{\delta p \varepsilon}{1 - \varepsilon^2}.$$

Dabei hat man $\delta = 1$ oder -1 zu nehmen, je nachdem $\varepsilon < 1$ oder $\varepsilon > 1$, worauf bezüglich $a > e$ und $a < e$ wird.

2. Transformation der Ellipse und Hyperbel auf den Brennpunkt. Transformiert man die Gleichung (1) durch die Substitution:

$$x = \sigma e + \xi, \quad y = \eta \tag{7}$$

auf ein paralleles System $\Omega\xi\eta$, dessen Anfangspunkt der rechte ($\sigma = 1$) oder linke ($\sigma = -1$) Brennpunkt ist, so ergibt sich:

$$f = \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{2\sigma e \xi}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2 - e^2} - \frac{a^2 - e^2}{a^2}$$

oder mit Benutzung von (3) und (4):

$$(a^2 - e^2) f = \eta^2 + (1 - \varepsilon^2)\xi^2 + 2\delta\sigma\varepsilon p \xi - p^2.$$

Vermöge der Substitution (7) *gilt also die identische Gleichung:*

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \eta^2 + (1 - \varepsilon^2)\xi^2 + 2\delta\sigma\varepsilon p\xi - p^2 \tag{8}$$

oder auch:

$$(a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = (\xi^2 + \eta^2) - \varepsilon^2\left(\xi - \delta\sigma\frac{p}{\varepsilon}\right)^2. \tag{9}$$

3. Brennpunktsgleichung der drei Kegelschnitte. *Die Gleichung der Ellipse* ($\delta = 1$) *oder Hyperbel* ($\delta = -1$) *in bezug auf den rechten* ($\sigma = 1$) *oder linken* ($\sigma = -1$) *Brennpunkt*[20]) *lautet nach* (8):

$$\eta^2 + (1 - \varepsilon^2)\xi^2 + 2\delta\sigma\varepsilon p\xi - p^2 = 0, \tag{10}$$

oder:

$$(\xi^2 + \eta^2) - \varepsilon^2\left(\xi - \delta\sigma\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 = 0, \tag{11}$$

wo p den Parameter und ε die numerische Exzentrizität bedeutet (Fig. 17 mit $\delta = 1, \sigma = 1$; Fig. 18 mit $\delta = -1, \sigma = -1$). Die letztere ist < 1 für die Ellipse

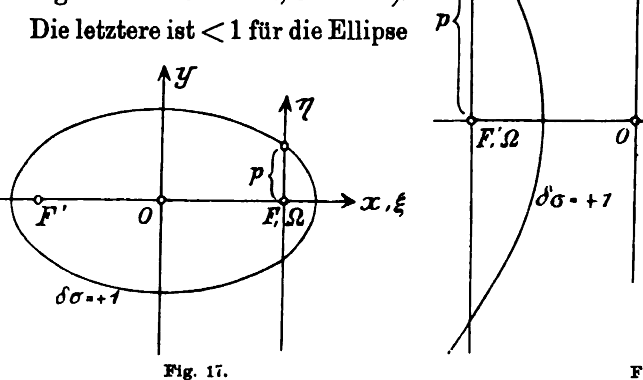


Fig. 17.

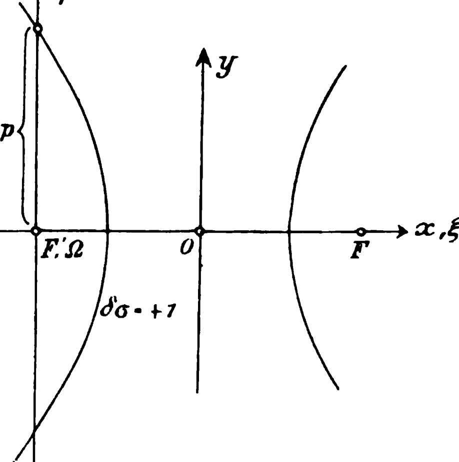


Fig. 18.

und > 1 für die Hyperbel. Mit $\varepsilon = 1$ stellt aber die Gleichung (10) nach § 2, (9) eine linke ($\delta\sigma = 1$; Fig. 19) oder rechte ($\delta\sigma = -1$) Parabel dar.

Die Gleichung (10) *oder* (11) *stellt daher bei beliebig gegebenen (absoluten) Konstanten p und ε einen Kegelschnitt dar, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\varepsilon < 1$, $= 1$ oder > 1 ist.* Der Koordinatenanfangspunkt ist ein Brennpunkt.

Das Vorzeichen $\delta\sigma = \pm 1$ bedingt nur die Lage gegen das Koordinatensystem.

Fig. 19.

4. Allgemeine Form der Brennpunktsgleichung. Um die Gleichung:

$$\eta^2 + A\xi^2 + 2B\xi - C^2 = 0 \tag{12}$$

auf die Form (10) zu bringen, setzt man:

$$A = 1 - \varepsilon^2, \quad B = \delta\sigma\varepsilon p, \quad C = p.$$

Hieraus folgt umgekehrt:

$$p = C, \quad \varepsilon^2 = 1 - A = \frac{B^2}{C^2}.$$

Die Gleichung (12) *ist daher die Brennpunktsgleichung eines Kegelschnittes, wenn:*

$$B^2 + (A - 1)C^2 = 0, \tag{13}$$

und zwar einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $A > 0$, $A = 0$ oder $A < 0$.

5. Bestimmung eines Ortes. Wir suchen den Ort eines Punktes, für den das Verhältnis des Abstandes r von einem festen Punkte und des Abstandes d von einer festen Geraden den konstanten Wert ε hat. Wir wählen den festen Punkt als Anfangspunkt Ω eines Systems $\Omega\xi\eta$ und legen die η-Achse der festen Geraden, der *Direktrix*[14]), parallel Die Gleichung dieser ist dann von der Form:

$$\xi = \tau \frac{p}{\varepsilon}, \tag{14}$$

wo $p : \varepsilon$ den absoluten Wert des Abstandes der Direktrix von Ω bedeutet und $\tau = +1$ oder -1 ist, je nachdem die Direktrix rechts (Fig. 20) oder links (Fig. 21) von Ω liegt.

Fig. 20.

Fig. 21.

Die im Sinne der ξ-Achse *relative Entfernung des laufenden Punktes $P = \xi, \eta$ von der Direktrix* ist dann:

$$d = QP = \xi - \tau\frac{p}{\varepsilon}, \tag{15}$$

während *der absolute Abstand des Punktes von* Ω:

$$r = \overline{\Omega P} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{16}$$

Infolgedessen gilt die identische Gleichung:

$$(r - \varepsilon d)(r + \varepsilon d) = r^2 - \varepsilon^2 d^2 = (\xi^2 + \eta^2) - \varepsilon^2\left(\xi - \tau\frac{p}{\varepsilon}\right)^2. \tag{17}$$

Die Eigenschaft des gesuchten Ortes besteht aber darin, daß, je nachdem $d > 0$ oder < 0, $r : d = \varepsilon$ oder $= -\varepsilon$, also jedenfalls:

$$(r - \varepsilon d)(r + \varepsilon d) = 0. \tag{18}$$

Seine Gleichung ist daher nach (17):

$$(\xi^2 + \eta^2) - \varepsilon^2\left(\xi - \tau\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 = 0 \tag{19}$$

und unterscheidet sich von (11) nur in der Bezeichnung des Vorzeichens:

$$\tau = \delta\sigma. \tag{20}$$

Der Ort eines Punktes $P = \xi, \eta$, dessen Abstand r von einem festen Punkte Ω zu seinem Abstand d von einer festen Geraden (Direktrix) das feste Verhältnis ε hat, ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem das Verhältnis ε, das die numerische Exzentrizität der Kurve wird, < 1, $= 1$ oder > 1 ist. Der Punkt Ω wird ein Brennpunkt, sein Abstand von der Direktrix (14) *gleich dem Verhältnis des Parameters p der Kurve zu ε.*

6. Erzeugung einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel. Die Gleichung (1) kann nach (9) auf zwei Weisen in die Form (19) gebracht werden, indem man in (7) den rechten ($\sigma = 1$) oder den linken ($\sigma = -1$) Brennpunkt benutzt. Die zu dem gewählten Brennpunkt gehörige Direktrix ist nach (14) und (20) völlig bestimmt:

$$\xi = \delta\sigma\frac{p}{\varepsilon}, \tag{21}$$

da für die Ellipse $\delta = 1$, für die Hyperbel $\delta = -1$ ist. Im alten System wird ihre Gleichung nach (7), (3) und (2):

$$x = \sigma\left(e + \delta\frac{p}{\varepsilon}\right) = \sigma\left(e + \delta\frac{ap}{e}\right) = \sigma\frac{a^2}{e}. \tag{22}$$

Zu dem rechten und linken Brennpunkt:

$$F: x = e,\ y = 0; \qquad F': x = -e,\ y = 0 \tag{23}$$

gehört also bezüglich die rechte und linke Direktrix:

$$x = \frac{a^2}{e}; \quad x = -\frac{a^2}{e}. \tag{24}$$

Die absoluten Abstände des Punktes $P = x, y$ von den beiden Brennpunkten sind:

$$(25)\qquad r = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}, \qquad r' = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}$$

und die relativen Abstände von den beiden Direktricen:

$$(26)\qquad d = x - \frac{a^2}{e}, \qquad d' = x + \frac{a^2}{e}.$$

Die Identität (9) wird, wenn man mittels (7) wieder x, y einführt und wie bei (22) verfährt:

$$(27)\quad (a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \{(x - \sigma e)^2 + y^2\} - \varepsilon^2\left\{x - \sigma\frac{a^2}{e}\right\}^2$$

oder, mit Benutzung von (25) und (26), für $\sigma = 1$ oder -1:

$$(28)\quad (a^2 - e^2)\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1\right\} = \begin{cases} r^2 - \varepsilon^2 d^2 = (r + \varepsilon d)(r - \varepsilon d) \\ r'^2 - \varepsilon^2 d'^2 = (r' + \varepsilon d')(r' - \varepsilon d'). \end{cases}$$

In dieser Doppelform ist sie der unmittelbare analytische Ausdruck der Erzeugung der Ellipse und Hyperbel aus dem einen oder andern Brennpunkt und der zugehörigen Direktrix[21]).

7. Die Lage der beiden Direktricen. Ist D der Fußpunkt der Direktrix auf der x-Achse, so erhält man die Strecke: $f = a^2 : e = OD$ aus der Proportion:

$$(29)\qquad f : a = a : e.$$

Errichtet man bei der Ellipse (Fig. 22) in F ein Perpendikel $FG = b$, so daß $OG = a$ wird (§ 1, (12)), so schneidet die in G auf OG errichtete Senkrechte die x-Achse in D.

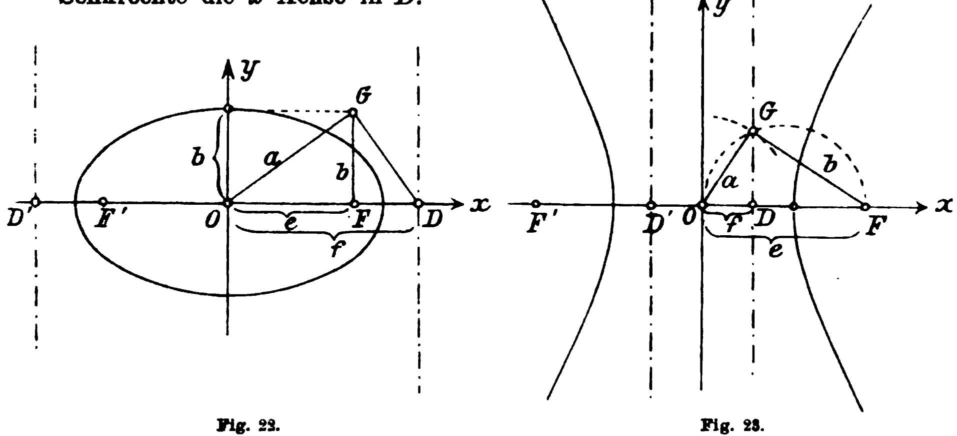


Fig. 22. Fig. 23.

Schneidet man bei der Hyperbel (Fig. 23) den über OF errichteten Halbkreis mit dem um O mit dem Radius a beschriebenen Kreise in

G und fällt von G ein Perpendikel auf die x-Achse, so ist D dessen Fußpunkt.

8. Verteilung der Direktrixeigenschaft auf die beiden Direktricen. Nach (28) hat sowohl die Ellipse als die Hyperbel die Eigenschaften:

$$(30)\qquad (r+\varepsilon d)(r-\varepsilon d)=0,\qquad (r'+\varepsilon d')(r'-\varepsilon d')=0.$$

Fig. 24.

Aber von diesen vier Faktoren verschwinden für die Ellipse und jeden Zweig der Hyperbel nur zwei.

Bei der Ellipse ist nämlich (§ 1, 8; § 4, 1):

$$(31)\qquad |x|<a,\quad \frac{a^2}{e}=\frac{a}{\varepsilon}>a$$

und daher für jeden ihrer Punkte:

$$d=x-\frac{a^2}{e}<0,\qquad d'=x+\frac{a^2}{e}>0 \text{ (Fig. 24)}.$$

Für die Ellipse ist somit stets[16]*:*

$$(32)\qquad r+\varepsilon d=0,\qquad r'-\varepsilon d'=0.$$

Bei der Hyperbel ist:

$$(33)\qquad |x|>a,$$

$$\frac{a^2}{e}=\frac{a}{\varepsilon}<a,$$

also für den rechten Zweig ($x>a$):

$$d=x-\frac{a^2}{e}>0,$$

$$d'=x+\frac{a^2}{e}>0,$$

für den linken Zweig ($x<a$):

$$d=x-\frac{a^2}{e}<0,$$

$$d'=x+\frac{a^2}{e}<0 \text{ (Fig. 25)}.$$

Fig. 25.

Bei der Hyperbel ist für den rechten und linken Zweig beziehungsweise[16]*):*

$$(34)\qquad r-\varepsilon d=0,\quad r'-\varepsilon d'=0;\qquad r+\varepsilon d=0,\quad r'+\varepsilon d'=0.$$

9. Beziehung zwischen r, r' und x. Infolge der Bedeutung (26) von d und d' geben die Formeln (32) und (34) den Satz:

Sind r und r' die Brennpunktsdistanzen eines Punktes $P = x, y$ der Kurve (1), so ist[22] *für*

$$(35)\quad \left\{\begin{array}{l|c|c} \textit{die Ellipse:} & \textit{der Hyperbel rechten Zweig:} & \textit{der Hyperbel linken Zweig:} \\ r = a - \frac{e}{a}x & r = -a + \frac{e}{a}x & r = a - \frac{e}{a}x \\ r' = a + \frac{e}{a}x & r' = a + \frac{e}{a}x & r' = -a - \frac{e}{a}x. \end{array}\right.$$

Hieraus folgt bezüglich wie § 1, 8:

$$(36)\quad r + r' = 2a, \qquad r' - r = 2a, \qquad r - r' = 2a.$$

Für die linke Parabel (Fig. 19):

$$(37)\quad y^2 + 2px = 0, \quad p > 0$$

lautet die den Beziehungen (35) entsprechende Formel nach § 2, (15):

$$(38)\quad r = \frac{p}{2} - x.$$

§ 5. Gleichungen in Polarkoordinaten.

1. Polargleichung in bezug auf den Mittelpunkt. Wir vereinigen die Gleichungen § 1, (13); (13') der Ellipse und Hyperbel in der Form:

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

indem wir unter b^2 eine positive oder negative (unter b eine reelle oder imaginäre) Größe verstehen.

Sind nun r, α, β die Polarkoordinaten eines Punktes x, y der Kurve, so ergibt sich aus (1) mit $x = r\alpha$, $y = r\beta$ (I § 12, (10)):

$$(2)\quad \frac{1}{r^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Diese Formel bestimmt die Länge r des in die Richtung α, β fallenden „Halbmessers" der Ellipse oder Hyperbel.

Bei der Ellipse ist r immer endlich und reell. Bei der Hyperbel ist r reell oder imaginär und dazwischen unendlich für die Richtung § 1, (20) der Asymptoten.

2. Senkrechte Halbmesser. Sind r_1; r_2 die in die Richtungen α_1, β_1; α_2, β_2 fallenden Halbmesser, so ist nach (2):

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2}, \quad \frac{1}{r_2^2} = \frac{\alpha_2^2}{a^2} + \frac{\beta_2^2}{b^2}.$$

Sind nun die Richtungen α_1, β_1 und α_2, β_2 senkrecht zueinander (Fig. 26), so ist (I § 13, (10)):

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{3}$$

Die Summe der reziproken Quadrate zweier zueinander senkrechter Halbmesser ist konstant[23]).

Bei der Hyperbel sind hier auch imaginäre Werte von r_1 und r_2 einbegriffen.

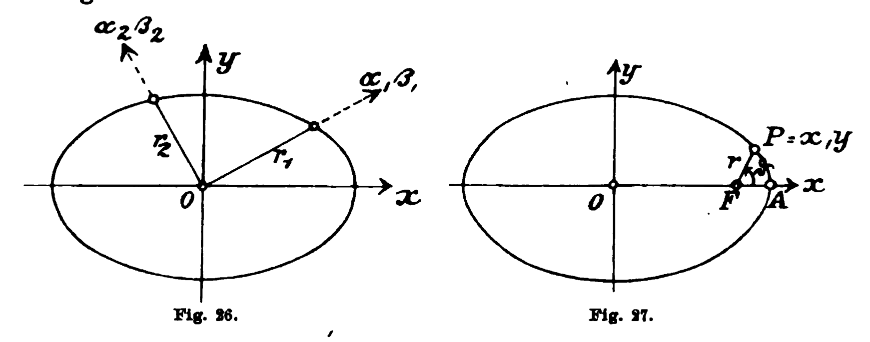


Fig. 26. Fig. 27.

3. Polargleichung der Ellipse in bezug auf den Brennpunkt. Bezeichnen r, ϑ die Polarkoordinaten eines Punktes $P = x, y$ der Ellipse (1) in bezug auf x-Achse und rechten Brennpunkt (Fig. 27), so ist einerseits (I § 14, (1); I § 12, (13)):

$$x = e + r\cos\vartheta \tag{4}$$

und andererseits nach § 4, (35):

$$r = a - \frac{e}{a}x. \tag{5}$$

Durch Elimination von x aus (4) und (5) folgt mit Rücksicht auf § 1, (12); § 3, (2); § 4, (3):

$$r = a - \frac{e^2}{a} - \frac{e}{a}r\cos\vartheta = \frac{b^2}{a} - \frac{e}{a}r\cos\vartheta = p - r\varepsilon\cos\vartheta.$$

Die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten in bezug auf rechten Brennpunkt und rechtslaufende Scheitelachse lautet:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}. \tag{6}$$

4. Polargleichung der Hyperbel in bezug auf den Brennpunkt. Bezeichnen r', ϑ die Polarkoordinaten eines Punktes $P = x, y$ der Hyperbel (1) in bezug auf x-Achse und linken Brennpunkt (Fig. 28), so ist einerseits:

$$x = -e + r'\cos\vartheta \tag{7}$$

und andererseits nach § 4, (35) für den linken und rechten Zweig bezüglich:

(8) $$r' = -a - \frac{e}{a}x; \qquad r' = a + \frac{e}{a}x.$$

Durch Elimination von x folgt:

$$r' = \frac{b^2}{a} - \frac{e}{a}r'\cos\vartheta = p - r'\varepsilon\cos\vartheta;$$

$$r' = -\frac{b^2}{a} + \frac{e}{a}r'\cos\vartheta = -p + r'\varepsilon\cos\vartheta.$$

Die Gleichung der Hyperbel in Polarkoordinaten in bezug auf linken Brennpunkt und rechtslaufende Scheitelachse lautet für den linken und rechten Zweig bezüglich:

(9) $$r' = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}, \qquad (9') \quad r' = \frac{p}{-1 + \varepsilon\cos\vartheta}.$$

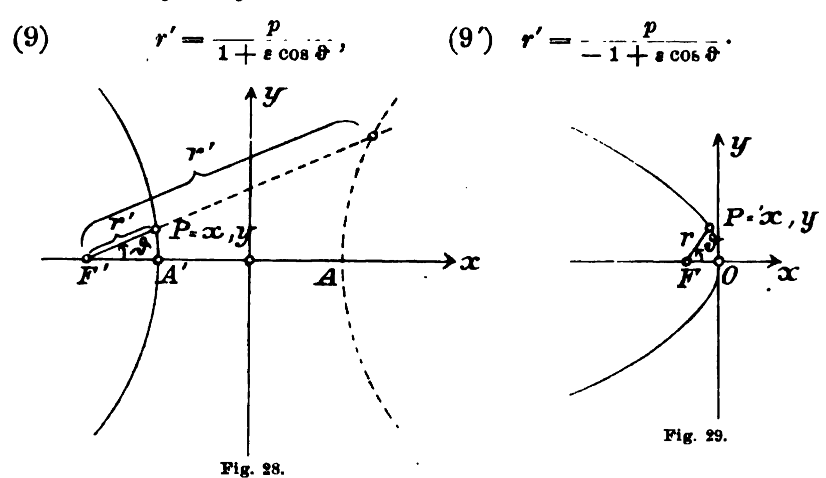


Fig. 28.

Fig. 29.

5. Polargleichung der Parabel in bezug auf den Brennpunkt. Bezeichnen r, ϑ die Polarkoordinaten eines Punktes $P = x, y$ der linken Parabel:

(10) $$y^2 + 2px = 0$$

in bezug auf x-Achse und Brennpunkt (Fig. 29), so ist einerseits (§ 2, (13)):

(11) $$x = -\frac{p}{2} + r\cos\vartheta$$

und andererseits (§ 2, (15)):

(12) $$r = \frac{p}{2} - x.$$

Durch Elimination von x folgt:

$$r = p - r\cos\vartheta$$

Die Gleichung der linken Parabel in Polarkoordinaten in bezug auf Brennpunkt und rechtslaufende Hauptachse lautet:

(13) $$r = \frac{p}{1 + \cos\vartheta}.$$

6. Vereinigte Polargleichung der drei Kegelschnitte. *Die Gleichung*[24]*):*

(14) $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\vartheta}$$

stellt, je nachdem $\varepsilon < 1$, $= 1$ *oder* > 1 *ist, die Ellipse, die Parabel oder einen Hyperbelzweig in Polarkoordinaten dar, die sich beziehen auf einen Brennpunkt und die von diesem nach dem (nächsten) Scheitel laufende Achse.*

§ 6. Parameterdarstellungen der Kegelschnitte.

1. Parameterdarstellung der Ellipse mittels zweier Kreise. Um den Koordinatenpunkt O seien zwei Kreise von den Radien a und b beschrieben $(a > b)$. Ein unter dem Richtungswinkel φ gegen die x-Achse von O ausgehender Halbstrahl schneide die beiden Kreise in R und S (Fig. 30). Eine Parallele zur y-Achse durch R hat die Gleichung:

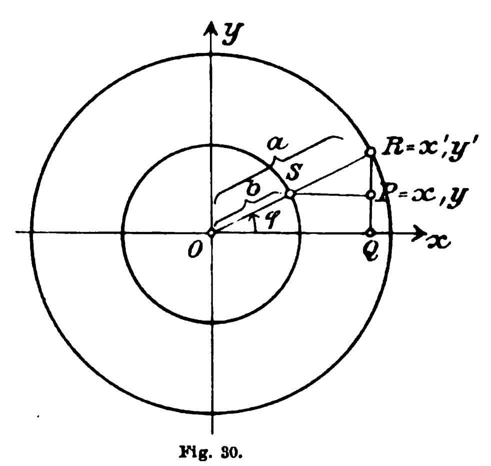


Fig. 30.

$$x = a\cos\varphi$$

und eine Parallele zur x-Achse durch S hat die Gleichung:

$$y = b\sin\varphi.$$

Der Schnittpunkt P der beiden Geraden[25]):

(1) $$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi$$

genügt unabhängig von φ der Gleichung:

(2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ist also bei jeder Wahl des Winkels φ ein Punkt der Ellipse (2).

Man kann also auf Grund der Parameterdarstellung (1) *beliebig viele Punkte der Ellipse konstruieren*[26]).

2. Affine Beziehung zwischen Kreis und Ellipse. Die Koordinaten von R sind:

(3) $$x' = a\cos\varphi, \qquad y' = a\sin\varphi.$$

Zwischen den Koordinaten der Punkte R und P bestehen also die Beziehungen:

(4) $$x = x', \qquad y = \frac{b}{a}y'.$$

Man kann daher die Konstruktion auch so aussprechen:

Teilt man die Ordinaten QR der Punkte eines Kreises vom Radius a im Verhältnis $QP : QR = b : a$, so bilden die Teilpunkte P eine Ellipse mit den Halbachsen a und b[27]).

Die Gleichungen (4) stellen eine *affine Verwandtschaft* dar (I § 67, (14)), vermöge deren jedem Punkte des Kreises ein Punkt der Ellipse entspricht und umgekehrt.

3. Parameterdarstellung der Hyperbel mittels zweier Kreise. Wieder seien R und S (Fig. 31) die Schnittpunkte des laufenden Halbstrahles φ mit den Kreisen vom Radius a und b ($a \gtrless b$). Die Tangenten des Kreises in R und S mögen die x-Achse in U und V schneiden. Errichtet man dann in U ein Perpendikel von der Länge:

$$UP = SV,$$

so hat dessen Endpunkt P die Koordinaten:

$$x = OU, \ y = UP = SV$$

oder[25]):

(5) $$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \qquad y = \frac{b\sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Er genügt also unabhängig von φ der Gleichung:

(6) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

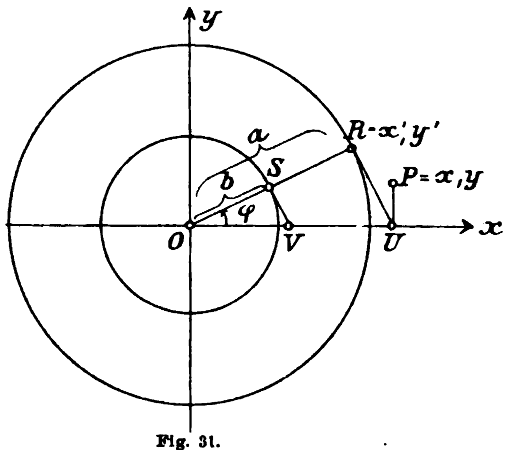


Fig. 31.

Man kann also auf Grund der Parameterdarstellung (5) *die Hyperbel* (6) *punktweise konstruieren*[26]).

4. Kollineare Beziehung zwischen Kreis und Hyperbel. Zwischen den Koordinaten der Punkte R in (3) und P in (5) bestehen die Gleichungen:

(7) $$x = \frac{a^2}{x'}, \qquad y = \frac{by'}{x'}.$$

Diese Gleichungen stellen eine *kollineare Verwandtschaft* dar (I § 67, (3)), vermöge deren jedem Punkte des Kreises ein Punkt der Hyperbel entspricht[27]).

Den Schnittpunkten des Kreises mit der x-Achse $x' = \pm a, y' = 0$ entsprechen dieselben Punkte als Scheitelpunkte der Hyperbel. Den Schnittpunkten des Kreises mit der y-Achse $x' = 0, y' = \pm a$ entsprechen die unendlich fernen Punkte $x : y : t = a : \pm b : 0$ (§ 1, (17')) der Hyperbel.

5. Parameterdarstellung der Ellipse mittels eines Strahlbüschels. Ein Strahl, der durch den linken Scheitel A' der Ellipse (2) unter beliebigem Richtungswinkel ϑ hindurchgeht (Fig. 32), hat, wenn zur Abkürzung:

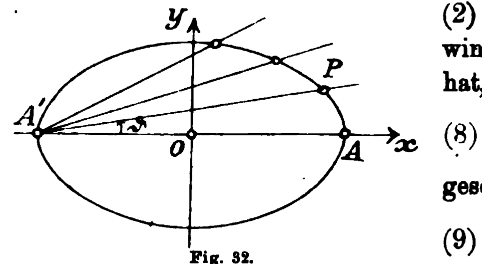


Fig. 32.

(8) $$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{b}{a}\lambda$$

gesetzt wird, die Gleichung:

(9) $$\frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a} + 1\right)\lambda.$$

Um seinen zweiten Schnittpunkt P mit der Ellipse zu erhalten, setzt man (9) in (2) ein und findet:

$$\left(\frac{x}{a} + 1\right)\left\{\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \left(\frac{x}{a} + 1\right)\lambda^2\right\} = 0.$$

Die Wurzel $x = -a$ dieser Gleichung entspricht dem bekannten Schnittpunkt A', die andere ist:

$$x = a\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}.$$

Mit Einsetzung dieses Wertes in (9) ergibt sich der Wert von y.

Der Schnittpunkt des Strahles (9) *mit der Ellipse* (2) *ist außer* A':

(10) $$x = a\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \qquad y = b\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Bei veränderlichem λ, bezüglich ϑ, enthalten die Gleichungen (10) eine *Parameterdarstellung der Ellipse*[28]). Jedem Strahle des Strahlbüschels (9) entspricht nach (10) ein Punkt x, y der Ellipse und jedem Punkt x, y der Ellipse ein Strahl des Büschels, dessen Parameter λ sich aus (9) bestimmt.

Setzt man:

(11) $$\lambda = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

so geht die Parameterdarstellung (10) wieder in (1) über.

6. Parameterdarstellung der Hyperbel mittels eines Strahlbüschels. Verbindet man die Gleichung (9) in derselben Weise (Fig. 33) mit der Gleichung der Hyperbel (6), so erhält man:

$$\left(\frac{x}{a} + 1\right)\left\{\left(\frac{x}{a} - 1\right) - \left(\frac{x}{a} + 1\right)\lambda^2\right\} = 0$$

und damit *die Parameterdarstellung der Hyperbel:*

$$(12)\qquad x = a\,\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, \qquad y = b\,\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}.$$

Sie geht mit (11) wieder in (5) über. Sie geht aus (10) hervor, wenn man dort für λ, b einsetzt: $-\lambda i, bi$.

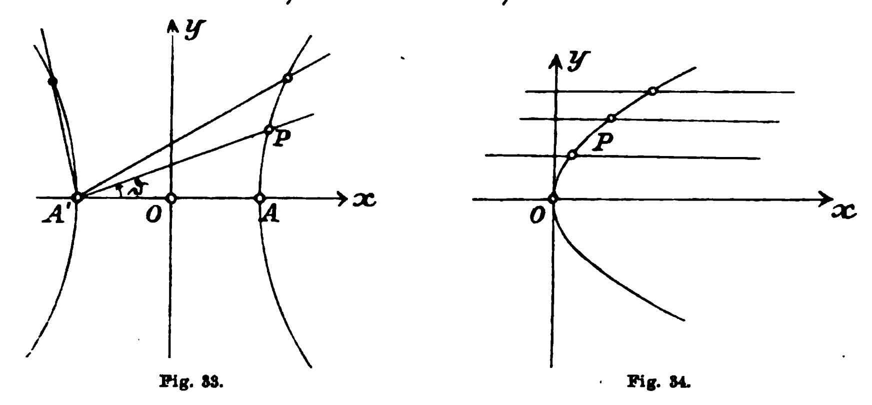


Fig. 33. Fig. 34.

7. Parameterdarstellung der Parabel mittels eines Strahlbüschels. Die Gleichung:

$$(13)\qquad y^2 = 2px$$

einer rechten Parabel gibt in der Form:

$$(14)\qquad x = \frac{\lambda^2}{2p}, \qquad y = \lambda$$

schon selbst eine Parameterdarstellung durch den Parameter λ des Büschels von Parallelstrahlen, die durch den unendlich fernen Punkt $x = 1$, $y = 0$, $t = 0$ (§ 2, 9) der Parabel gehen (Fig. 34).

Jeder horizontalen Geraden entpricht ein Punkt der Parabel und jedem Punkt der Parabel eine horizontale Gerade.

8. Projektive Sehnenbüschel bei den Kegelschnitten. *Die Gleichung der Verbindungslinie zweier Punkte λ_0 und λ der Ellipse* (10) ist in laufenden Koordinaten x, y (I § 16, (5)):

$$b\left(\frac{2\lambda_0}{1+\lambda_0^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right)x - a\left(\frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2} - \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)y$$
$$+ ab\left(\frac{1-\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\cdot\frac{2\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\cdot\frac{2\lambda_0}{1+\lambda_0^2}\right) = 0$$

oder mit Weglassung des Faktors $2(\lambda_0 - \lambda)\colon (1+\lambda_0^2)(1+\lambda^2)$

$$(15)\qquad (1-\lambda_0\lambda)\,\frac{x}{a} + (\lambda_0+\lambda)\,\frac{y}{b} - (1+\lambda_0\lambda) = 0.$$

Ist daher λ_0 ein fester und λ ein laufender Punkt, so ist:

$$(16)\qquad \left(\frac{x}{a} + \lambda_0\,\frac{y}{b} - 1\right) - \lambda\left(\lambda_0\,\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \lambda_0\right) = 0$$

die Gleichung des Strahlbüschels (I § 18, (14)), dessen Strahlen den festen Punkt λ_0 mit allen übrigen Punkten λ der Ellipse verbinden. Zu einem andern festen Punkt λ_1 gehört ebenso das Strahlbüschel:

(17) $$\left(\frac{x}{a} + \lambda_1 \frac{y}{b} - 1\right) - \lambda \left(\lambda_1 \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \lambda_1\right) = 0.$$

Da die beiden Büschel (16) und (17) projektiv sind (I § 66, (10); (11)), so folgt[29]) (Fig. 35):

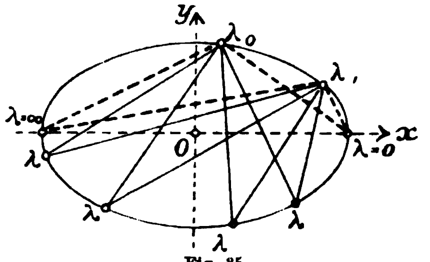


Fig. 35.

Verbindet man zwei feste Punkte λ_0 und λ_1 der Ellipse mit allen übrigen Punkten λ derselben, so erhält man zwei projektive Strahlbüschel.

Derselbe Satz gilt für die *Hyperbel*, für die in (15)—(17) nach 6. nur $-\lambda_0 i$, $-\lambda i$, bi für λ_0, λ, b zu setzen ist.

Derselbe Satz gilt auch für die *Parabel*, wo den Gleichungen (15) und (16) nach (14) die Gleichungen entsprechen:

(15') $$2px - (\lambda_0 + \lambda)\, y + \lambda_0 \lambda = 0$$

(16') $$(2px - \lambda_0 y) - \lambda\,(y - \lambda_0) = 0.$$

9. Übergang von der Ellipse auf den Kreis. Die beiden Grundstrahlen $g_1\,(\lambda = 0)$ und $g_2\,(\lambda = \infty)$ des Büschels (16) sind nach (16) diejenigen, welche das Büschelzentrum λ_0 mit den beiden Scheitelpunkten $x = \pm a$, $y = 0$ der Ellipse verbinden (Fig. 35). Für den laufenden Strahl g ist dann die Bedeutung von λ in (16) (I § 18, (15)):

(18) $$\lambda = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda_0^2}{b^2}} \cdot \sin g_1 g : \sqrt{\frac{\lambda_0^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \cdot \sin g_2 g.$$

Bei dem *Kreise* $a^2 = b^2$ wird diese daher:

(19) $$\lambda = \sin g_1 g : \sin g_2 g,$$

während die Grundstrahlen g_1 und g_2 als Schenkel eines Peripheriewinkels über dem Halbkreis zueinander senkrecht werden, so daß $\lambda = tg\, g_1 g$. Da Gleiches für das Büschel (17) gilt, so *werden beim Kreise die beiden Büschel* (16) *und* (17) *kongruent*[30]) (Fig. 36).

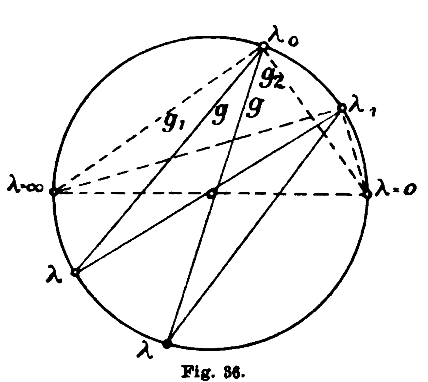


Fig. 36.

II. Abschnitt.

Beziehungen von Punkten und Geraden zur Kurve zweiter Ordnung oder Klasse.

I. Kapitel.

Punktepaare und Strahlenpaare.

§ 7. Gleichungen und Arten der Punkte- und Strahlenpaare.

1. Gleichung des Punktepaares. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in der Koordinate x des Punktes P einer geraden Linie (I § 1, (4)):

$$(1) \qquad g(x) = a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} = 0 \qquad (a_{12} = a_{21})$$

stellt ein *Punktepaar*[31]) dar (I § 70, (1)). Die beiden Wurzeln x_1, x_2 der quadratischen Gleichung (1) sind die Koordinaten der beiden Punkte S_1 und S_2 des Paares (Fig. 37).

$0 \quad S_1 = x_1 \quad S_2 = x_2 \quad x$

Fig. 37.

In homogenen Koordinaten (I § 7, 1) nimmt die Gleichung desselben Punktepaares die Form an:

$$(2) \qquad f(x, t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xt + a_{22}t^2 = 0.$$

Wir bezeichnen zur Abkürzung die halben partiellen Differentialquotienten von f nach x und t mit:

$$(3) \qquad \begin{cases} f_1(x, t) = a_{11}x + a_{12}t, \\ f_2(x, t) = a_{21}x + a_{22}t. \end{cases}$$

Dann ist identisch in x, t:

$$(4) \qquad f_1(x, t) \cdot x + f_2(x, t) \cdot t = f(x, t)$$

und identisch in x, t und x', t':

$$(5) \qquad f_1(x, t) \cdot x' + f_2(x, t) \cdot t' = f_1(x', t') \cdot x + f_2(x', t') \cdot t.$$

Die mit $t = 1$ aus (3) entstehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit:

$$(6) \qquad \begin{cases} g_1(x) = a_{11}x + a_{12}, \\ g_2(x) = a_{21}x + a_{22}, \end{cases}$$

worauf aus (4) mit $t = 1$ folgt:

$$(7) \qquad g_1(x) \cdot x + g_2(x) = g(x).$$

2. Transformation der Gleichung des Punktepaares. Um die Gleichung (1) auf ein neues gleichsinniges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt $O' = x_0$ (Fig. 38) zu beziehen, setzen wir (I § 1, (7)):

Fig. 38.

(8) $$x = x_0 + \xi$$

und erhalten:

(9) $$g(x) = a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi + a'_{22} = 0,$$

wo:

(10) $$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = g_1(x_0), \quad a'_{22} = g(x_0).$$

3. Getrennte und zusammenfallende Punktepaare. Bezeichnet man die Diskriminante der quadratischen Gleichung (1) oder (2), die *„Determinante des Punktepaares“*, mit:

(11) $$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

so sind die Koordinaten der beiden Punkte S_1 und S_2:

(12) $$x : t = -a_{12} + \varepsilon\sqrt{-A} : a_{11} = a_{22} : -a_{12} - \varepsilon\sqrt{-A},$$

wo für den einen Punkt $\varepsilon = +1$, für den andern $\varepsilon = -1$ ist.

Das Punktepaar ist daher ein *getrenntes* oder *eigentliches*, wenn:

(13) $$A \neq 0,$$

dagegen ein *zusammenfallendes* oder *uneigentliches* oder ein *Doppelpunkt*, wenn:

(14) $$A = 0.$$

Die Koordinaten des Doppelpunktes sind alsdann:

(15) $$x : t = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{21};$$

sie genügen nach (3) *den beiden Gleichungen:*

(16) $$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$

die im Falle (14) miteinander verträglich sind.

4. Reelle und imaginäre Punktepaare. Je nachdem:

(17) $$A > 0 \quad \text{oder} \quad A < 0$$

ist nach (12) das Punktepaar (2) *imaginär* oder *reell.* Das imaginäre Punktepaar hat vorerst keine geometrische Bedeutung (vgl. jedoch § 8, 5).

5. Endliche und unendlich weite Punkte des Paares. Für:

(18) $$a_{11} \neq 0$$

sind nach (12) die *beiden* Punkte des Paares (2) *endliche* Punkte. Für:

(19) $$a_{11} = 0$$

werden sie, wie aus (12) oder unmittelbar aus (2) hervorgeht:

(20) $$t = 0 \quad \text{und} \quad (21) \quad x : t = a_{22} : -2a_{12}.$$

Ist dann $A = -a_{12}^2 \neq 0$, so besteht das Paar aus *einem endlichen Punkt* (21) *und dem unendlich fernen* (20); ist $A = -a_{12}^2 = 0$, aber $a_{22} \neq 0$, wird es ein *unendlich ferner Doppelpunkt*.

6. Punktepaare mit endlichem Mittelpunkt. Die transformierte Gleichung (9) nimmt unter der Bedingung, daß der neue Anfangspunkt $O' = x_0$ der Gleichung:

(22) $$a'_{12} = g_1(x_0) = a_{11}x_0 + a_{12} = 0$$

genügt, die Form:

(23) $$g(x) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22} = 0$$

an, welche zeigt, daß O' der Mittelpunkt (Fig. 39) des Punktepaares ist (I § 1, 7).

$O \quad S_1 \quad O' x_0 \quad S_2 \quad x(\xi)$

Fig. 39.

Wenn die Bedingung (18) *erfüllt ist, hat das Punktepaar* (1) *einen bestimmten endlichen Mittelpunkt:*

(24) $$x_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Nach (10), (7) und (22) wird nun der Koeffizient a'_{22} in (23):

$$a'_{22} = g(x_0) = g_1(x_0)x_0 + g_2(x_0) = g_2(x_0)$$

und weiter nach (6), (24) und (11):

(25) $$a'_{22} = -\frac{a_{12}^2}{a_{11}} + a_{22} = \frac{A}{a_{11}}.$$

Da nach (10) auch $a'_{11} = a_{11}$ ist, wird die Gleichung (23):

(26) $$g(x) = a_{11}\xi^2 + \frac{A}{a_{11}} = 0.$$

Führt man unter der Voraussetzung (18) *den Mittelpunkt als Anfangspunkt ein, so erhält die Gleichung des Punktepaares die Form* (26).

7. Punktepaare ohne endlichen Mittelpunkt. Wenn $a_{11} = 0$, $A = -a_{12}^2 \neq 0$, kann der Gleichung (22) durch keinen endlichen Punkt x_0 entsprochen werden. Führt man aber den endlichen Punkt (21) als Anfangspunkt O' ein, so wird in (10):

$$a'_{11} = 0, \quad a'_{12} = a_{12}, \quad a'_{22} = g(x_0) = 2a_{12}x_0 + a_{22} = 0.$$

Die Gleichung (9) nimmt also die Form an:

(27) $$g(x) = 2a_{12}\xi = 0, \quad \text{homogen: } 2a_{12}\xi\tau = 0.$$

8. Die Arten des Punktepaares und ihre kanonischen Gleichungen. Setzt man in (26), je nachdem A positiv oder negativ ist, $A : a_{11}^2 = \alpha^2$ oder $-\alpha^2$, so erhält man schließlich folgende fünf Arten von Punktepaaren mit ihren kanonischen Gleichungen:

(28)

	$A \neq 0$: Eigentl. Punktepaare		$A = 0$: Doppelpunkte
	$A > 0$: Imag. Punktp.	$A < 0$: Reell. Punktp.	
$a_{11} \neq 0$: beide Punkte endl.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + 1 = 0$ Imag. eig. Punktp.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - 1 = 0$ Reell. eig. Punktp.	$\xi^2 = 0$ endl. Doppelp.
$a_{11} = 0$: nicht beide endl.		$\xi\tau = 0$ endl. u. unendl. f. Pkt.	$\tau^2 = 0$ unendl. f. Doppelp.

9. Gleichung des Punktepaares in Verhältniskoordinaten. Bedeutet (Fig. 40) λ die multiplizierte Verhältnis- (oder Doppelverhältnis-) Koordinate eines Punktes P der Geraden in bezug auf zwei Grundpunkte E_1 und E_2 (I § 6, (7); (16)), also:

E_1 S_1 E_2 S_2

Fig. 40.

$$(29) \qquad \lambda = c\,\frac{E_1 P}{E_2 P} \quad \left(\text{oder } \lambda = \frac{E_2 E_0}{E_1 E_0}\,\frac{E_1 P}{E_2 P}\right),$$

wo c eine Konstante (und E_0 den Einheitspunkt) bezeichnet, so stellt auch die Gleichung:

$$(30) \qquad a_{11}\lambda^2 + 2\,a_{12}\lambda + a_{22} = 0$$

ein *Punktepaar* dar. Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (30) sind die Koordinaten der beiden Punkte S_1 und S_2 des Paares.

Das Paar ist getrennt oder zusammenfallend, je nachdem $A \neq 0$ *oder* $A = 0$; *das getrennte reell für* $A < 0$, *imaginär für* $A > 0$.

10. Strahlenpaare im Parallelstrahlbüschel. Betrachtet man x nicht als Koordinate des Punktes auf der x-Achse, sondern als Koordinate im Büschel der zur x-Achse senkrechten Strahlen (I § 23, 2), so kann man die vorstehenden Sätze auch auf die Strahlenpaare im *Parallelstrahlbüschel* beziehen.

11. Gleichung des Strahlenpaares. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades in der *gemeinen Koordinate* $\operatorname{tg}\varphi$ *des Strahles im Strahlbüschel* (I § 2, (13)):

(31) $$a_{22}\,\mathrm{tg}^2\varphi + 2a_{12}\,\mathrm{tg}\,\varphi + a_{11} = 0$$
stellt ein *Strahlenpaar* (Fig. 41) dar. Die beiden Wurzeln $\mathrm{tg}\,\varphi_1$, $\mathrm{tg}\,\varphi_2$ der quadratischen Gleichung sind die Koordinaten der beiden Strahlen s_1 und s_2 des Paares.

In *homogenen Koordinaten:*

(32) $$x = \cos\varphi, \qquad y = \sin\varphi$$
des Strahles im Büschel (I § 7, (2)) lautet die Gleichung desselben Strahlenpaares[31]):

(33) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0.$$
Sie stellt das Strahlenpaar gleichzeitig *in laufenden Punktkoordinaten x, y in der Ebene* in bezug auf ein rechtwinkliges System Oxy (Fig. 41) (I § 12, (13)) dar, kann aber auch als Gleichung eines *Punktepaares auf der unendlich fernen Geraden in homogenen gemeinen Koordinaten auf dieser* (I § 23, 1) gelten.

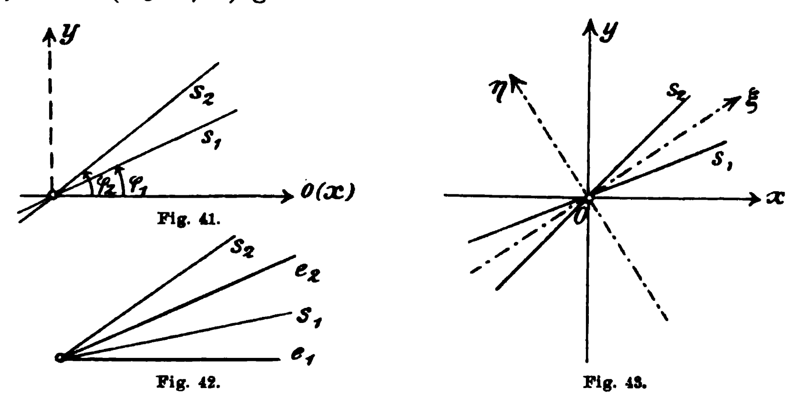


Fig. 41. Fig. 42. Fig. 43.

In *multiplizierter Verhältniskoordinate* (I § 6, (7′)) in bezug auf zwei Grundstrahlen e_1, e_2 (Fig. 42):

(34) $$\lambda = c\,\frac{\sin e_1 p}{\sin e_2 p}$$
wird das Strahlenpaar durch die Gleichung (30) dargestellt.

12. Arten und kanonische Gleichungen. Wie in § 21, 15 gezeigt werden wird, kann die Gleichung (33) (bezüglich (31)) durch Einführung neuer rechtwinkliger Achsen ξ, η, der *Halbierungslinien* (Fig. 43) *oder Hauptachsen* des Strahlenpaares, auf die Form:

(35) $$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 = 0 \qquad (\lambda_1 + \lambda_2\,\mathrm{tg}^2\psi = 0)$$
gebracht werden, wo:

(36) $$\lambda_1 + \lambda_2 = A', \qquad \lambda_1\lambda_2 = A$$

und neben (11) die Abkürzung:

$$A' = a_{11} + a_{22} \tag{37}$$

eingeführt wird.

Danach ergeben sich als *Arten des Strahlenpaares* (33) ((31)) *zugleich mit ihren kanonischen Gleichungen:*

$$\text{(38)} \quad \begin{cases} A > 0: \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0 \left(\operatorname{tg}^2\psi + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0\right) & \textit{imaginäres Strahlenpaar,} \\ A < 0: \frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0 \left(\operatorname{tg}^2\psi - \frac{\beta^2}{\alpha^2} = 0\right) & \textit{reelles Strahlenpaar,} \\ A = 0: \xi^2 = 0 \quad (\operatorname{tg}^2\psi = 0) & \textit{zusammenfallendes Strahlenpaar.} \end{cases}$$

Als besondere Fälle der imaginären und reellen Strahlenpaare, mit $\alpha^2 = \beta^2$, sind (vgl. § 21, **15**) hervorzuheben:

$$\text{(39)} \quad \textit{für } a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0: \xi^2 + \eta^2 = 0 \quad (\operatorname{tg}^2\psi + 1 = 0)$$

Kreisstrahlenpaar oder Nullkreis

(als Sonderfall in § 1, (21) enthalten) und:

$$\text{(40)} \quad \textit{für } A' = 0: \xi^2 - \eta^2 = 0 \quad (\operatorname{tg}^2\psi - 1 = 0)$$

rechtwinkliges Strahlenpaar.

Die Bedingungen (39) gehen unmittelbar daraus hervor, daß der Ausdruck $x^2 + y^2$ in jedem rechtwinkligen Koordinatensystem derselbe bleibt (I § 14, (9)), die Bedingung (40) aber folgt daraus, daß für die beiden Wurzeln von (31):

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \tag{41}$$

also:

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1,$$

wenn:

$$a_{11} : a_{22} = -1.$$

13. Ebenenpaare. Die vorstehenden Sätze übertragen sich entsprechend sofort auch auf das Ebenenpaar, welches von einer zu seiner Achse senkrechten Ebene in einem Strahlenpaar geschnitten wird.

§ 8. Polarentheorie der Punkte- und Strahlenpaare; Involutionen.

1. Begriff harmonischer Pole eines Punktepaares. Sind jetzt x' und x'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung § 7, (1), so ist:

$$x' + x'' = -\frac{2a_{12}}{a_{11}}, \quad x'x'' = \frac{a_{22}}{a_{11}}. \tag{1}$$

Zwei zu x' und x'' harmonische Punkte x_1 und x_2 genügen (I § 3, (25)) der Bedingung:

$$x_1x_2 - \frac{1}{2}(x' + x'')(x_1 + x_2) + x'x'' = 0. \tag{2}$$

Nach (1) folgt daher:

Zwei Punkte x_1 und x_2 sind zu dem Punktepaar:

(3) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} = 0$$

harmonisch (harmonische Pole), wenn:

(4) $$a_{11}x_1x_2 + a_{12}(x_1 + x_2) + a_{22} = 0.$$

Diese Definition soll nun auch für den Fall gelten, daß das Punktepaar (3) imaginär ist (§ 7, **4**).

In homogene Schreibweise übertragen lautet derselbe Satz:

Zwei Punkte x_1, t_1 und x_2, t_2 sind zu dem Punktepaar:

(5) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xt + a_{22}t^2 = 0$$

harmonisch, wenn:

(6) $$a_{11}x_1x_2 + a_{12}(x_1t_2 + x_2t_1) + a_{22}t_1t_2 = 0.$$

Da endlich die Form der Bedingung (2) in multiplizierten Verhältniskoordinaten dieselbe bleibt (I § 6, **10**), so ergibt sich auch:

Zwei Punkte λ_1 und λ_2 sind zu dem Punktepaar (§ 7, (30)):

(7) $$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$$

harmonisch, wenn:

(8) $$a_{11}\lambda_1\lambda_2 + a_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{22} = 0.$$

2. Vertauschbares Entsprechen harmonischer Pole. Die Bedingung (6) kann nach § 7, (3); (5) auch in der Form geschrieben werden:

(9) $$f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}t_2 = 0 \quad \text{oder} \quad (10) \quad f_1^{(2)}x_1 + f_2^{(2)}t_1 = 0.$$

Sie ist in den Koordinaten jedes der beiden Punkte linear. Daher *entspricht jedem gegebenen Punkte der Geraden ein anderer als harmonischer Pol.*

Sie ist in den Koordinaten beider Punkte symmetrisch. Daher *entsprechen sich je zwei Punkte der Geraden vertauschbar.*

3. Zusammenfall harmonischer Pole. Soll der harmonische Pol x_2, t_2 eines gegebenen Punktes x_1, t_1 mit diesem selbst zusammenfallen, muß nach (6) die Bedingung:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1t_1 + a_{22}t_1^2 = 0$$

bestehen, also x_1, t_1 der Gleichung (5) genügen.

Ein Punkt fällt immer dann und nur dann mit seinem harmonischen Pol zusammen, wenn er einer der beiden Punkte des Paares ist.

4. Harmonische Pole beim getrennten und zusammenfallenden Punktepaar. Wenn $A \neq 0$, können $f_1^{(1)}$ und $f_2^{(1)}$ in § 7, (3) nicht gleichzeitig verschwinden, so daß die Gleichung (9) stets das Verhältnis $x_2 : t_2$ bestimmt.

Beim getrennten Punktepaar entspricht ausnahmslos jedem Punkte ein einziger bestimmter Pol.

Wenn $A = 0$, wird bei gegebenem x_1, t_1 die Gleichung (10) stets durch den Doppelpunkt als Pol x_2, t_2 erfüllt, da für diesen nach § 7, (16) $f_1^{(2)} = 0$, $f_2^{(2)} = 0$, und wird, falls x_1, t_1 selbst der Doppelpunkt, also $f_1^{(1)} = 0$, $f_2^{(1)} = 0$ ist, die Gleichung (9) identisch in x_2, t_2 erfüllt.

Beim zusammenfallenden Punktepaar entspricht jedem anderen Punkte der Doppelpunkt, dem Doppelpunkt aber jeder andere Punkt als Pol.

5. Begriff der Punktinvolution. *Der Inbegriff aller Paare harmonischer Pole eines Punktepaares heißt eine Punktinvolution*[32]).

Dem *getrennten* Punktepaar entspricht die *eigentliche* Punktinvolution; die Punkte des Paares selbst heißen die *Doppelpunkte der Involution* (vgl. 3); je nachdem sie *reell* oder *imaginär* sind, heißt die *Involution hyperbolisch* oder *elliptisch.*[33])

Dem *zusammenfallenden* Punktepaar entspricht die *uneigentliche* oder *parabolische* Involution.

Die Gleichung (4) oder (6) oder (8) ist die *Gleichung der Involution,* (3) oder (5) oder (7) die *Gleichung der zugehörigen Doppelpunkte.*

Dadurch, daß auch das *imaginäre* Punktepaar eine Involution bestimmt, bei der jedem *reellen* Punkt wieder ein *reeller* Punkt entspricht, gewinnt es seine geometrische Bedeutung.[34])

6. Kanonische Gleichungen der Punktinvolutionen. Den kanonischen Gleichungen der drei Arten getrennter Punktepaare § 7, (28):

(11) $x^2 + a^2 = 0$; (12) $x^2 - a^2 = 0$; (13) $xt = 0$

entsprechen als kanonische Gleichungen der zugehörigen elliptischen, hyperbolischen und *gleichseitig hyperbolischen* Involution:

(14) $x_1 x_2 + a^2 = 0$; (15) $x_1 x_2 - a^2 = 0$;

(16) $x_1 t_2 + x_2 t_1 = 0$ oder $x_1 + x_2 = 0$.

Der Koordinatenanfangspunkt O ist der Mittelpunkt der Involution, bei (14) und (15) zugleich der Mittelpunkt des Punktepaares (11) und (12), bei der parabolischen der eine endliche Punkt des Punktepaares (13).

Bei der *elliptischen* Involution liegen zwei entsprechende Punkte x_1 und $x_2 = -\frac{a^2}{x_1}$ gegen den Mittelpunkt O ungleichseitig und bewegen sich gleichlaufend (x_1 nach x_1' : x_2 nach x_2', Fig. 44); zwei Paare x_1, x_2 und x_1', x_2' trennen sich gegenseitig.

Bei der *hyperbolischen* Involution liegen zwei entsprechende Punkte x_1 und $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$ gegen den Mittelpunkt O gleichseitig und bewegen sich ungleichlaufend (x_1 nach x_1' : x_2 nach x_2', Fig. 45); zwei Paare x_1, x_2 und x_1', x_2' trennen sich nicht.

Fig. 44.

Fig. 45.

Fig. 46.

Bei der *gleichseitig hyperbolischen* Involution sind zwei entsprechende Punkte x_1 und x_2 oder x_1' und x_2' (Fig. 46) beiderseits gleichweit von O entfernt.

7. Bestimmung der Involution durch zwei Paare entsprechender Punkte. Sind a_1, a_2 und b_1, b_2 zwei Paare entsprechender Punkte der Involution (4):

$$a_{11} x_1 x_2 + a_{12}(x_1 + x_2) + a_{22} = 0,$$

so ist:

$$a_{11} a_1 a_2 + a_{12}(a_1 + a_2) + a_{22} = 0,$$
$$a_{11} b_1 b_2 + a_{12}(b_1 + b_2) + a_{22} = 0.$$

Durch Elimination der Verhältnisse $a_{11} : a_{12} : a_{22}$ folgt:

Die Gleichung der durch zwei Paare entsprechender Punkte a_1, a_2 und b_1, b_2 gegebenen Involution lautet:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} x_1 x_2 & x_1 + x_2 & 1 \\ a_1 a_2 & a_1 + a_2 & 1 \\ b_1 b_2 & b_1 + b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(18) \quad (a_1 - b_2)(x_1 - a_2)(x_2 - b_1) + (a_2 - b_1)(x_2 - a_1)(x_1 - b_2) = 0.$$

Mit $a_1 = a_2 = a$ und $b_1 = b_2 = b$ folgt daraus im besonderen:

Die Gleichung der durch ihre beiden Doppelpunkte a und b bestimmten Involution lautet:

$$(19) \qquad (x_1 - a)(x_2 - b) + (x_2 - a)(x_1 - b) = 0.$$

Andererseits drückt man den allgemeinen Satz (18) mit $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ auch in der Form aus:

Drei Punktepaare a_1, a_2; b_1, b_2 und c_1, c_2 liegen in Involution (gehören der durch zwei von ihnen bestimmten Involution an), wenn:

$$(20) \quad (b_1 - c_2)(c_1 - a_2)(a_1 - b_2) + (b_2 - c_1)(c_2 - a_1)(a_2 - b_1) = 0.$$

Da statt der Gleichung (4) auch die Gleichung (8) als Ausgangspunkt hätte dienen können, gelten diese Resultate auch, wenn statt x_1, x_2 die Verhältniskoordinaten λ_1, λ_2 eintreten und a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 besondere Werte derselben bedeuten.

8. Harmonische Pole als Koordinatenanfangspunkte. Die Anfangspunkte E_1 und E_2 der multiplizierten Verhältniskoordinate λ haben nach § 7, (29) die Koordinaten $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. Dem Anfangspunkte $E_1(\lambda_1 = 0)$ entspricht daher in der Involution (8) der Punkt:

$$a_{12}\lambda_2 + a_{22} = 0.$$

Dies ist der Punkt $E_2(\lambda_2 = \infty)$, wenn $a_{12} = 0$ ist.

Die Gleichung (7) *eines Punktepaares* S_1, S_2 *in multiplizierter Verhältniskoordinate* λ *in bezug auf die Anfangspunkte* E_1, E_2 *hat immer dann und nur dann die Form:*

$$a_{11}\lambda^2 + a_{22} = 0, \tag{21}$$

wenn E_1, E_2 *zu* S_1, S_2 *harmonisch sind* (E_1, E_2 ein Punktepaar der Involution (8) sind).

9. Harmonische Polaren eines Strahlenpaares. Da für vier harmonische Strahlen $\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$; $\operatorname{tg}\varphi'$, $\operatorname{tg}\varphi''$ wie in (2):

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 - \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi' + \operatorname{tg}\varphi'')(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2) + \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\varphi'' = 0 \tag{22}$$

(I § 4, (10)), so folgt im gleichen Umfange wie unter **1**:

Zwei Strahlen $\operatorname{tg}\varphi_1$ *und* $\operatorname{tg}\varphi_2$ *sind zu dem Strahlenpaare:*

$$a_{22}\operatorname{tg}^2\varphi + 2a_{12}\operatorname{tg}\varphi + a_{11} = 0 \tag{23}$$

harmonisch (harmonische Polaren), wenn:

$$a_{22}\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2 + a_{12}(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2) + a_{11} = 0; \tag{24}$$

oder für homogene Koordinaten (§ 7, (32)):

Zwei Strahlen x_1, y_1 *und* x_2, y_2 *sind zu dem Strahlenpaare:*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \tag{25}$$

harmonisch, wenn:

$$a_{11}x_1x_2 + a_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + a_{22}y_1y_2 = 0. \tag{26}$$

10. Strahleninvolutionen. *Der Inbegriff aller Paare harmonischer Polaren eines Strahlenpaares heißt eine Strahleninvolution.*[32])

Die Gleichung (24) oder (26) oder (8) ist die *Gleichung der Involution,* deren *Doppelstrahlen* die Strahlenpaare (23) oder (25) oder (7) (§ 7, (34)) bilden.

Je nachdem die Doppelstrahlen imaginär oder reell sind, ist die Involution *elliptisch* oder *hyperbolisch.*

11. Arten von Strahleninvolutionen. Den kanonischen Gleichungen der beiden Arten getrennter Strahlenpaare § 7, (38):

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}^2\varphi \pm \frac{b^2}{a^2} = 0 \tag{27}$$

entsprechen als *kanonische Gleichungen der zugehörigen Strahleninvolution*:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} \pm \frac{y_1 y_2}{b^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 \pm \frac{b^2}{a^2} = 0, \tag{28}$$

die mit dem positiven Zeichen elliptisch, mit dem negativen hyperbolisch ist.[33]) Die Hauptachsen des Doppelstrahlenpaares (27) (§ 7, **12**) werden auch als *Hauptachsen der Involution* bezeichnet. (Über die Gestalt der beiden Involutionen vgl. § 14, **4**.)

12. Die Involution rechter Winkel. Ein Sonderfall der elliptischen Strahleninvolution ist die zu dem imaginären Strahlenpaar (§ 7, (39)):

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad \operatorname{tg}^2\varphi + 1 = 0 \tag{29}$$

gehörige Involution:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + 1 = 0, \tag{30}$$

bei der *je zwei entsprechende Strahlen aufeinander senkrecht stehen* $\left(\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right)$. Sie heißt die *zirkulare* oder *orthogonale* Strahleninvolution oder *Involution rechter Winkel.*

Sollen überhaupt in einer Strahleninvolution (24) zwei rechtwinklige entsprechende Strahlen $\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\operatorname{tg}\varphi_2$ vorkommen, so muß der Gleichung (24) bei gegebenem $\operatorname{tg}\varphi_1$ durch den Wert $\operatorname{tg}\varphi_2 = -1 : \operatorname{tg}\varphi_1$ genügt werden, also die Bedingung erfüllt sein:

$$a_{12}\operatorname{tg}^2\varphi_1 + (a_{11} - a_{22})\operatorname{tg}\varphi_1 - a_{12} = 0. \tag{31}$$

Diese quadratische Gleichung für $\operatorname{tg}\varphi_1$ hat zwei reelle Wurzeln, deren Produkt -1 ist, denen also zwei zueinander rechtwinklige Strahlen entsprechen.

I. *In jeder Strahleninvolution gibt es also ein Paar entsprechender Strahlen, die zueinander rechtwinklig sind, die Hauptachsen.*

Eine einzige Ausnahme bildet der Fall, wo die quadratische Gleichung (31) identisch erfüllt ist, also mit $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ die Gleichung (24) auf (30) zurückkommt. Man kann daher auch sagen

II. *Enthält eine Strahleninvolution zwei Paar rechtwinkliger entsprechender Strahlen, so sind alle ihre Paare entsprechender Strahlen rechtwinklig.*

13. Die gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution. Ein Sonderfall der hyperbolischen ist die *gleichseitig hyperbolische Strahleninvolution,* die zu dem rechtwinkligen Strahlenpaar (§ 7, (40)):

(32) $$x^2 - y^2 = 0, \qquad \operatorname{tg}^2\varphi - 1 = 0$$

gehört und die Gleichung hat:

(33) $$x_1 x_2 - y_1 y_2 = 0, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 - 1 = 0.$$

I. *Sie besteht aus allen Strahlenpaaren* φ_1, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$, *welche die beiden rechtwinkligen Strahlen* (32) *zu Halbierungslinien haben* (Fig. 41).

Wir können diesen Satz auch so aussprechen:

II. *Sind zwei Strahlen zu zwei rechtwinkligen Strahlen harmonisch, so haben sie diese zu Halbierungslinien* (I § 4, 8, II).

Indem man die Strahlen (32) als Koordinatenachsen einführt, kann man die Gleichungen (32) und (33) auch auf die Form bringen ((25); (23); (26); (24) mit $a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 0$):

(34) $$2xy = 0, \qquad 2\operatorname{tg}\varphi = 0,$$

(35) $$x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2 = 0.$$

14. Bestimmung einer Involution durch zwei Strahlenpaare. Die Sätze unter 7 übertragen sich unmittelbar auf Strahleninvolutionen, nur daß in (17)—(20) an die Stelle von x_1, x_2, a_1, a_2, b_1, b_2 einzutreten hat $\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$, $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\beta_1$, $\operatorname{tg}\beta_2$. In Verhältniskoordinaten bleiben die Sätze 7 auch für Strahleninvolutionen dieselben.

15. Die Involution als projektive Verwandtschaft. Die allgemeine projektive Beziehung zweier Punktreihen, die vereinigt liegen und auf denselben Koordinatenanfangspunkt O bezogen sein mögen, hat die Gleichung (I § 65, (9)):

(36) $$a_{11} x_1 x_2 + a_{12} x_1 + a_{21} x_2 + a_{22} = 0,$$

die mit $a_{12} = a_{21}$ in (4) übergeht und dadurch in x_1 und x_2 *symmetrisch* wird.

Die Involution ist diejenige projektive Verwandtschaft zweier vereinigt gelegener Punktreihen (oder Strahlbüschel), bei welcher sich zwei Elemente vertauschbar entsprechen.[35])

Man kann sie daher auch, statt auf *zwei* vereinigt liegende, sofort auf *eine* Punktreihe beziehen.

16. Perspektive Beziehungen. Da der Begriff der Punkt- und Strahleninvolutionen auf dem der harmonischen Beziehung beruht, so ergibt sich (I § 5, 6):

Eine Strahleninvolution wird von einer beliebigen Geraden der Ebene in einer Punktinvolution geschnitten.[36])

Eine Punktinvolution wird von einem beliebigen Punkt der Ebene durch eine Strahleninvolution projiziert.

Insbesondere schneiden die durch die Gleichungen (26); (28); (30) dargestellten Strahleninvolutionen die unendlich ferne Gerade in Punktinvolutionen, deren Gleichungen dieselben sind, nur daß x, y Koordinaten des Punktes auf den unendlich fernen Geraden bedeuten (I § 23, 1).

17. Gleichungen der Involutionen in der Ebene. Sind:

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 = 0, \\ U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 = 0 \end{array}\right. \tag{37}$$

die Gleichungen zweier Punkte in der Ebene, so stellt die Gleichung:

$$U_1 + \lambda U_2 = 0 \tag{38}$$

die durch beide bestimmte Punktreihe dar (I § 20, (3)). Dabei bedeutet der Parameter λ die multiplizierte Verhältniskoordinate des laufenden Punktes der Reihe in bezug auf die beiden Grundpunkte (37). *Um die Punkte der Reihe* (38) *involutorisch aufeinander zu beziehen, dient alsdann die Gleichung* (8).

Drei Paare von Punkten der Reihe (38):

$$\begin{array}{ll} U_1 + \lambda_1 U_2 = 0, & U_1 + \lambda_2 U_2 = 0; \\ U_1 + \mu_1 U_2 = 0, & U_1 + \mu_2 U_2 = 0; \\ U_1 + \nu_1 U_2 = 0, & U_1 + \nu_2 U_2 = 0 \end{array} \tag{39}$$

sind also nach (20) in Involution[37]), wenn:

$$(\mu_1 - \nu_2)(\nu_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_2) + (\mu_2 - \nu_1)(\nu_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \mu_1) = 0. \tag{40}$$

Wenn $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = \infty$ gesetzt wird, ergibt sich hieraus im besonderen:

Die drei Paare:

$$\begin{array}{ll} U_1 = 0,\ U_2 = 0; & U_1 + \lambda_1 U_2 = 0,\ U_1 + \lambda_2 U_2 = 0; \\ & U_1 + \mu_1 U_2 = 0,\ U_1 + \mu_2 U_2 = 0 \end{array} \tag{41}$$

sind in Involution, wenn:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \mu_1 \mu_2. \tag{42}$$

Entsprechendes gilt für Strahleninvolutionen.

18. Involutionen beim vollständigen Viereck. Seien:

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = 0 \tag{43}$$

die Gleichungen der vier Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, und zwar derart normiert (I § 27, (2)), daß identisch:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0. \tag{44}$$

Dann stellen die Gleichungen:

$$V_2 + \alpha V_3 = 0, \qquad V_1 + \beta V_4 = 0 \tag{45}$$

bei willkürlichen Konstanten α, β irgend zwei Punkte P_{23} und P_{14} der

Seiten 23 und 14, also etwa die Schnittpunkte irgendeiner Geraden g mit diesen Seiten dar (Fig. 47). Dann liegen die vier Punkte:

$$(46)\quad \begin{cases} \beta(V_2+\alpha V_3)+\ \ (V_1+\beta V_4)=0, & (V_2+\alpha V_3)+\alpha(V_1+\beta V_4)=0, \\ \beta(V_2+\alpha V_3)+\alpha(V_1+\beta V_4)=0, & (V_2+\alpha V_3)+\ \ (V_1+\beta V_4)=0, \end{cases}$$

deren Gleichungen nach (44) bezüglich auch geschrieben werden können:

$$(47)\quad \begin{cases} -\beta(1-\alpha)V_3+\ \ (1-\beta)V_1=0, & (1-\alpha)V_2-\alpha(1-\beta)V_4=0, \\ \alpha(1-\beta)V_1+\beta(1-\alpha)V_2=0, & -(1-\alpha)V_3-\ \ (1-\beta)V_4=0, \end{cases}$$

wegen der Darstellung (46) auf der Verbindungslinie g der Punkte (45) und wegen der Darstellung (47) bezüglich auf den Seiten 31, 24, 12, 34. Da aber die Parameter:

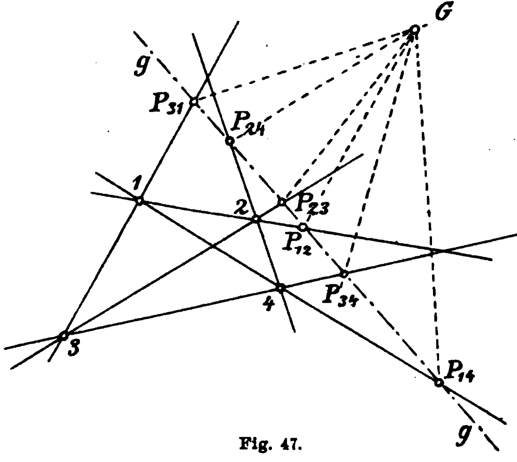


Fig. 47.

$$(48)\qquad \lambda_1=\frac{1}{\beta},\ \lambda_2=\alpha;\qquad \mu_1=\frac{\alpha}{\beta},\ \mu_2=1$$

der Punkte (46) in bezug auf die Grundpunkte (45) der Bedingung (42) entsprechen, so liegen die zwei Punktepaare P_{23}, P_{14} in (45) und $P_{31}, P_{24}, P_{12}, P_{34}$ in (46), also die Schnittpunkte von g mit den Seitenpaaren 23, 14; 31, 24 und 12, 34, in Involution.

I. *Die drei Schnittpunktpaare einer beliebigen Geraden mit den drei Gegenseitenpaaren eines vollständigen Vierecks liegen in Involution.*[38])

II. *Die drei Verbindungslinienpaare eines beliebigen Punktes mit den drei Gegeneckenpaaren eines vollständigen Vierecks liegen in Involution.*

19. Folgerung aus dem Satz über das Viereck. Verbindet man die drei Schnittpunktpaare P_{kl} des Satzes I mit einem beliebigen Punkte G der Ebene (Fig. 47), so liegen die sechs Verbindungslinien GP_{kl} nach **16** in Involution. War nun die Gerade g die unendlich ferne Gerade, so werden die Verbindungslinien GP_{kl} den gleichnamigen Seiten kl des Vierecks parallel, also:

III. *Die durch einen Punkt der Ebene zu den drei Gegenseitenpaaren des vollständigen Vierecks gezogenen Parallelen sind in Involution.*

20. Viereck mit senkrechten Gegenseiten. Eine Strahleninvolution ist nach **12**, II eine Involution rechter Winkel, sobald sich unter ihren drei Strahlenpaaren zwei rechtwinklige finden. Es folgt daher aus III (Fig. 48):

IV. *Sind zwei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks rechtwinklig (etwa 31 ⊥ 24 und 12 ⊥ 34), so ist auch das dritte Paar rechtwinklig* (23 ⊥ 14).

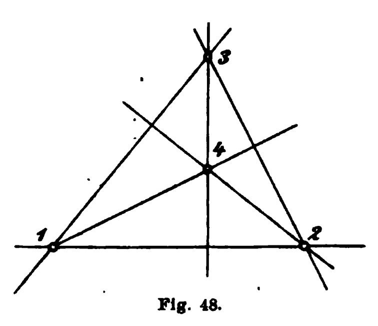


Fig. 48.

Die drei Ecken und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks bilden ein solches Viereck. Der Satz IV beweist also, daß die drei Höhen sich in einem Punkte schneiden.

21. Punktinvolution und Büschel von Punktepaaren. Sind die beiden Punktepaare a_1, a_2 und b_1, b_2, die unter 7 die Involution bestimmen sollen, durch ihre Gleichungen (§ 7, (1)):

$$(49)\quad f = a_{11}x^2 + 2a_{12}x + a_{22} = 0,\quad g = b_{11}x^2 + 2b_{12}x + b_{22} = 0$$

gegeben, so erhält die Gleichung (17) der Involution die Form:

$$(50)\quad \begin{vmatrix} x_1x_2 & x_1+x_2 & 1 \\ a_{22} & -2a_{12} & a_{11} \\ b_{22} & -2b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Immer dann und nur dann, wenn diese Bedingung (50) besteht, lassen sich zwei Größen λ und ϱ aus den drei Gleichungen bestimmen:

$$(51)\quad \begin{cases} \varrho\cdot 1 = a_{11} - \lambda b_{11}, \\ \varrho(x_1 + x_2) = -2(a_{12} - \lambda b_{12}), \\ \varrho x_1 x_2 = a_{22} - \lambda b_{22}. \end{cases}$$

Diese aber bedeuten ihrerseits, daß x_1, x_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(52)\quad (a_{11} - \lambda b_{11})x^2 + 2(a_{12} - \lambda b_{12})x + (a_{22} - \lambda b_{22}) = 0,$$

oder nach (49):

$$(53)\quad f - \lambda g = 0$$

werden.

Wenn also die Koordinaten x_1, x_2 zweier Punkte der Gleichung (50) der durch die Punktepaare (49) bestimmten Involution genügen, so sind sie bei geeignetem, eindeutig bestimmtem λ die Wurzeln der Gleichung (53); und umgekehrt, wenn die Koordinaten x_1, x_2 zweier Punkte bei beliebig gegebenem λ die Wurzeln der Gleichung (53) sind, so genügen sie der Gleichung (50).

Die bei laufendem Parameter λ durch die Gleichung (53) dargestellten Punktepaare nennt man einen *Büschel von Punktepaaren.* Danach ergibt sich:

Der Begriff der Punktinvolution deckt sich mit dem Begriff des Büschels von Punktepaaren.[39])

II. Kapitel.

Die Kurve zweiter Ordnung.

§ 9. Die allgemeine Gleichung der Kurve zweiter Ordnung in gemeinen Punktkoordinaten.

1. Gleichung in gemeinen Koordinaten. Die Gleichungen § 1, (7); § 2, (9); § 3, (8)—(10); § 4, (10) haben das gemeinsame Merkmal, daß sie in den Koordinaten vom zweiten Grade sind.

Wir betrachten daher jetzt die *allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen rechtwinkligen gemeinen Koordinaten* x, y[40]):

(1) $$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

wo die *sechs Koeffizienten* $a_{kl}(k, l = 1, 2, 3)$ beliebige reelle, nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind. Für die Bezeichnung soll immer gelten:

(2) $$a_{kl} = a_{lk}.$$

2. Gleichung in homogenen gemeinen Koordinaten. In homogenen gemeinen Koordinaten (I § 22, 1) lautet die Gleichung (1):

(3) $$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{23}yt + 2a_{31}tx + 2a_{12}xy = 0.$$

Zwischen den linken Seiten der Gleichungen (1) und (3) besteht die Beziehung:

(4) $$f(x, y, 1) = g(x, y).$$

Der Vorteil der Schreibweise (3) gegenüber (1) besteht schon äußerlich darin, daß die Gleichung (3) immer vom zweiten Grade bleibt, auch wenn a_{11}, a_{22}, a_{12} verschwinden. Während dann (1) auf den ersten Grad sinkt, erhält (3) die Form:

$$(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}t)t = 0,$$

stellt also ein Geradenpaar dar, dessen eine Gerade unendlich fern ist (I § 22, (6)).

Jede durch eine Gleichung von der Form (3) *dargestellte Kurve soll als Kurve zweiter Ordnung (Kegelschnitt) gelten.*

3. Die Ableitungen der Funktion f. Die halben partiellen Ableitungen der Funktion f in (3) bezeichnen wir zur Abkürzung mit:

(5) $$\begin{cases} f_1(x, y, t) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t, \\ f_2(x, y, t) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t, \\ f_3(x, y, t) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t. \end{cases}$$

Danach ist identisch in x, y, t:

$$(6)\qquad f_1(x,y,t)\cdot x + f_2(x,y,t)\cdot y + f_3(x,y,t)\cdot t = f(x,y,t)$$

und identisch in x, y, t und x', y', t':

$$(7)\qquad f_1(x,y,t)\cdot x' + f_2(x,y,t)\cdot y' + f_3(x,y,t)t' = f_1(x',y',t')\cdot x + f_2(x',y',t')\cdot y + f_3(x',y',t')\cdot t.$$

4. Die Ableitungen der Funktion g. Die mit $t = 1$ aus (5) entstehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit:

$$(8)\qquad \begin{cases} g_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}, \\ g_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}, \\ g_3(x,y) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}. \end{cases}$$

Mit $t = 1$ folgt daher aus (6):

$$(9)\qquad g_1(x,y)\cdot x + g_2(x,y)\cdot y + g_3(x,y) = g(x,y).$$

5. Die quadratischen Glieder von g. Die Gleichung (1) enthält drei *quadratische*, zwei *lineare* Glieder und ein *konstantes* Glied. Wir setzen zur Abkürzung:

$$(10)\qquad h(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

und bezeichnen die halben partiellen Ableitungen von h zur Abkürzung mit:

$$(11)\qquad \begin{cases} h_1(x,y) = a_{11}x + a_{12}y, \\ h_2(x,y) = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Dann ist identisch in x, y:

$$(12)\qquad h_1(x,y)\cdot x + h_2(x,y)\cdot y = h(x,y)$$

und identisch in x, y und x', y':

$$(13)\qquad h_1(x,y)\cdot x' + h_2(x,y)\cdot y' = h_1(x',y')\cdot x + h_2(x',y')\cdot y.$$

Endlich sei:

$$(14)\qquad h_3(x,y) = a_{31}x + a_{32}y.$$

6. Die Determinante der Kurve. Die aus den Koeffizienten der linearen Funktionen (5) gebildete, wegen (2) *symmetrische* (I Anm. 1, IV, 6) Determinante dritten Grades:

$$(15)\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

nennen wir die *Determinante*[41] *der Kurve* (1) oder (3). Ihre *Unterdeterminanten zweiten Grades* bezeichnen wir (I Anm. 1, II, (2)) mit:

$$(16)\qquad A_{kl} = A_{lk} = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} \end{vmatrix},$$

wo k, k_1, k_2 und l, l_1, l_2 unabhängig voneinander die Variationen: 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2 durchlaufen.

7. Transformation auf ein schiefwinkliges System. Um die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy bezogene Gleichung (1) auf ein neues *recht- oder schiefwinkliges* System $\Omega\xi\eta$ überzuführen, dessen Anfangspunkt Ω die Koordinaten x_0, y_0 hat und dessen Achsen die Richtungskosinus α_1, β_1 und α_2, β_2 haben, dienen (I § 14, (11)) die Formeln:

$$(17)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \\ y = y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta. \end{cases}$$

Die Gleichung (1) wird daher in dem neuen System:

$$(18)\qquad g(x, y) = g(x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta) = 0$$

oder nach ξ, η geordnet:

$$(19)\quad g(x, y) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{12}\xi\eta + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0,$$

wo die neuen Koeffizienten die Werte haben (vgl. (12); (13)):

$$(20)\qquad \begin{cases} a'_{11} = h(\alpha_1, \beta_1) = h_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_1 + h_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_1, \\ a'_{22} = h(\alpha_2, \beta_2) = h_1(\alpha_2, \beta_2)\alpha_2 + h_2(\alpha_2, \beta_2)\beta_2; \end{cases}$$

$$(21)\quad a'_{12} = h_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_2 = h_1(\alpha_2, \beta_2)\alpha_1 + h_2(\alpha_2, \beta_2)\beta_1;$$

$$(22)\qquad \begin{cases} a'_{13} = g_1(x_0, y_0)\alpha_1 + g_2(x_0, y_0)\beta_1 = g_1{}^0\alpha_1 + g_2{}^0\beta_1, \\ a'_{23} = g_1(x_0, y_0)\alpha_2 + g_2(x_0, y_0)\beta_2 = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2; \end{cases}$$

$$(23)\qquad a'_{33} = g(x_0, y_0) = g^0.$$

Die allgemeine *Form* der Gleichung (1) bezüglich (3) *bleibt* daher *in jedem recht- oder schiefwinkligen Koordinatensystem dieselbe.* Die *Ordnung* der Kurve ist vom Koordinatensystem *unabhängig.*[42])

8. Geometrische Bedeutung der Ordnung. Setzt man in (18) oder (19) $\eta = 0$, so erhält man in der Gleichung (§ 7, (1)):

$$(24)\qquad a'_{11}\xi^2 + 2a'_{13}\xi + a'_{33} = 0$$

das Schnittpunktpaar der Kurve (1) mit der ξ-Achse in der gemeinen Koordinate ξ auf dieser (I § 10, 2). Da aber diese Achse für (17) neben dem ursprünglichen Koordinatensystem Oxy ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

Die Kurve zweiter Ordnung wird von einer geraden Linie in zwei Punkten geschnitten.[43])

Eine *Ausnahme* tritt nur ein, wenn in (24) alle drei Koeffizienten verschwinden. Die ξ-Achse gehört dann in ihrer ganzen Ausdehnung der Kurve an.

Die Schnittpunkte der Kurve (3) *mit der unendlich fernen Geraden* ergeben sich aus (3) mit $t = 0$[9]:

$$h(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0. \tag{25}$$

Es sind ebenfalls *zwei* Punkte (§ 7, **11**).

9. Kurve zweiter Ordnung durch fünf Punkte. Die allgemeine Gleichung (1) der Kurve zweiter Ordnung ist *linear und homogen in den sechs Koeffizienten* a_{kl}. Sind daher *fünf* Punkte x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ der Kurve gegeben, so sind durch die *fünf* linearen homogenen Gleichungen $(i = 1, 2, \ldots, 5)$:

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_i y_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{13}x_i + 2a_{23}y_i + a_{33} = 0 \tag{26}$$

die fünf Verhältnisse der Koeffizienten a_{kl} bestimmt. Man erhält die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung, die durch die gegebenen Punkte geht, indem man aus den *sechs* Gleichungen (1) und (26) die Koeffizienten eliminiert (vgl. I § 19, **6**):

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Die Kurve zweiter Ordnung ist daher im allgemeinen durch fünf Punkte bestimmt.[44]

§ 10. Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve; Tangenten.

1. Gleichung des Schnittpunktepaares in gemeiner Koordinate. Neben der Kurve § 9, (1):

$$g(x, y) = 0 \tag{1}$$

sei eine *gerade Linie* durch ihre *Parameterdarstellung* (I § 16, (2)):

$$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s \tag{2}$$

gegeben, wobei $P_0 = x_0, y_0$ ein fester Punkt, α, β die Richtungskosinus der Geraden und s der relative Abstand P_0P ihres laufenden Punktes $P = x, y$ von P_0 ist (Fig. 49). Die *Gleichungen* der Linie sind:

Fig. 49.

$$x - x_0 : y - y_0 = \alpha : \beta. \tag{3}$$

Die Bedingung, daß der laufende Punkt P der Geraden (2) auf der Kurve (1) liegt[45]):

$$g(x_0 + \alpha s,\ y_0 + \beta s) = 0$$

gibt entwickelt (§ 9, (18)—(23) mit $\eta = 0$, $\xi = s$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$):

$$(4) \qquad h(\alpha, \beta)\, s^2 + 2\,(g_1{}^0\, \alpha + g_2{}^0 \beta) s + g^0 = 0.$$

Die Gleichung (4) *ist die Gleichung des Punktepaares, in dem die Gerade* (2) *die Kurve* (1) *schneidet. Ihre Wurzeln* s_1 *und* s_2 *sind die gemeinen Koordinaten der Schnittpunkte* S_1 *und* S_2 *auf der Geraden in bezug auf* P_0 (§ 7, (1)).

Die Strecke zwischen den beiden reellen oder nicht reellen[46]) Punkten S_1 und S_2 (§ 7, 4) heißt eine *Sehne* der Kurve.

2. Gleichung des Schnittpunktepaares in Verhältniskoordinate. Die Kurve (1) sei in der homogenen Form § 9, (3):

$$(5) \qquad f(x, y, t) = 0$$

dargestellt und dementsprechend die gerade Linie durch die homogenen Koordinaten x_1, y_1, t_1 und x_2, y_2, t_2 zweier fester Punkte P_1 und P_2 gegeben (Fig. 50). Ihr laufender Punkt P hat dann Koordinaten von der Form (I § 22, (24′)):

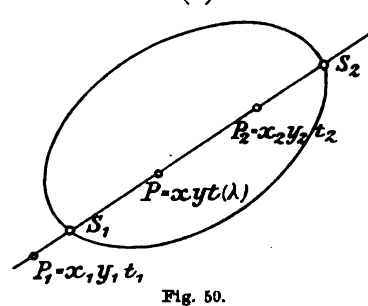


Fig. 50.

$$(6) \qquad \varrho x = x_1 + \lambda x_2,\quad \varrho y = y_1 + \lambda y_2,\quad \varrho t = t_1 + \lambda t_2,$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor und λ die multiplizierte Verhältniskoordinate des Punktes P in bezug auf P_1 und P_2 ist.

Für die Parameter der Schnittpunkte der Geraden mit der Kurve ist dann[45]):

$$f(x_1 + \lambda x_2,\ y_1 + \lambda y_2,\ t_1 + \lambda t_2) = 0$$

oder:

$$(7) \qquad f_{11} + 2 f_{12} \lambda + f_{22} \lambda^2 = 0,$$

wo:

$$(8) \qquad f_{11} = f(x_1, y_1, t_1), \quad f_{22} = f(x_2, y_2, t_2)$$

und (§ 9, (7)):

$$(9) \qquad f_{12} = f_1{}^{(1)} x_2 + f_2{}^{(1)} y_2 + f_3{}^{(1)} t_2 = f_1{}^{(2)} x_1 + f_2{}^{(2)} y_1 + f_3{}^{(2)} t_1$$

und hierin:

$$(10) \qquad f_1{}^{(1)} = f_1(x_1, y_1, t_1), \ldots, \ldots;\ f_1{}^{(2)} = f_1(x_2, y_2\ t_2), \ldots, \ldots$$

Die Gleichung (7) *ist die Gleichung des Punktepaares, in dem die Gerade* $P_1 P_2$ *die Kurve* (5) *schneidet. Ihre Wurzeln* λ_1 *und* λ_2 *sind die multiplizierten Verhältniskoordinaten der Schnittpunkte* S_1 *und* S_2 *in bezug auf* P_1 *und* P_2 (§ 7, (30)).

Mit:

(11) $x_1 = x_0,\ y_1 = y_0,\ t_1 = 1;\ x_2 = \alpha,\ y_2 = \beta,\ t_2 = 0;\ t = 1;\ \lambda = s$

geht die Darstellung (6) in (2) und die Gleichung (7) in (4) über.

3. Tangente in einem Punkte der Kurve. Eine Gerade, deren beide Schnittpunkte S_1 und S_2 mit der Kurve in einen einzigen Punkt $S_1 = S_2$ zusammenfallen, heißt eine *Tangente* der Kurve in diesem Punkte, der Punkt selbst ihr *Berührungspunkt.*

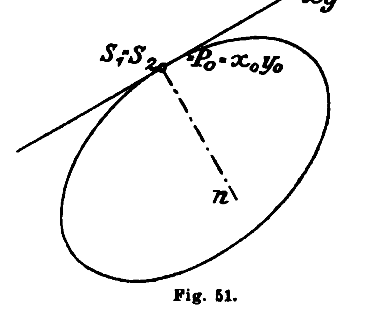


Fig. 51.

Um die Tangente in einem Punkte $P_0 = x_0, y_0$ der Kurve (1) zu erhalten, nehmen wir diesen Punkt (Fig. 51), für den:

(12) $$g^0 = g(x_0, y_0) = 0$$

ist, als Anfangspunkt der Geraden (2). Der eine der Schnittpunkte S_1 und S_2 fällt dann in P_0, indem die Gleichung (4) infolge von (12) eine Wurzel $s = 0$ gibt. Soll auch die andere Wurzel $s = 0$ werden, muß sein:

(13) $$g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta = 0.$$

Die Gerade (2) *ist also Tangente in* P_0, *wenn ihre Richtungskosinus der Bedingung* (13) *genügen.* Da aber für den laufenden Punkt x, y der Geraden die Proportion (3) gilt, so folgt für ihn die Bedingung[47]):

(14) $$g_1{}^0(x - x_0) + g_2{}^0(y - y_0) = 0.$$

Die Gleichung (14) *ist die Gleichung der Tangente der Kurve* (1) *im Punkte* x_0, y_0 *in laufenden Koordinaten* x, y.

In derselben Weise ergibt sich aus (7), daß die Verbindungslinie eines Punktes $P_1 = x_1, y_1, t_1$ der Kurve, für den somit:

(15) $$f_{11} = f(x_1, y_1, t_1) = 0,$$

mit einem Punkte $P_2 = x_2, y_2, t_2$ Tangente in P_1 wird, wenn P_2 der Bedingung genügt:

(16) $$f_{12} = f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}y_2 + f_3^{(1)}t_2 = 0$$

oder:

Die Gleichung:

(17) $$f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t = 0$$

ist die Gleichung der Tangente der Kurve (5) *im Punkte* x_1, y_1, t_1 *in laufenden Koordinaten* x, y, t.

Hieraus folgt aber mit $x_1 = x_0,\ y_1 = y_0,\ t_1 = 1;\ t = 1$ eine andere Form der Gleichung (14) (vgl. § 9, (8)):

Die Gleichung der Tangente der Kurve (1) *im Punkte* x_0, y_0 *in laufenden Koordinaten* x, y *ist auch:*

(18) $$g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0 = 0.$$

Die Gleichungen (17) und (18) gelten, wie die Entwicklungen unter 2, auch für *schiefwinklige* Koordinaten x, y, t oder x, y.

4. Normale der Kurve. Die auf der Tangente (14) oder (18) im Punkte x_0, y_0 senkrecht stehende *Normale n der Kurve* (Fig. 51) hat die Gleichung:

(19) $$x - x_0 : y - y_0 = g_1^0 : g_2^0.$$

5. Tangentenpaar von einem Punkte an die Kurve. Die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 der Geraden (2) mit der Kurve (1) fallen bei beliebiger Lage von P_0 zusammen (Fig. 52), wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (4) gleich sind, also:

(20) $$g^0 h(\alpha, \beta) - (g_1^0 \alpha + g_2^0 \beta)^2 = 0.$$

Da diese Gleichung in $\alpha : \beta$ quadratisch ist, so gibt es zwei durch den Punkt x_0, y_0 an die Kurve laufende Tangenten. Der laufende Punkt x, y einer solchen Tangente genügt nach (3) der Gleichung:

(21) $$g^0 h(x - x_0, y - y_0) - (g_1^0(x - x_0) + g_2^0(y - y_0))^2 = 0.$$

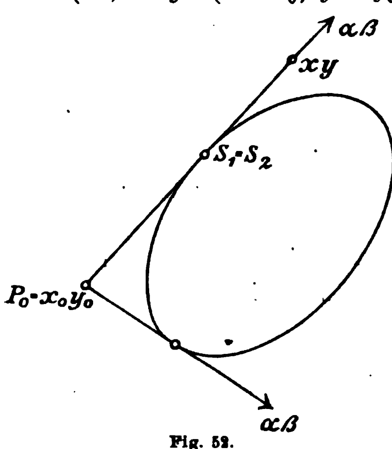


Fig. 52.

Die Gleichung (21) *ist daher die Gleichung des Tangentenpaares, das vom Punkte* x_0, y_0 *an die Kurve* (1) *gelegt ist.*[48])

In entsprechender Weise bedeutet das Verschwinden der Determinante des Punktepaares (7):

(22) $$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0,$$

daß die Verbindungslinie des Punktes P_1 mit dem Punkte P_2 (Fig. 50) eine Tangente ist. Läßt man daher den Index 2 fort, so ergibt sich:

Das vom Punkte x_1, y_1, t_1 *an die Kurve* (5) *gelegte Tangentenpaar hat in laufenden Koordinaten* x, y, t *die Gleichung:*

(23) $$f_{11} f(x, y, t) - (f_1^{(1)} x + f_2^{(1)} y + f_3^{(1)} t)^2 = 0.$$

Hieraus folgt mit $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $t_1 = 1$; $t = 1$ mit Rücksicht auf (8); (10) und § 9, (4); (8) eine andere Form der Gleichung (21):

Das vom Punkte x_0, y_0 *an die Kurve* (1) *gelegte Tangentenpaar hat in laufenden Koordinaten* x, y *die Gleichung:*

(24) $$g^0 g(x, y) - (g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0)^2 = 0.$$

6. Begriff des Doppelpunktes der Kurve. Wenn neben (12) die Bedingung (13) identisch in $\alpha:\beta$ erfüllt ist, *schneidet jede durch den Punkt* x_0, y_0 *der Kurve gehende Gerade die Kurve in zwei zusammenfallenden Punkten und ist in diesem Sinne Tangente.* Der Punkt heißt dann ein *Doppelpunkt* oder *singulärer Punkt* der Kurve.

Die *Bedingungen des Doppelpunktes* sind somit:

$$g_1{}^0 = 0,\ g_2{}^0 = 0,\ g^0 = 0 \tag{25}$$

oder nach § 9, (9):

$$g_1{}^0 = 0,\ g_2{}^0 = 0,\ g_3{}^0 = 0. \tag{26}$$

Für homogene Koordinaten muß neben (15) die Gleichung (16) identisch in $x_2 : y_2 : t_2$ bestehen, wenn der Punkt x_1, y_1, t_1 der Kurve ein Doppelpunkt sein soll. Es müssen daher die Gleichungen:

$$f_1{}^{(1)} = 0,\ f_2{}^{(1)} = 0,\ f_3{}^{(1)} = 0 \tag{27}$$

bestehen, die nach § 9, (6) schon die Gleichung (15) zur Folge haben. Sie gehen mit (11) in (26) über, sind aber insofern allgemeiner, als sie auch *unendlich ferne* Punkte zulassen (I § 22, 5). Wir sagen daher unter Weglassung der Indizes 0 und 1 überhaupt[49]):

Ein Punkt x, y, t *ist Doppelpunkt der Kurve* (5), *wenn er den Bedingungen entspricht* (§ 7, (16)):

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t = 0, \\ f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t = 0, \\ f_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t = 0. \end{cases} \tag{28}$$

§ 11. Konjugierte Gerade, Mittelpunkt, harmonische Pole und Polare eines Punktes.

1. Mittelpunkt und Richtung einer Sehne. Die quadratische Gleichung § 10, (4) hat zwei entgegengesetzt gleiche endliche Wurzeln, wenn:

$$g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta = 0, \tag{1}$$

ohne daß $h(\alpha, \beta)$ verschwindet. Der Punkt P_0 ist dann (§ 7, (23)) der Mittelpunkt der Sehne S_1S_2 (Fig. 53).

Fig. 53.

Zwischen dem Mittelpunkt x_0, y_0 *und der Richtung* α, β *einer Sehne besteht daher die Beziehung* (1).

2. Die einer Richtung konjugierte Gerade. Bei fester Richtung α, β ist (1) eine lineare Gleichung für x_0, y_0 (§ 9, (22); (8)). Es folgt daher mit Unterdrückung des Index 0:

Der Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Sehnen von gegebener Richtung α, β ist eine gerade Linie:

$$\alpha g_1(x, y) + \beta g_2(x, y) = 0, \tag{2}$$

welche die der Richtung α, β konjugierte Gerade heißt.[50])

Ihre Gleichung kann nach § 9, (8); (11); (14) auch in der Form:

$$\alpha h_1(x, y) + \beta h_2(x, y) + h_3(\alpha, \beta) = 0$$

oder nach § 9, (13) in der Form:

$$h_1(\alpha, \beta)x + h_2(\alpha, \beta)y + h_3(\alpha, \beta) = 0 \tag{3}$$

geschrieben werden.

3. Sehne von gegebenem Mittelpunkt. Bei festem Punkte x_0, y_0 bestimmt die Gleichung (1), wenn $g_1{}^0$ und $g_2{}^0$ nicht beide verschwinden, die Richtung α, β der Sehne, so daß sich mit Rücksicht auf § 10, (3) ergibt:

Ein gegebener Punkt x_0, y_0 ist im allgemeinen (vgl. jedoch 4) der Mittelpunkt einer bestimmten Sehne, deren Gleichung lautet:

$$g_1{}^0(x - x_0) + g_2{}^0(y - y_0) = 0 \tag{4}$$

oder nach § 9, (9):

$$g_1{}^0 x + g_2{}^0 y + g_3{}^0 - g^0 = 0. \tag{5}$$

Mit $g^0 = 0$ wird diese Sehne die Tangente § 10, (18) im Punkte x_0, y_0.

4. Der Mittelpunkt der Kurve. Wenn die Gleichung (1) identisch in $\alpha:\beta$ erfüllt ist, also (vgl. § 7, (22)):

$$g_1{}^0 = 0, \quad g_2{}^0 = 0 \tag{6}$$

ist, so *wird der Punkt x_0, y_0 Mittelpunkt jeder durch ihn gehenden Sehne.* Ein solcher Punkt heißt *Mittelpunkt der Kurve.*[6])

Mit Unterdrückung des Index 0 sagen wir:

Ein Punkt x, y ist Mittelpunkt der Kurve (1), wenn er den Bedingungen entspricht:

$$\begin{cases} g_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ g_2(x, y) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

5. Harmonische Pole. Wenn in der quadratischen Gleichung § 10, (7) der mittlere Koeffizient:

$$f_{12} = 0 \tag{8}$$

ist, so sind die beiden Punkte P_1, P_2, auf die sich die Verhältniskoordinate λ bezieht, nach § 8, (21) zu dem Schnittpunktepaar S_1, S_2 *harmonisch.* Die Gleichung (8) kann nach § 10, (9) auch in den beiden Formen (vgl. § 8, (9)):

$$f_1{}^{(1)}x_2 + f_2{}^{(1)}y_2 + f_3{}^{(1)}t_2 = f_1{}^{(2)}x_1 + f_2{}^{(2)}y_1 + f_3{}^{(2)}t_1 = 0 \tag{9}$$

geschrieben werden und ist in den Koordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2 symmetrisch.

Zwei durch die Bedingung (8) *oder* (9) *verknüpfte Punkte* P_1 *und* P_2 *sind also zu den Punkten* S_1 *und* S_2, *in denen ihre Verbindungslinie die Kurve schneidet, harmonisch.* Man nennt sie *harmonische Pole* in bezug auf die Kurve.[51])

Ist P_1 *endlich*, kann man $t_1 = 1$ nehmen und erhält statt (9):

$$(10) \qquad g_1^{(1)}x_2 + g_2^{(1)}y_2 + g_3^{(1)}t_2 = f_1^{(2)}x_1 + f_2^{(2)}y_1 + f_3^{(2)} = 0.$$

Bei *endlichem* P_2 kann man hier auch $t_2 = 1$ setzen, bei *unendlich fernem* P_2 aber lautet die Bedingung (10) mit $x_2 = \alpha_2$, $y_2 = \beta_2$, $t_2 = 0$ (I § 22, (13)) mit Rücksicht auf § 9, (5); (11); (14):

$$(11) \qquad g_1^{(1)}\alpha_2 + g_2^{(1)}\beta_2 = h_1(\alpha_2\beta_2)x_1 + h_2(\alpha_2\beta_2)y_1 + h_3(\alpha_2\beta_2) = 0.$$

Sind beide Punkte unendlich fern, $x_1 : y_1 : t_1 = \alpha_1 : \beta_1 : 0$ und $x_2 : y_2 : t_2 = \alpha_2 : \beta_2 : 0$, so sind sie nach (9) harmonische Pole unter der Bedingung:

$$(12) \qquad h_1(\alpha_1\,\beta_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1)\beta_2 = h_1(\alpha_2\beta_2)\alpha_1 + h_2(\alpha_2\beta_2)\beta_1 = 0.$$

6. Involution harmonischer Pole. Auf einer bestimmten Geraden, die die Kurve in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet, bestimmt die Kurve eine *Involution harmonischer Pole*[52]), den Inbegriff aller Punktepaare, die zu S_1 und S_2 harmonisch, also in bezug auf die Kurve harmonische Pole sind (§ 8, **5**).

Da die Schnittpunkte S_1 und S_2 durch die Gleichungen § 10, (4) und (7) bestimmt werden, lautet die *Gleichung der entsprechenden Involution harmonischer Pole:*

$$(13) \qquad h(\alpha, \beta)\, s's'' + (g_1^0\alpha + g_2^0\beta)(s' + s'') + g^0 = 0$$

oder:

$$(14) \qquad f_{11} + f_{12}(\lambda' + \lambda'') + f_{22}\lambda'\lambda'' = 0,$$

wo s', s'' gemeine und λ', λ'' multiplizierte Verhältniskoordinaten entsprechender Punkte der Involution sind (§ 8, (4); (8)).

7. Die Polare eines Punktes. Nach (9) *ist der Ort aller harmonischen Pole* P_2 *eines Punktes* P_1 *eine Gerade, welche die Polare des Punktes* P_1 *heißt.*[53])

Die Polare eines Punktes $P_1 = x_1, y_1, t_1$ *in bezug auf die Kurve* § 10, (5) *hat in laufenden Koordinaten* x, y, t *die Gleichung:*

$$(15) \qquad f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t = 0,$$

der man für einen endlichen Punkt $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $t_1 = 1$ auch die Form geben kann:

$$(16) \qquad g_1^0x + g_2^0y + g_3^0t = 0.$$

8. Konstruktion der Polare. Als Ort aller harmonischen Pole von P_1 ist *die Polare die Verbindungslinie zweier harmonischen Pole* Q_1 und Q_2 von P_1. Zwei beliebige durch P_1 gelegte Strahlen bestimmen nun in ihren vier Schnittpunkten S_1, S_2 und S_3, S_4 mit der Kurve (Fig. 54) ein *vollständiges Viereck.* Die eine Nebenecke dieses Vierecks ist P_1, die Verbindungslinie der beiden anderen Nebenecken R_1 und R_2 ist die Polare von P_1.[54]) Denn sie schneidet die beiden Seiten S_1S_2 und S_3S_4 des Vierecks in zwei Punkten Q_1 und Q_2, von

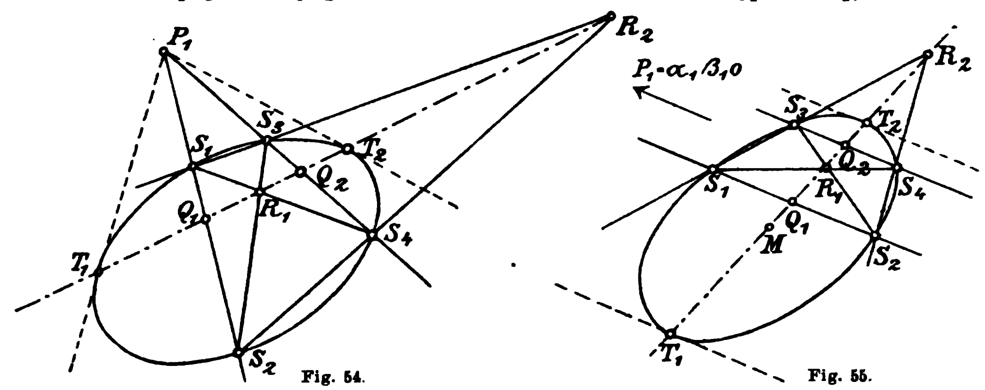


Fig. 54. Fig. 55.

denen jeder zu den beiden auf der Seite liegenden Ecken S_1, S_2, bezüglich S_3, S_4, und der auf ihr liegenden Nebenecke P_1 harmonisch ist (I § 27, 4, I).

Liegt P_1 unendlich fern, so werden die Seiten S_1S_2 und S_3S_4 parallel (Fig. 55).

9. Polare und Tangente. Der Punkt P_1 liegt immer dann und nur dann *selbst auf seiner Polare* (15), wenn (§ 9, (6)):

$$(17) \qquad f_1^{(1)}x_1 + f_2^{(1)}y_1 + f_3^{(1)}t_1 = f(x_1, y_1, t_1) = 0,$$

also wenn er *auf der Kurve* liegt (vgl. § 8, **3**). Die Polare (15) ist dann nach § 10, (17) die Tangente in dem Punkte.[55]) Es gelten also die Sätze:

I. *Ein Punkt liegt immer dann und nur dann mit seiner Polare vereinigt, wenn er ein Punkt der Kurve ist;* oder:

II. *Ein Punkt ist immer dann und nur dann sein eigener harmonischer Pol, wenn er auf der Kurve liegt.*

III. *Die Polare eines Punktes der Kurve ist seine Tangente.*

Vorausgesetzt ist dabei, daß der Punkt eine bestimmte Polare hat.

10. Polare und Tangentenpaar. Die Schnittpunkte T_1 und T_2 der Polare (15) des Punktes P_1 mit der Kurve genügen den beiden Gleichungen:

(18) $$f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t = 0, \quad f(x, y, t) = 0,$$

also auch der Gleichung § 10, (23) des Tangentenpaares vom Punkte P_1 an die Kurve:

(19) $$f_{11}f(x, y, t) - (f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t)^2 = 0,$$

und umgekehrt genügen die gemeinsamen Punkte des Tangentenpaares (19) und der Kurve $f(x, y, t) = 0$ der Gleichung (15). Also (Fig. 54):

Die Schnittpunkte T_1, T_2 der Polare des Punktes P_1 mit der Kurve sind die Berührungspunkte der von P_1 an die Kurve gelegten Tangenten.

11. Polare und konjugierte Gerade. Die Polare des unendlich fernen Punktes $\alpha, \beta, 0$ (Fig. 55) ist nach (11):

(20) $$h_1(\alpha, \beta)x + h_2(\alpha, \beta)y + h_3(\alpha, \beta) = 0,$$

also die Gerade (3):

Die Polare des in der Richtung α, β unendlich fernen Punktes ist die der Richtung konjugierte Gerade.

12. Polare des Mittelpunktes. Da für den Mittelpunkt der Kurve die Bedingungen (6) bestehen, so folgt aus (16), falls nicht auch $g_3{}^0 = 0$ (§ 10, (26)) ist:

Die Polare des Mittelpunktes ist, wenn er kein Doppelpunkt ist, die unendlich ferne Gerade.[6])

13. Die Koordinaten der Polare. Da die Koeffizienten der Gleichung (15) die Koordinaten der Polare des Punktes P_1 sind, so folgt mit Weglassung des Index 1:

Die Koordinaten der Polare des Punktes x, y, t sind:

(21) $$\begin{cases} \varrho u = f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t, \\ \varrho v = f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t, \\ \varrho s = f_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}t, \end{cases}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Mit Rücksicht auf § 10, (28) folgt dabei:

Jeder Punkt x, y, t, der nicht Doppelpunkt der Kurve ist, hat eine bestimmte Polare.

14. Beziehung der Polaren zweier harmonischer Pole. Die Doppelform (9) der Bedingung zweier harmonischer Pole hat mit Rücksicht auf (15) die Bedeutung:

I. *Von zwei harmonischen Polen liegt jeder auf der Polare des andern;* oder:

II. *Liegt der Punkt P_2 in der Polare p_1 des Punktes P_1, so geht die Polare p_2 von P_2 durch P_1* (Fig. 56).

Hieraus folgt nach **9**, III:

III. *Die Polare* p_1 *eines Punktes* P_1 *einer Tangente* t *geht stets durch deren Berührungspunkt* T (Fig. 56).

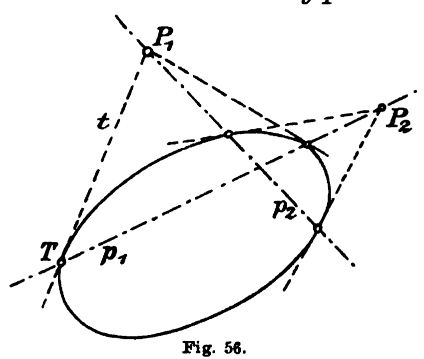


Fig. 56.

Ferner in Rücksicht auf **12**:

IV. *Die Polare eines unendlich fernen Punktes geht durch den Mittelpunkt* (M in Fig. 55).

Dieser ist der Schnittpunkt der Polaren zweier unendlich ferner Punkte.

15. Polaren der Punkte einer Punktreihe. Die Polaren p_1 und p_2 zweier Punkte $P_1 = x_1, y_1, t_1$ und $P_2 = x_2, y_2, t_2$ sind nach (15):

$$(22)\quad X_1 = f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t = 0, \quad X_2 = f_1^{(2)}x + f_2^{(2)}y + f_3^{(2)}t = 0,$$

wo X_1, X_2 (I § 18, (10)) als Abkürzungen für die linken Seiten dienen. Die Polare irgendeines Punktes:

$$P = x_1 + \lambda x_2,\ \ y_1 + \lambda y_2,\ \ t_1 + \lambda t_2$$

der Verbindungslinie $P_1 P_2$ (I § 22, (24')) ist mit Rücksicht auf die Bedeutung § 9, (5) der in x, y, t linearen Ausdrücke $f_k(x, y, t)$:

$$(f_1^{(1)} + \lambda f_1^{(2)})x + (f_2^{(1)} + \lambda f_2^{(2)})y + (f_3^{(1)} + \lambda f_3^{(2)})t = 0$$

oder:

$$(23)\qquad X_1 + \lambda X_2 = 0.$$

Daraus ergibt sich (I § 66, **1**):

I. *Die Polaren der Punkte einer Punktreihe bilden einen ihr projektiven Strahlbüschel*[56]); oder abgekürzt:

II. *Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um einen Punkt.*

III. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die beiden Geraden (22) zwei bestimmte und getrennte Geraden sind.

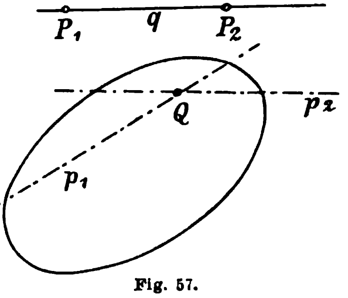


Fig. 57.

16. Der Pol einer Geraden. Unter der gleichen Voraussetzung entspricht daher einer Geraden q der Ebene ein Punkt Q, durch den die Polaren aller Punkte der Geraden gehen und der der *Pol der Geraden* heißt.[57])

I. *Der Pol* Q *einer Geraden* q *ist der Schnittpunkt der Polaren* p_1, p_2 *zweier Punkte* P_1, P_2 *der Geraden* (Fig. 57).

II. *Die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen durch deren Pol.*

Da hiernach der Pol Q der Geraden q auf den Polaren p_1, p_2 zweier Punkte P_1, P_2 von q liegt (Fig. 57), so geht nach **14**, II die Polare von Q durch jeden der Punkte P_1, P_2, ist also q selbst:

III. *Eine Gerade ist die Polare ihres Poles,* oder:

IV. *Der Pol einer Geraden ist der Punkt, dessen Polare sie ist.*

17. Pol und Berührungspunkt. Um den Pol der Tangente q_0 im Punkt Q_0 der Kurve zu finden, hat man nach **16**, I die Polare zweier Punkte P_1, P_2 von q_0 zum Durchschnitt zu bringen, wobei man $P_1 = Q_0$ wählen kann. Die Polare von Q_0 ist nach **9**, III q_0 selbst, und die Polare p_2 von P_2 geht nach **14**, III durch Q_0, so daß Q_0 der Schnittpunkt von q_0 und p_2 ist:

Der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt.

18. Die Koordinaten des Poles. Sind u, v, s die Koordinaten der Geraden p und x_1, y_1, t_1 und x_2, y_2, t_2 die Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 der Geraden, so ist (I § 22, (15)):

$$(24)\qquad u:v:w = \begin{vmatrix} y_1 & t_1 \\ y_2 & t_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} t_1 & x_1 \\ t_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Für die Koordinaten des Poles P, des Schnittpunktes der Geraden (22), ist (I § 22 (15')):

$$(25)\qquad x:y:t = \begin{vmatrix} f_2^{(1)} & f_3^{(1)} \\ f_2^{(2)} & f_3^{(2)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_3^{(1)} & f_1^{(1)} \\ f_3^{(2)} & f_1^{(2)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

oder nach dem Multiplikationssatz der Determinanten (I Anm. 1, V, 2, (3)) mit einem Proportionalitätsfaktor σ (§ 9, (16)):

$$(26)\qquad \begin{cases} \sigma x = F_1 = A_{11}u + A_{21}v + A_{31}s, \\ \sigma y = F_2 = A_{12}u + A_{22}v + A_{32}s, \\ \sigma t = F_3 = A_{13}u + A_{23}v + A_{33}s. \end{cases}$$

Für die Koordinaten x, y, t des Poles einer Geraden u, v, s gelten die Formeln (26).

Jede Gerade u, v, s, für welche die hierin nach Analogie von § 9, (5) *mit F_k bezeichneten linearen Funktionen ihrer Koordinaten u, v, s nicht sämtlich verschwinden, hat einen bestimmten Pol.*

Wenn die Determinante A (§ 9, (15)) $\neq 0$ ist, sind die Gleichungen (26) die Auflösungen (I Anm. 2, II, 2) der Gleichungen (21), entsprechend dem Satze 16, III.

Wenn $A = 0$, können die Gleichungen (26) noch den Pol der Geraden u, v, s bestimmen, ohne mehr Auflösungen von (21) zu sein.

19. Die Gleichung des Poles. Wir entnahmen die Koordinaten (21) der Polare aus der Gleichung (15) mit Weglassung des Index 1.

Umgekehrt können wir aus den Koordinaten (26) des Poles unter Hinzufügung des Index 1 die Gleichung entnehmen:

Die Gleichung des Poles der Geraden $p_1 = u_1, v_1, s_1$ *in bezug auf die Kurve* § 10, (5) *lautet in laufenden Linienkoordinaten* u, v, s:

$$F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}s = 0, \tag{27}$$

wo $F_k^{(1)}$ im Sinne von § 10, (10) aus (26) zu bilden ist.

20. Konjugierte Punkte und Gerade. Geht eine Gerade $p_2 = u_2, v_2, s_2$ durch den Pol der Geraden p_1, so genügt sie der Gleichung (27), so daß:

$$F_1^{(1)}u_2 + F_2^{(1)}v_2 + F_3^{(1)}s_2 = 0. \tag{28}$$

Diese Gleichung kann aber mit Rücksicht auf die Bedeutung (26) der F_k, entsprechend § 9, (7), in der Form geschrieben werden:

$$F_1^{(2)}u_1 + F_2^{(2)}v_1 + F_3^{(2)}s_1 = 0, \tag{29}$$

ist also in u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2 symmetrisch. Daher geht p_1 durch den Pol von p_2.

Wie also die Gleichung (9) nach **14**, I die Beziehung *zweier Punkte* P_1 *und* P_2 *ausdrückt, von denen jeder mit der Polare des andern vereinigt liegt*, so die Gleichung (28) oder (29) die Beziehung *zweier Geraden* p_1 *und* p_2, *von denen jede mit dem Pol der andern vereinigt liegt.*

Wir nennen zwei solche Punkte P_1 und P_2, ebenso zwei solche Geraden p_1 und p_2 in *bezug auf die Kurve konjugiert.*

Konjugierte Punkte bedeutet dasselbe wie harmonische Pole.

§ 12. Die Gleichungen des Kreises.

1. Die Normalform der Gleichung des Kreises. *Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt* $M = a, b$ *und dem Radius* r *lautet* (I § 12, (8)):

$$k(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0 \tag{1}$$

oder entwickelt:

$$k(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by + e = 0, \quad e = a^2 + b^2 - r^2, \tag{2}$$

wo $k(x, y)$, wie § 9, (1), als Abkürzung für die linke Seite der Gleichung dient.

Man nennt die Gleichung in der vorliegenden Form, *wo der Koeffizient von* $x^2 + y^2$ *die Einheit ist, die Normalform* der Gleichung des Kreises.[58])

2. Quadratische Gleichung der Schnittpunkte mit einer Geraden. Die für die Kurve $g = 0$ § 9, (1) mit g_1, g_2, g_3, h bezeichneten Ausdrücke § 9, (8); (10) sind hier:

$$(3) \quad g_1 = k_1 = x - a, \quad g_2 = k_2 = y - b, \quad g_3 = k_3 = -ax - by + e;$$
$$h(x, y) = x^2 + y^2.$$

Für zwei Richtungskosinus α, β ist daher (I § 11, (12)):

$$(4) \qquad h(\alpha, \beta) = 1.$$

Aus § 10, (4) folgt alsdann:

Die gerade Linie:

$$(5) \qquad x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s$$

schneidet den Kreis (1) *in zwei Punkten* S_1 *und* S_2, *deren gemeine Koordinaten* s_1 *und* s_2 *in bezug auf den Punkt* $P_0 = x_0, y_0$ *die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:*

$$(6) \qquad s^2 + 2\{(x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta\} s + k(x_0, y_0) = 0.$$

3. Begriff der Potenz eines Punktes. Das Produkt der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (6):

$$(7) \qquad s_1 s_2 = k(x_0, y_0),$$

ist nur von a, b, r; x_0, y_0 abhängig, aber *unabhängig von* α, β. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Wurzeln (§ 10, 1) als relativer Abstände der Punkte S_1 und S_2 von P_0 (Fig. 58):

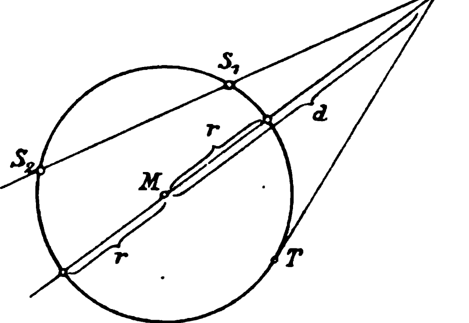


Fig. 58.

Sind S_1 *und* S_2 *die Schnittpunkte des Kreises mit einer durch den Punkt* $P_0 = x_0, y_0$ *gehenden Geraden von wechselnder Richtung, so hat das Produkt der relativen Abstände* $P_0 S_1$ *und* $P_0 S_2$ *einen unveränderlichen Wert:*

$$(8) \qquad P_0 S_1 \cdot P_0 S_2 = k(x_0, y_0).$$

Dieser dem Punkt P_0 eigentümliche Wert heißt *die Potenz des Punktes* P_0 *in bezug auf den Kreis.*[59])

4. Besondere Darstellungen der Potenz. Ist $P_0 M = d$ die Zentraldistanz des Punktes P_0, so ist:

$$(9) \qquad (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = d^2,$$

also nach (1):

$$(10) \qquad k(x_0, y_0) = d^2 - r^2.$$

Die Potenz (8) *des Punktes* P_0 *ist die Differenz der Quadrate der Zentraldistanz* $P_0 M$ *und des Radius.*

Indem man andererseits die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 im Berührungspunkt T einer von P_0 an die Kurve gelegten Tangente zusammenfallen läßt, erhält man aus (8):

$$P_0T \cdot P_0T = k(x_0, y_0). \tag{11}$$

Die Potenz des Punktes P_0 ist das Quadrat der Länge der von P_0 an den Kreis gelegten Tangente.

5. Abhängigkeit der Potenz von der Lage des Punktes. Indem wir den Index 0 fallen lassen, wiederholen wir die Sätze über die Potenz in folgender Form:

Wird die linke Seite $k(x, y)$ der Normalgleichung (1) *des Kreises für einen beliebigen Punkt $P = x, y$ der Ebene gebildet, so gibt sie den Wert der Potenz des Punktes P in bezug auf den Kreis an:*

$$k(x, y) = PS_1 \cdot PS_2 = d^2 - r^2 = (PT)^2. \tag{12}$$

Die Potenz ist als Produkt der relativen Längen PS_1 und PS_2 oder als Differenz $d^2 - r^2$ *positiv* oder *negativ*, je nachdem P *außerhalb* oder *innerhalb* des Kreises liegt (Fig. 59).

Für die *Punkte des Kreises selbst* ist die Potenz *Null.*

Die *Potenz des Mittelpunktes M* ist:

$$k(a, b) = -r^2. \tag{13}$$

Bei negativer Potenz ist die Tangentenlänge PT nicht reell.

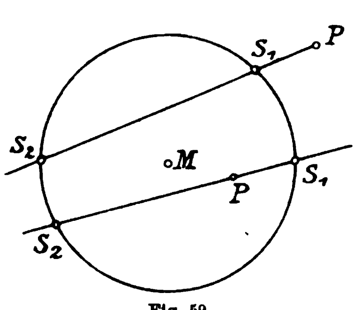


Fig. 59.

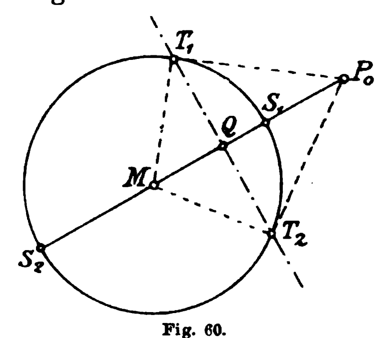


Fig. 60.

6. Tangente und Polare beim Kreise. Mittels der Ausdrücke (3) ergibt sich aus § 10, (14):

Die Tangente des Kreises (1) *im Punkte $P_0 = x_0, y_0$ hat die Gleichung:*

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0 \tag{14}$$

oder auch nach § 10, (18):

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - r^2 = 0. \tag{15}$$

Für die *Polare* eines Punktes P_0 in bezug auf den Kreis ergibt sich aus § 11, (16) ebenfalls die Gleichung (15).

Da die Koeffizienten von x, y in dieser den Richtungskosinus der Zentrallinie MP_0 proportional sind (I § 12, (8)), so folgt (I § 17, (6)):

Die Polare $T_1 T_2$ des Punktes P_0 (Fig. 60) *steht auf der Zentrallinie MP_0 (die Tangente auf dem Radius) senkrecht.*

Die Punkte $P_0, Q; S_1, S_2$ auf MP_0, unter Q den Schnittpunkt von Zentrallinie und Polare verstanden, sind harmonisch (Fig. 60).

7. Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen. *Der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen des Kreises von gegebener Richtung α, β* ist nach § 11, (2) mit den Werten (3):

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) = 0. \tag{16}$$

also *der zur Richtung α, β senkrechte Durchmesser* (I § 16, (17); § 17, (6)).

8. Der Nullkreis. Mit Rücksicht auf (3) und (1) lauten die Bedingungen des Doppelpunktes § 10, (25) beim Kreise:

$$x = a, \quad y = b, \quad r = 0. \tag{17}$$

Der Kreis hat einen *Doppelpunkt*, seinen *Mittelpunkt*, wenn sein *Radius verschwindet.*

Der Kreis mit verschwindendem Radius:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \tag{18}$$

ist aber nach § 7, (39) der *Punktkreis* oder *Nullkreis* oder das *Kreisstrahlenpaar;* er zerfällt in die *imaginären Linien:*

$$(x - a) + i(y - b) = 0, \quad (x - a) - i(y - b) = 0. \tag{19}$$

9. Die allgemeine Gleichung des Kreises. Im Gegensatz zur Normalgleichung bilden wir mit vier beliebigen Konstanten A, B, C, D die *allgemeine Gleichung des Kreises:*

$$C(x^2 + y^2) - 2Ax - 2By + D = 0. \tag{20}$$

Sie kann auf die Form (1) oder (2) gebracht werden mit:

$$a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C}; \quad e = \frac{D}{C}, \quad r^2 = \frac{A^2 + B^2 - CD}{C^2}. \tag{21}$$

Sie stellt daher für $C \neq 0$ einen *reellen Kreis* oder einen *Punktkreis* oder einen *imaginären Kreis* dar, je nachdem:

$$A^2 + B^2 - CD > 0, \quad = 0 \quad \text{oder} < 0. \tag{22}$$

In homogener Form:

$$C(x^2 + y^2) - 2Axt - 2Byt + Dt^2 = 0 \tag{23}$$

umfaßt sie außerdem für $C = 0$ ein *Geradenpaar, das aus einer endlichen Geraden:*

(24) $$2Ax + 2By - Dt = 0$$

und der unendlich fernen Geraden $t = 0$ besteht, und für $C = 0$, $A = 0$, $B = 0$ die *doppelte unendlich ferne Gerade.*

Im ersten Falle ist der *Mittelpunkt* a, b nach (21) in der Richtung $A : B$ *unendlich fern,* im zweiten *unbestimmt.*

10. Die imaginären Kreispunkte. Für $C \neq 0$, also wenn die unendlich ferne Gerade $t = 0$ der Kurve (23) nicht ganz angehört, schneidet sie den Kreis in dem Punktepaar:

(25) $$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = 0, \quad t = 0 \quad \text{oder} \quad x : y : t = 1 : \pm i : 0,$$

das von den Konstanten des Kreises ganz unabhängig ist.

Alle Kreise schneiden die unendlich ferne Gerade in demselben imaginären Punktepaar, den „imaginären Kreispunkten".[60])

11. Die Gleichung des Kreises in Linienkoordinaten. Eine Tangente des Kreises ist dadurch gekennzeichnet, daß ihr senkrechter Abstand vom Mittelpunkt M gleich dem Radius r ist. Hat nun eine Gerade die homogenen Koordinaten u, v, s (I § 22, 1), so ist ihr Abstand δ vom Punkte $M = a, b$, abgesehen vom Vorzeichen (I § 19, (17)):

(26) $$\delta = \frac{au + bv + s}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Die Bedingung, daß die Gerade Tangente des Kreises (1) ist, wird daher:

$$\frac{(au + bv + s)^2}{u^2 + v^2} = r^2,$$

oder:

Die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt a, b *und dem Radius* r *in laufenden Linienkoordinaten* u, v, s *lautet*[61]):

(27) $$(au + bv + s)^2 - (u^2 + v^2)r^2 = 0.$$

Mit $r = 0$ stellt diese Gleichung, deren linke Seite dann ein vollständiges Quadrat wird, den doppelt gerechneten Mittelpunkt in Linienkoordinaten dar (I § 22, (2')).

12. Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte. Soll der Kreis (20) durch drei gegebene (endliche) Punkte x_i, y_i ($i = 1, 2, 3$) gehen, müssen die drei Konstantenverhältnisse $C : A : B : D$ den drei Gleichungen genügen:

(28) $$C(x_i^2 + y_i^2) - 2Ax_i - 2By_i + D = 0.$$

Die Gleichung des dem Dreieck x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 *umbeschriebenen Kreises (Umkreises) ist:*

$$(29) \qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die *fünf* Punkte, die nach § 9, **9** einen Kegelschnitt bestimmen, kommen hier auf *drei* zurück, weil der Kreis als solcher nach **10** schon durch die beiden imaginären Kreispunkte geht.

§ 13. Tangenten der Ellipse, Hyperbel und Parabel.

1. Vereinigte Gleichung der Ellipse und Hyperbel. In die Gleichung der *Ellipse* (§ 1, (13)):

$$(1) \qquad g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

begreifen wir zugleich die *Hyperbel* (§ 1, (13')) und die *„imaginäre Ellipse“* [62]) ein, indem wir das Vorzeichen von b^2 oder von a^2 und b^2 als umkehrbar vorbehalten.

Die in § 9, **4**; **5** eingeführten Abkürzungen werden für die Gleichung (1):

$$(2) \qquad g_1(x, y) = h_1(x, y) = \frac{x}{a^2}, \quad g_2(x, y) = h_2(x, y) = \frac{y}{b^2},$$

$$g_3(x, y) = -1; \; h(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Der Anfangspunkt $x = 0$, $y = 0$ ist nach § 11, (6) der *Mittelpunkt* (§ 1, **5**). Ein *Doppelpunkt* ist nach § 10, (26) nicht vorhanden.

2. Gleichung der Tangente. Aus § 10, (18) folgt als *Gleichung der Tangente der Kurve* (1) *im Punkte* x_0, y_0:

$$(3) \qquad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1 = 0,$$

wobei (§ 10, (12)):

$$(4) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Für *die Richtungskosinus* α_0, β_0 *und die absolute Länge* p_0 *des vom Mittelpunkt O auf die Tangente gefällten Perpendikels* ergibt sich daher (I § 17, (6); (9)):

$$(5) \qquad \alpha_0 = \frac{p_0 x_0}{a^2}, \quad \beta_0 = \frac{p_0 y_0}{b^2},$$

$$(6) \qquad p_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Die *Hessesche Normalform* der Gleichung der Tangente (I § 17, (10)) lautet dann:

$$p_0\left(\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}-1\right)=0. \tag{7}$$

3. Abstandsprodukt der Brennpunkte von der Tangente. Die senkrechten Abstände n_1, n_2 der Brennpunkte $x = \pm e$, $y = 0$ von der Tangente (7) werden (I § 17, (11)):

$$n_1 = p_0\left(\frac{e x_0}{a^2}-1\right), \quad n_2 = p_0\left(-\frac{e x_0}{a^2}-1\right) \tag{8}$$

und ihr Produkt:

$$n_1 n_2 = p_0^2\left(1-e^2\frac{x_0^2}{a^4}\right). \tag{9}$$

Eliminiert man aber y_0 mittels (4) aus (6), so erhält man:

$$p_0^2 = \frac{b^2}{1-e^2\frac{x_0^2}{a^4}}. \tag{10}$$

Das Produkt der relativen (I § 17, 3) *Abstände der Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel von einer laufenden Tangente ist unveränderlich*[63]*):*

$$n_1 n_2 = b^2. \tag{11}$$

4. Tangente und Brennstrahlen. Die Brennstrahlen FP und $F'P$ eines Punktes $P = x, y$ der Kurve (1) haben die Polarkoordinaten (I § 12, (8)):

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x-e)^2+y^2}, \quad \frac{x-e}{r}, \quad \frac{y}{r}; \\ r' &= \sqrt{(x+e)^2+y^2}, \quad \frac{x+e}{r'}, \quad \frac{y}{r'}. \end{aligned} \tag{12}$$

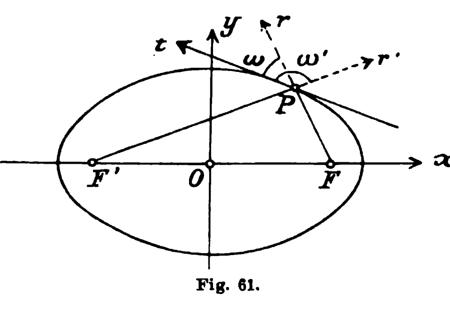


Fig. 61.

Die Richtungskosinus der (nach O gerichteten) Tangente t im Punkte P (Fig. 61) entnehmen wir mit Unterdrückung des Index 0 aus (5) und (6) (I § 17, (5)):

$$-\frac{py}{b^2}, \quad \frac{px}{a^2}; \quad \frac{1}{p}=\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}. \tag{13}$$

Für die Winkel ω und ω' zwischen Brennstrahlen und Tangente (Fig. 61) ist daher (I § 13, (3)):

$$\cos\omega = -\frac{py}{r}\left(\frac{x-e}{b^2}-\frac{x}{a^2}\right), \quad \cos\omega' = -\frac{py}{r'}\left(\frac{x+e}{b^2}-\frac{x}{a^2}\right)$$

oder nach § 1, (12):

$$\cos\omega = \frac{epy}{ab^2r}\left(a-\frac{ex}{a}\right), \quad \cos\omega' = -\frac{epy}{ab^2r'}\left(a+\frac{ex}{a}\right),$$

oder für *Ellipse* und *Hyperbel* ($-b^2$ für b^2) nach § 4, (35) bezüglich:

(14) $$\cos\omega = \frac{epy}{ab^2}, \quad \cos\omega' = -\frac{epy}{ab^2};$$

$$\cos\omega = \pm\frac{epy}{ab^2}, \quad \cos\omega' = \pm\frac{epy}{ab^2},$$

wo bei der Hyperbel die obern Zeichen für den rechten, die untern für den linken Zweig gelten. Danach ist bezüglich[64]):

(15) $$\cos\omega' = -\cos\omega, \qquad \cos\omega' = \cos\omega.$$

Die Tangente halbiert bei der Ellipse den Außenwinkel, bei der Hyperbel den Innenwinkel der Brennstrahlen (Fig. 61, 62).

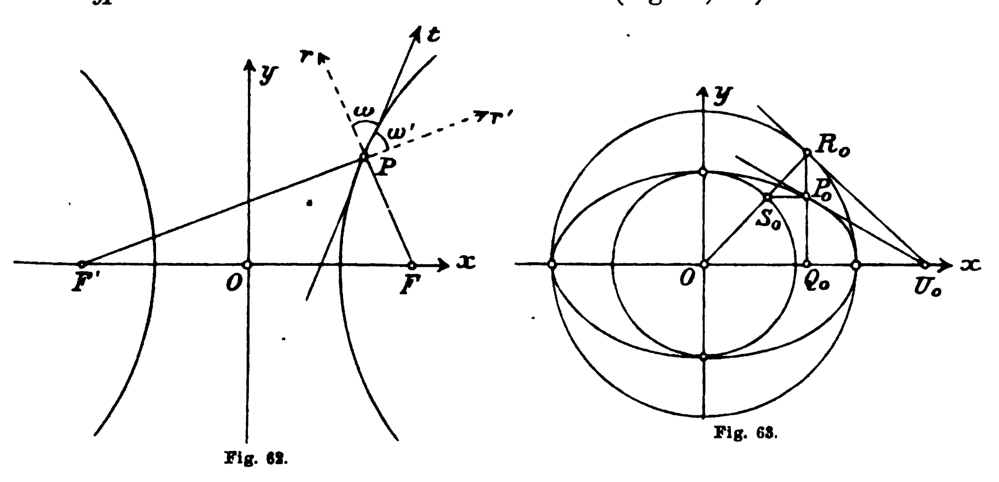


Fig. 62.

Fig. 63.

5. Konstruktion der Tangente. Nach diesem Satze kann die Tangente durch *Halbierung des Winkels der Brennstrahlen* konstruiert werden.

Konstruiert man aber die Punkte der Kegelschnitte nach der Parameterdarstellung § 6, **1—4**, so erhält man zugleich auch die Tangenten in folgender Weise.

Die Tangenten der Ellipse § 6, (2) und des Kreises über der großen Achse § 1, (21) in entsprechenden Punkten $P_0 = x_0, y_0$ und $R_0 = x_0', y_0'$, (§ 6, **2**) haben nach (3) die Gleichungen:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \quad \frac{x_0' x}{a^2} + \frac{y_0' y}{a^2} = 1,$$

schneiden also, da nach § 6, (4) $x_0 = x_0'$, die Achse $y = 0$ in demselben Punkte U_0. Da die Tangente des Kreises in R_0 und damit der Punkt U_0 (Fig. 63) bekannt ist (§ 12, **6**), *erhält man die Tangente der Ellipse in P_0 als Verbindungslinie von P_0 und U_0.*

Die Tangente der Hyperbel § 6, (6) im Punkte $P_0 = x_0, y_0$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

schneidet die x-Achse im Punkte $x = a^2 : x_0 = x_0'$ (§ 6, (7)), also im Fußpunkt Q_0 der Ordinate des entsprechenden Punktes $R_0 = x_0', y_0'$ des Kreises vom Radius a. *Man erhält daher* (Fig. 64) *die Tangente der Hyperbel im Punkte P_0 als Verbindungslinie von P_0 mit Q_0.*

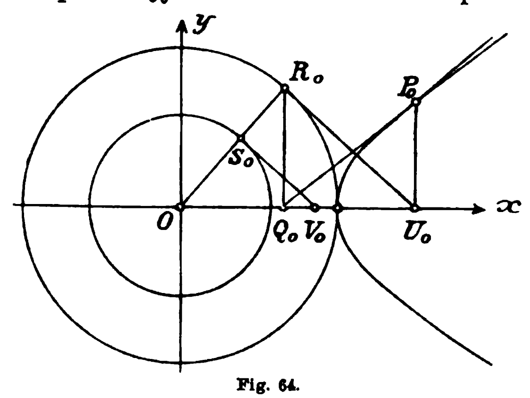


Fig. 64.

6. Gleichung der Ellipse und Hyperbel in Linienkoordinaten. Soll die Gerade:

(16) $$ux + vy + 1 = 0$$

Tangente der Kurve (1) sein, so muß die Gleichung (16) mittels eines der Bedingung (4) genügenden Punktes x_0, y_0 auf die Form (3) gebracht werden können, also zunächst sein:

(17) $$u = -\frac{x_0}{a^2}, \quad v = -\frac{y_0}{b^2}.$$

Durch Elimination von x_0, y_0 aus (4) und (17) folgt aber:

(18) $$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0.$$

Dies ist die Bedingung, daß die Gerade u, v Tangente der Kurve (1) ist, oder die *Gleichung der Ellipse und Hyperbel* (1) *in laufenden Linienkoordinaten.*[65])

7. Tangentenpaar an Ellipse oder Hyperbel. Das von einem Punkte x_0, y_0 an die Kurve (1) gelegte *Tangentenpaar* hat nach § 10, (21) die Gleichung:

(19) $$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2}\right) - \left(\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2}\right)^2 = 0$$

oder in die Form § 7, (33) gebracht:

(20) $$(y_0^2 - b^2)(x-x_0)^2 - 2x_0y_0(x-x_0)(y-y_0) + (x_0^2 - a^2)(y-y_0)^2 = 0$$

oder auch nach § 10, (24):

(21) $$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

Für das *vom Mittelpunkt* $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ *an die Kurve gelegte Tangentenpaar* ergibt sich daher:

(22) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Es ist das Paar der *Asymptoten*, die für die Ellipse *imaginär*, für die Hyperbel *reell* sind (§ 1, (18)).

Die Gleichung (21) kann auch in der Form:

(23) $$a^2(y_0 - y)^2 + b^2(x_0 - x)^2 - (x_0 y - y_0 x)^2 = 0$$

entwickelt werden. Sie hängt daher nur von den Koordinaten (I § 19, (13)):

(24) $$u : v : 1 = y_0 - y : -(x_0 - x) : x_0 y - y_0 x$$

der Verbindungslinie der Punkte $P_0 = x_0, y_0$ und $P = x, y$ ab und gibt wieder die Gleichung (18) als Bedingung, daß diese eine Tangente der Kurve ist.

8. Besondere Formen des Tangentenpaares. Das Tangentenpaar (20) wird nach § 7, (40) ein *rechtwinkliges* unter der Bedingung:

$$(y_0^2 - b^2) + (x_0^2 - a^2) = 0,$$

also, wenn der Punkt x_0, y_0 dem Kreise:

(25) $$x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

angehört.[66])

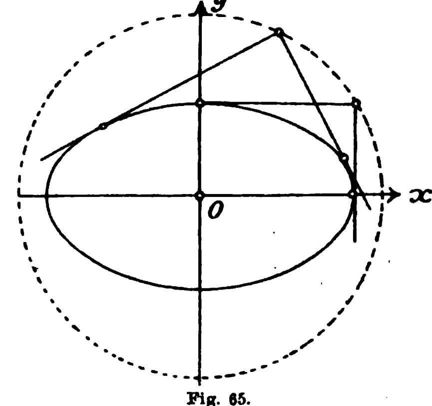


Fig. 65.

I. *Der Ort der Scheitelpunkte aller rechtwinkligen Tangentenpaare der Kurve* (1) *ist der um den Mittelpunkt der Kurve beschriebene Kreis* (25).

Bei der Ellipse (Fig. 65) ist er stets reell, bei der Hyperbel (Fig. 66), wo b^2 durch $-b^2$ zu ersetzen wäre, ist er nur für $a^2 > b^2$ reell und zieht sich bei der gleichseitigen Hyperbel $a^2 = b^2$ (§ 1, (22)) auf den Mittelpunkt zusammen.

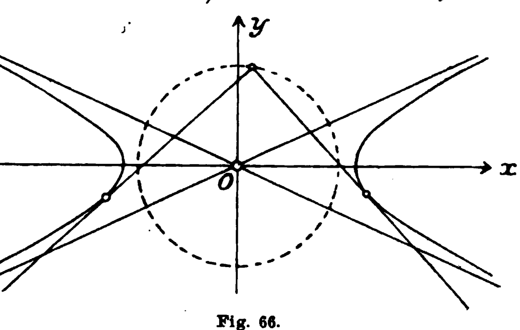


Fig. 66.

Das Tangentenpaar (20) ist nach § 7, (39) ein *Kreisstrahlenpaar* unter den Bedingungen:

$$y_0^2 - b^2 = x_0^2 - a^2, \quad x_0 y_0 = 0,$$

also für die vier Punkte:

(26) $$x_0^2 = a^2 - b^2, \quad y_0 = 0; \quad x_0 = 0, \quad y_0^2 = b^2 - a^2,$$

die reellen (§ 1, (12)) und „*imaginären Brennpunkte*“.

II. *Die Scheitelpunkte derjenigen Tangentenpaare der Kurve* (1), *die ein Kreisstrahlenpaar bilden, sind die Brennpunkte.*[2])

9. Tangenten der Hyperbel auf die Asymptoten bezogen. Ist die Hyperbel durch ihre Asymptotengleichung:

$$(27)\qquad g(x,y) = 2xy - \frac{e^2}{2} = 0 \quad \left(g_1 = y,\ g_2 = x,\ g_3 = -\frac{e^2}{2}\right)$$

gegeben (§ 3, (15)), so erhält die Tangente im Punkte x_0, y_0 nach § 10, (18) die Gleichung:

$$(28)\qquad y_0 x + x_0 y - \frac{e^2}{2} = 0, \qquad (29)\quad 2x_0 y_0 - \frac{e^2}{2} = 0$$

und die Koordinaten:

$$(30)\qquad u = -\frac{2y_0}{e^2}, \quad v = -\frac{2x_0}{e^2}.$$

Die Elimination von x_0 und y_0 aus (29) und (30) gibt in:

$$(31)\qquad e^2 uv = 1$$

die Gleichung der Hyperbel in Linienkoordinaten in bezug auf die Asymptoten.[67])

Da aber die Koordinaten u, v einer Linie die negativen reziproken Werte der Abschnitte OL, OM auf den Koordinatenachsen sind (I § 19, (2); (3)), so enthält die Gleichung (31) den Satz (vgl. § 3, (16)):

$$(32)\qquad \frac{1}{2}\,OL \cdot OM \sin 2\omega = \frac{1}{2} e^2 \sin 2\omega.$$

Die laufende Tangente der Hyperbel bestimmt mit den Asymptoten ein Dreieck OLM von festem Flächeninhalt (in Fig. 3 liegt die Ecke M in C).

10. Gleichung der Parabel. Für die *Parabel:*

$$(33)\qquad g(x,y) = y^2 + 2p(x+q) = 0$$

werden die in § 9, 4; 5 eingeführten Ausdrücke:

$$(34)\qquad g_1(x,y) = p, \quad g_2(x,y) = y, \quad g_3(x,y) = p(x+2q);$$
$$h(x,y) = y^2; \quad h_1(x,y) = 0; \quad h_2(x,y) = y.$$

Nach § 11, (6) und § 10, (26) ist *weder ein Mittelpunkt, noch ein Doppelpunkt* vorhanden.

11. Gleichung der Tangente. Aus § 10, (18) folgt als *Gleichung der Tangente der Parabel* (33) *im Punkte* x_0, y_0:

$$(35)\qquad y_0 y + p(x + x_0 + 2q) = 0,$$

wobei (§ 10, (12)):

$$(36)\qquad y_0^2 + 2p(x_0 + q) = 0.$$

Bei Annahme der Scheitelgleichung:

(37) $$y^2 - 2px = 0$$

wird demnach für die Tangente im Punkte x_0, y_0:

(38) $$y_0 y - p(x + x_0) = 0,$$ (39) $$y_0^2 - 2px_0 = 0.$$

12. Konstruktion der Tangente. Die Tangente (38) schneidet die x-Achse im Punkte $x = -x_0$. Man erhält daher die Tangente im Punkte P_0, indem man die Abszisse OQ_0 (Fig. 67) nach rückwärts um sich selbst bis T verlängert, $TO = OQ_0$, und T mit P_0 verbindet.

13. Tangente und Brennstrahl. Ist D_0 der Fußpunkt der Direktrix auf der x-Achse und F der Brennpunkt, so ist nach § 2, (13); (14) $D_0 O = OF$ und daher neben $TO = OQ_0$ auch $TF = D_0 Q_0$ (Fig. 67). Da aber $D_0 Q_0$ gleich dem Abstand DP_0 des Punktes P_0 von der Direktrix und dieser nach § 2, (15) gleich FP_0 ist, so folgt $TF = FP_0$. Das Dreieck TFP_0 ist daher gleichschenklig, woraus weiter hervorgeht[64]):

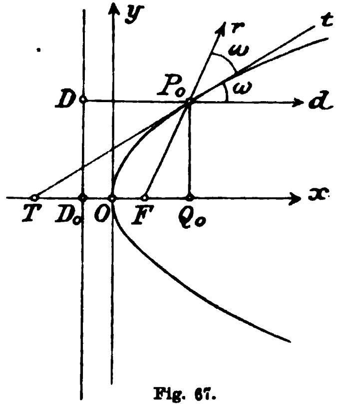


Fig. 67.

Die Tangente halbiert den Winkel 2ω *zwischen Brennstrahl* $r = FP_0$ *und Direktrixabstand* $d = DP_0$ (Fig. 67).

14. Gleichung der Parabel in Linienkoordinaten. Soll die Gerade u, v Tangente der Parabel (33) sein, so muß die Gleichung (16) mittels eines der Bedingung (36) genügenden Punktes x_0, y_0 auf die Form (35) gebracht werden können, also zunächst sein:

(40) $$u = \frac{1}{x_0 + 2q}, \quad v = \frac{y_0}{p(x_0 + 2q)}.$$

Durch Elimination von x_0, y_0 aus (36) und (40) folgt aber:

(41) $$pv^2 + 2u - 2qu^2 = 0$$

oder in homogenen Koordinaten u, v, s:

(42) $$pv^2 - 2qu^2 + 2us = 0.$$

Dies sind die Gleichungen der Parabel (33) *in laufenden Linienkoordinaten* u, v, *bezüglich* u, v, s.

Für die Parabel (37) wird entsprechend[65]):

(43) $$pv^2 - 2us = 0.$$

Die *unendlich ferne Gerade* $u = 0, v = 0, s = 1$ genügt der Gleichung (42), ist also stets *Tangente der Parabel* (vgl. § 2, 9).

15. Tangentenpaar an die Parabel. Das von einem Punkte x_0, y_0 an die Kurve (33) gelegte *Tangentenpaar* hat nach (34) und § 10, (21) die Gleichung:

$$(44)\quad \{y_0^2 + 2p(x_0 + q)\}(y - y_0)^2 - \{p(x - x_0) + y_0(y - y_0)\}^2 = 0$$

oder in die Form § 7, (33) gebracht:

$$(45)\quad p(x - x_0)^2 + 2y_0(x - x_0)(y - y_0) - 2(x_0 + q)(y - y_0)^2 = 0$$

oder auch nach § 10, (24):

$$(46)\quad \{y_0^2 + 2p(x_0 + q)\}\{y^2 + 2p(x + q)\} - \{y_0 y + p(x + x_0 + 2q)\}^2 = 0.$$

Diese Gleichung kann in der Form:

$$(47)\quad -p^2(x - x_0)^2 + 2pq(y_0 - y)^2 - 2p(y_0 - y)(x_0 y - y_0 x) = 0$$

entwickelt werden und führt dann mit (24) wieder auf (41) zurück.

I. Da die unendlich ferne Gerade Tangente der Parabel ist, *geht von einem unendlich fernen Punkte nur noch eine endliche Tangente an die Parabel.* II. *Es gibt keine zwei parallelen Tangenten.*

16. Besondere Formen des Tangentenpaares. Das Tangentenpaar (45) wird nach § 7, (40) ein *rechtwinkliges* unter der Bedingung:

$$p - 2(x_0 + q) = 0 \quad \text{oder} \quad x_0 = \frac{p}{2} - q.$$

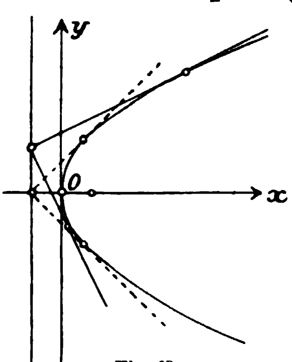


Fig. 68.

I. *Der Ort der Scheitelpunkte aller rechtwinkligen Tangentenpaare der Parabel ist* (§ 2, (20)) *ihre Direktrix*[66]) (Fig. 68).

Das Tangentenpaar (45) wird nach § 7, (39) ein *Kreisstrahlenpaar* unter den Bedingungen:

$$x_0 = -\frac{p}{2} - q, \quad y_0 = 0.$$

II. *Der Scheitelpunkt desjenigen Tangentenpaares der Parabel, das ein Kreisstrahlenpaar bildet, ist der Brennpunkt*[2]) (§ 2, (19)).

17. Parameterdarstellung der Tangente. Die Koordinaten des laufenden Punktes x_0, y_0 der Ellipse sind nach § 6, (10) von einem Parameter λ abhängig:

$$x_0 = a\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad y_0 = b\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Die *Koordinaten der Tangente der Ellipse* stellen sich daher nach (17) gleichfalls durch λ dar:

$$(48)\quad u = -\frac{1}{a}\frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}, \quad v = -\frac{1}{b}\frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}.$$

Ebenso ergibt sich nach § 6, (12) für die *Tangente der Hyperbel:*

(49) $$u = -\frac{1}{a}\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, \quad v = \frac{1}{b}\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}$$

und für die *Parabel* (37) nach § 6, (14) mit Benutzung von (40) für $q = 0$ und $-p$ für p:

(50) $$u = \frac{2p}{\lambda^2}, \quad v = -\frac{2}{\lambda}.$$

Diese Parameterdarstellungen genügen in der Tat identisch in λ den Gleichungen (18) (bei der Hyperbel mit $-b^2$ für b^2) und (43) mit $s = 1$. Bei der Parabel entspricht dem Werte $\lambda = \infty$ die *unendlich ferne Gerade* $u = 0$, $v = 0$ (I § 22, (7)), die nach **14** Tangente ist.

18. Projektive Punktreihen auf zwei Tangenten. Auf Grund der Darstellung (48) folgt nun aus § 6, (16) bei Vertauschung von x, y, a, b mit $u, v, -1:a, -1:b$ als Gleichung der Punktreihe, in der eine feste Tangente λ_0 von der laufenden Tangente λ geschnitten wird:

(51) $$(au + \lambda_0 bv + 1) - \lambda(\lambda_0 au - bv - \lambda_0) = 0$$

und damit wie dort der Satz:

Zwei feste Tangenten λ_0 und λ_1 der Ellipse oder Hyperbel werden von der laufenden Tangente λ in projektiven Punktreihen geschnitten.[29])

Für die Asymptoten liegt dieser Satz schon in der Gleichung (32) (I § 65, (9)).[67])

19. Ähnliche Punktreihen bei der Parabel. Bei der Parabel ist die Gleichung der Punktreihe, in der die feste Tangente λ_0 von der laufenden λ geschnitten wird, nach (50):

(52) $$p(\lambda_0 v + 2) + \lambda(\lambda_0 u + pv) = 0.$$

Der Lage $\lambda = \infty$ der laufenden Tangente entspricht hier stets der unendlich ferne Punkt:

(53) $$\lambda_0 u + pv = 0 \quad (\text{I § 22, (10)})$$

der festen Tangente λ_0. Projektive Punktreihen aber, deren unendlich ferne Punkte einander entsprechen, sind ähnliche Punktreihen, da hier schon das einfache Teilungsverhältnis (I § 3, (27)) von drei Punkten der einen dem der drei entsprechenden der andern gleich ist.

Zwei feste Tangenten λ_0 und λ_1 der Parabel werden von der laufenden Tangente λ in ähnlichen Punktreihen geschnitten.[68])

20. Das Geradenpaar als Kurve zweiter Ordnung. Unter die Form § 9, (1) fällt die Gleichung:

(54) $$g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

mit:

(55) $$g_1 = \frac{x}{a^2}, \quad g_2 = -\frac{y}{b^2}, \quad g_3 = 0.$$

Sie stellt ein *reelles* (mit umgekehrtem Vorzeichen von b^2 auch ein *imaginäres*) *Geradenpaar* s_1, s_2 als *Kurve zweiter Ordnung* dar. Punkte des Paares sind alle Punkte x, y, die auf einer der beiden Geraden s_1 und s_2 liegen. Der auf beiden Geraden liegende Punkt O $(x = 0, y = 0)$ ist nach § 10, (26) *Doppelpunkt* der Kurve. *Jede durch ihn gehende Gerade* ist im Sinne von § 10, 6 *Tangente.*

21. Geradenpaar und unendlich fernes Punktepaar. Die Schnittpunkte des Paares (54) mit der unendlich fernen Geraden:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad t = 0 \tag{56}$$

haben die homogenen Koordinaten: $x, y, t = a, \pm b, 0$ und daher die Gleichung (I § 22, (4')):

$$au \pm bv = 0 \quad \text{oder} \quad a^2u^2 - b^2v^2 = 0.$$

Alle Geraden u, v, s, die dieser Gleichung genügen, gehen durch einen der beiden Punkte (56); diejenigen, die zugleich durch O gehen, also die Geraden (54) selbst, genügen außerdem der Bedingung $s = 0$ (I § 22, (9)). Es bedeuten also die folgenden *Gleichungen in Punkt- und Linienkoordinaten:*

$$g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \tag{57}$$

das Geradenpaar selbst;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad t = 0 \tag{58}$$

das unendlich ferne Punktepaar des Geradenpaares.

$$a^2u^2 - b^2v^2 = 0 \tag{57'}$$

das unendlich ferne Punktepaar des Geradenpaares;

$$a^2u^2 - b^2v^2 = 0, \quad s = 0 \tag{58'}$$

das Geradenpaar selbst.

22. Parallellinienpaar und endliches Punktepaar. Ebenso bedeuten die Gleichungen[69]):

$$\frac{x^2}{a^2} - t^2 = 0 \tag{59}$$

das Parallellinienpaar senkrecht zur x-Achse;

$$\frac{x^2}{a^2} - t^2 = 0, \quad y = 0 \tag{60}$$

dessen Schnittpunktepaar mit der x-Achse.

$$a^2u^2 - s^2 = 0 \tag{59'}$$

das Schnittpunktepaar der Parallellinien mit der x-Achse;

$$a^2u^2 - s^2 = 0, \quad v = 0 \tag{60'}$$

das Parallellinienpaar selbst.

Während also *Ellipse, Hyperbel* und *Parabel* in *Punkt- und Linienkoordinaten* je *eine* Gleichung (1); (18); (37); (43) haben, werden die *Linienpaare* in *Punktkoordinaten* durch *eine* Gleichung (57); (59), in *Linienkoordinaten* durch *zwei* Gleichungen (58'); (60') dargestellt,

die *Punktepaare* umgekehrt in *Linienkoordinaten* durch *eine* Gleichung (57'); (59'), in *Punktkoordinaten* durch *zwei* Gleichungen (58); (60).

§ 14. Konjugierte Durchmesser.

1. Der einem Durchmesser konjugierte Durchmesser. Jede durch den Mittelpunkt O der Ellipse oder Hyperbel:

$$(1) \qquad g(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

gehende Gerade heißt ein *Durchmesser.*[50])

Die nach § 11, (2) und § 13, (2) der *Richtung* α_1, β_1 konjugierte Gerade:

$$(2) \qquad \frac{\alpha_1 x}{a^2} + \frac{\beta_1 y}{b^2} = 0$$

ist nach der Form ihrer Gleichung ein Durchmesser. Wir nennen ihn nunmehr, da die Richtung α_1, β_1 selbst durch den *Durchmesser dieser Richtung* charakterisiert werden kann, *den dem Durchmesser* α_1, β_1 *konjugierten Durchmesser.*

Der einem Durchmesser konjugierte Durchmesser halbiert alle zum ersteren parallelen Sehnen (§ 11, **2**). Er ist die Polare des unendlich fernen Punktes des ersteren (§ 11, **11**).

2. Zwei einander konjugierte Durchmesser. Für die Richtungskosinus α_2, β_2 des dem Durchmesser α_1, β_1 konjugierten Durchmessers gilt nach (2) die Proportion (I § 17, (5)):

$$(3) \qquad \alpha_2 : \beta_2 = -\frac{\beta_1}{b^2} : \frac{\alpha_1}{a^2}$$

oder die Gleichung:

$$(4) \qquad \frac{\alpha_1 \alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2} = 0.$$

Sie bestimmt $\alpha_2 : \beta_2$ bei gegebenem $\alpha_1 : \beta_1$. Da sie aber in α_1, β_1 und α_2, β_2 symmetrisch ist, so ist die Beziehung zwischen den beiden Durchmessern wechselseitig. Man nennt diese daher *zwei einander konjugierte Durchmesser*[70]) (ξ und η in Fig. 69 und 70).

I. *Von zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse oder Hyperbel halbiert jeder die dem andern parallelen Sehnen* ($SM = MT$ in Fig. 69; 70).

II. *Zwischen den Richtungskosinus von zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse oder Hyperbel* (1) *besteht die Gleichung* (4).

III. *Von zwei konjugierten Durchmessern ist jeder die Polare des unendlich fernen Punktes des andern.*

IV. *Die unendlich fernen Punkte* $\alpha_1, \beta_1, 0$ *und* $\alpha_2, \beta_2, 0$ *zweier konjugierter Durchmesser sind harmonische Pole* (§ 11, (12)).

3. Konjugierte Durchmesser und Tangenten. Der Durchmesser α_1, β_1 schneide die Kurve (1) im Punkte $x_1 = \varepsilon\varrho\alpha_1$, $y_1 = \varepsilon\varrho\beta_1$ (§ 5, 1), wo ϱ der Radiusvektor des Punktes und $\varepsilon = \pm 1$ ist. Die Tangente der Kurve in diesem Punkte hat nach § 13, (3) die Gleichung:

$$\varepsilon\varrho\left(\frac{\alpha_1 x}{a^2} + \frac{\beta_1 y}{b^2}\right) = 1,$$

ist also dem Durchmesser (2) parallel.

Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel (Fig. 69; 70).

4. Involution konjugierter Durchmesser. Sind φ_1 und φ_2 die Winkel der beiden konjugierten Durchmesser gegen die x-Achse, also (I § 11, (11)): $\beta_1 : \alpha_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $\beta_2 : \alpha_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, so folgt aus der Gleichung (4):

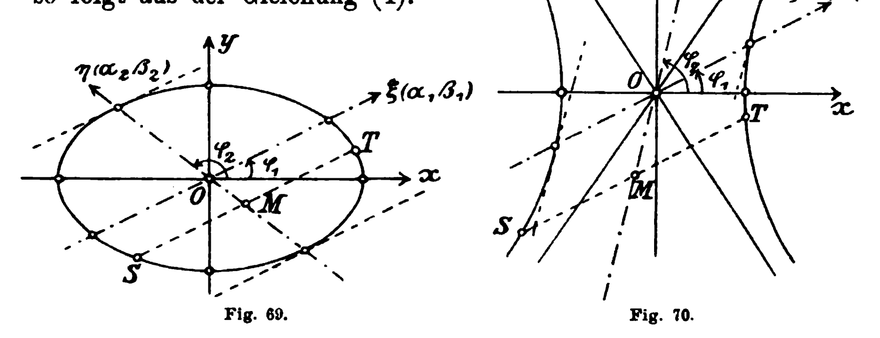


Fig. 69. Fig. 70.

Zwischen den Richtungswinkeln φ_1 und φ_2 von zwei konjugierten Durchmessern besteht bei Ellipse, bezüglich Hyperbel die Beziehung:

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{b^2}{a^2}, \qquad (5') \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Daraus ergibt sich aber nach § 8, (28):

Die Paare konjugierter Durchmesser der Ellipse und Hyperbel bilden eine Strahleninvolution.[71])

Die Doppelstrahlen der Involution (§ 8, (27)):

$$(6) \qquad \operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{b^2}{a^2}, \qquad (6') \qquad \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}$$

sind die *Asymptoten,* also bei der Ellipse *imaginär,* bei der Hyperbel *reell.*

Die *Hauptachsen* der Involution decken sich mit den Hauptachsen der Ellipse und Hyperbel.

Die Involution konjugierter Durchmesser der Ellipse ist die *allgemeine elliptische,* die der Hyperbel die allgemeine *hyperbolische Involution.*

Bei der Ellipse liegen zwei konjugierte Durchmesser stets in *verschiedenen* Quadranten des Hauptachsensystems (Fig. 69), bei der Hyperbel liegen sie in *demselben* Quadranten (Fig. 70) und *sind zu den Asymptoten harmonisch.*

Die Involution konjugierter Durchmesser beim *Kreise* (§ 1, (21)) ist eine *Involution rechter Winkel* (§ 8, (30)), bei der *gleichseitigen Hyperbel* (§ 1, (22)) eine *gleichseitig hyperbolische Involution* (§ 8, (33)).

5. Besondere Paare konjugierter Durchmesser. Die Bedingung (4) ist bei $a^2 \neq b^2$ mit $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$ nur verträglich, wenn $\alpha_1\alpha_2 = 0$ oder $\beta_1\beta_2 = 0$:

I. Die *Hauptachsen* der Ellipse und Hyperbel sind das *einzige* Paar *rechtwinkliger* konjugierter Durchmesser (§ 8, **12**, I).

II. Bei der Ellipse bilden die *Diagonalen* des Rechtecks der vier Scheiteltangenten ein Paar konjugierter Durchmesser ($\operatorname{tg}\varphi_1 = b:a$, $\operatorname{tg}\varphi_2 = -b:a$ in (5)).

III. Bei der Hyperbel ist jede *Asymptote* ihr eigener konjugierter Durchmesser $\left(\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \pm\frac{b}{a} \text{ in } (5')\right)$.

6. Konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen. Geht man mittels der Substitution (I § 14, (2)):

$$\tag{7} \begin{cases} x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta, \\ y = \beta_1\xi + \beta_2\eta \end{cases}$$

von dem System Oxy der Hauptachsen zu einem konzentrischen schiefwinkligen System $O\xi\eta$ über, dessen Achsen die Richtungskosinus α_1, β_1 und α_2, β_2 haben, so wird die Gleichung der Kurve (1):

$$\tag{8} g = \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + 2\nu\xi\eta - 1 = 0,$$

wo:

$$\tag{9} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2}, \quad \frac{1}{\mu^2} = \frac{\alpha_2^2}{a^2} + \frac{\beta_2^2}{b^2},$$

$$\tag{10} \nu = \frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b^2}.$$

Mit Rücksicht auf (4) folgt daher:

In bezug auf ein schiefwinkliges Achsensystem $O\xi\eta$ *erhält die Gleichung* (1) *immer dann und nur dann die Form:*

$$\tag{11} \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} - 1 = 0,$$

wenn es aus zwei konjugierten Durchmessern besteht.[72])

Die Koeffizienten haben dann die Werte (9).

7. Die Längen der konjugierten Durchmesser. Unter der Voraussetzung, daß ξ und η konjugierte Durchmesser und damit $\nu = 0$ ist, wiederholen wir die Gleichungen (9) und (10) in der Form:

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\alpha_1}{a^2} + \beta_1 \frac{\beta_1}{b^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \\ \alpha_2 \frac{\alpha_1}{a^2} + \beta_2 \frac{\beta_1}{b^2} = 0 \end{cases} \qquad (12')\quad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\alpha_2}{a^2} + \beta_1 \frac{\beta_2}{b^2} = 0, \\ \alpha_2 \frac{\alpha_2}{a^2} + \beta_2 \frac{\beta_2}{b^2} = \frac{1}{\mu^2}. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen (12) mit β_2, $-\beta_1$ oder $-\alpha_2$, α_1, die Gleichungen (12′) ebenso und addiert, so erhält man:

$$(13)\quad \begin{cases} \lambda^2 \sin\omega \cdot \alpha_1 = a^2 \beta_2, & \mu^2 \sin\omega \cdot \alpha_2 = -a^2 \beta_1, \\ \lambda^2 \sin\omega \cdot \beta_1 = -b^2 \alpha_2, & \mu^2 \sin\omega \cdot \beta_2 = b^2 \alpha_1, \end{cases}$$

worin:

$$(14)\quad \sin\omega = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

und ω der Winkel der Achsen ξ, η ist (I § 14, (3)).

Multipliziert man die Gleichungen erster Zeile (13) mit α_1, α_2, zweiter Zeile mit β_1, β_2 und addiert, so ergibt sich unter Weglassung des Faktors $\sin\omega$:

$$(15)\quad \lambda^2 \alpha_1^2 + \mu^2 \alpha_2^2 = a^2, \quad \lambda^2 \beta_1^2 + \mu^2 \beta_2^2 = b^2$$

und hieraus durch Addition (I § 11, (12)):

$$(16)\quad \lambda^2 + \mu^2 = a^2 + b^2.$$

Indem man anderseits die Gleichungen (13) kreuzweise multipliziert und subtrahiert, findet man:

$$(17)\quad \lambda^2 \mu^2 \sin^2\omega = a^2 b^2.$$

Zwischen den Quadraten λ^2, μ^2 der halben Längen von zwei konjugierten Durchmessern mit dem Winkel ω und den Halbachsenquadraten a^2, b^2 bestehen also die Gleichungen (16) und (17), welche die Sätze enthalten[73]):

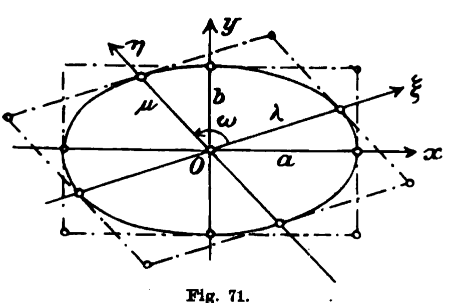


Fig. 71.

I. *Die Quadratsumme der Längen zweier konjugierter Durchmesser ist stets gleich der Quadratsumme der Längen der beiden Hauptachsen.*

II. *Der Flächeninhalt des Parallelogramms aus zwei konjugierten Durchmessern ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den Hauptachsen* (Fig. 71, 72).

Bei der Hyperbel ist nach (17) wegen $b^2 < 0$ auch eine der Größen λ^2, μ^2 negativ. Ist etwa $\mu^2 < 0$ und schreibt man $-\mu^2$ für μ^2, so haben die beiden konjugierten Hyperbeln § 1, (23) in bezug auf

die nach (4) *gemeinsamen* konjugierten Durchmesser ξ, η wie in (11) die Gleichungen:

$$(18) \qquad \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \frac{\eta^2}{\mu^2} = 1, \quad -\frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} = 1$$

und bezüglich in den Achsen ξ, η die reellen Halbmesser λ, μ. Die Ecken $\xi = \pm \lambda$, $\eta = \pm \mu$ des Parallelogramms der konjugierten Durchmesser (Fig 72) liegen dann auf den Asymptoten:

$$(19) \qquad \frac{\xi^2}{\lambda^2} - \frac{\eta^2}{\mu^2} = 0.$$

Bei der *gleichseitigen* Hyperbel § 1, (22) ist in (16) mit $b^2 = -a^2$ auch $\mu^2 = -\lambda^2$, also zwei konjugierte Halbmesser λ und μ in Fig. 72 gleich lang.

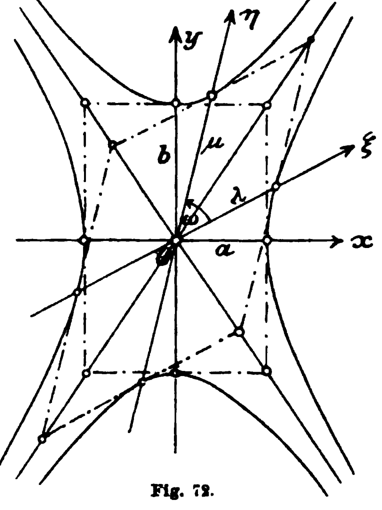


Fig. 72.

8. Der einer Richtung konjugierte Durchmesser bei der Parabel. Bei der Parabel soll jede der Hauptachse parallele Gerade ein *Durchmesser* heißen.[50])

Bei Zugrundelegung der Gleichung:

$$(20) \qquad y^2 = 2px \quad (h_1(x, y) = 0,\ h_2(x, y) = y,\ h_3(x, y) = -px)$$

ist die *der Richtung* α, β *konjugierte Gerade* (§ 11, (3)):

$$(21) \qquad \beta y = \alpha p$$

ein *Durchmesser* und heißt *der der Richtung* α, β *konjugierte Durchmesser.*

Er halbiert alle Sehnen von der Richtung α, β; sein Schnittpunkt mit der Parabel:

$$(22) \qquad x_0 = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2}p, \quad y_0 = \frac{\alpha}{\beta}p$$

ist daher der Berührungspunkt der *Tangente* von der Richtung α, β. Man kann demnach den Durchmesser (21) auch als *den der Tangente* α, β *konjugierten Durchmesser*[70]) bezeichnen (Fig. 73).

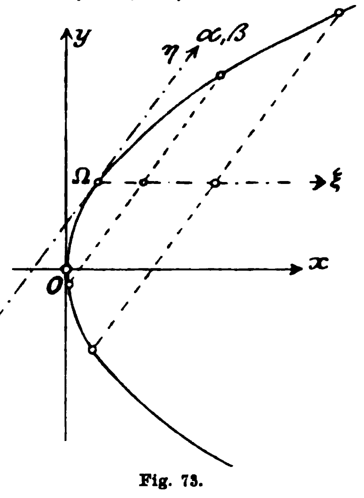


Fig. 73.

Die Richtung $\alpha = 1$, $\beta = 0$ hat keinen (endlichen) konjugierten Durchmesser.

9. Tangente und konjugierter Durchmesser als Koordinatenachsen. Geht man mittels der Substitution (I § 14, (11)):

$$(23)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha'\xi + \alpha\eta, \\ y = y_0 + \beta'\xi + \beta\eta \end{cases}$$

zu einem schiefwinkligen Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$ über, dessen Anfangspunkt $\Omega = x_0, y_0$ ist und dessen Achsen die Richtungskosinus α', β' und α, β haben, so wird aus (20):

$$(24)\qquad \begin{aligned} \beta'^2\xi^2 + 2\beta'\beta\xi\eta + \beta^2\eta^2 + 2(\beta' y_0 - p\alpha')\xi \\ + 2(\beta y_0 - p\alpha)\eta + (y_0^2 - 2px_0) = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung *erhält wieder die Form* (20), nämlich[73]):

$$(25)\qquad \eta^2 = 2\frac{p}{\beta^2}\xi,$$

wenn:

$$(26)\qquad \beta' = 0(\alpha' = 1), \quad \beta y_0 = p\alpha, \quad y_0^2 - 2px_0 = 0,$$

also *die η-Achse eine Tangente und die ξ-Achse ihr konjugierter Durchmesser* ist.

10. Ähnliche Kegelschnitte. Zwei auf verschiedene oder gleiche rechtwinklige Systeme Oxy und $O'x'y'$ bezogene *Ellipsen:*

$$(27)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad (27')\qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

oder *Hyperbeln:*

$$(28)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad (28')\qquad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

sind *ähnlich*, wenn ihre Halbachsen in demselben Verhältnis $1:m$ stehen, also:

$$(29)\qquad a' = ma, \quad b' = mb.$$

Zwei *Parabeln:*

$$(30)\qquad y^2 = 2px \qquad\qquad (30')\qquad y'^2 = 2p'x'$$

sind bei beliebigem Verhältnis der Parameter:

$$(31)\qquad p' = mp$$

immer ähnlich.[74])

Denn durch die *Ähnlichkeitsverwandtschaft:*

$$(32)\qquad x' = mx, \quad y' = my \qquad\qquad (32')\qquad u' = \frac{u}{m}, \quad v' = \frac{v}{m}$$

(I § 67, (14); (15)) der beiden Ebenen Oxy und $O'x'y'$ gehen die Paare (27) und (27'), (28) und (28'), (30) und (30') Punkt für Punkt und Tangente für Tangente (§ 13, (18); (43)) ineinander über.

Sind die Systeme Oxy und $O'x'y'$ *parallel*, werden die Paare

ähnlich und *ähnlich liegend;* sind die Systeme Oxy und $O'x'y'$ *identisch*, fallen außerdem die Mittelpunkte der Ellipsen (27) und (27') oder der Hyperbeln (28) und (28') und die Scheitelpunkte der Parabeln (30) und (30') jedesmal zusammen. Entsprechende Punkte liegen dann nach (32) auf demselben Leitstrahl, entsprechende Tangenten sind nach (32') parallel.

In *weiterem* Sinne sind, indem im für m genommen wird, auch die reelle und imaginäre Ellipse:

(33) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (33') $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = m^2$

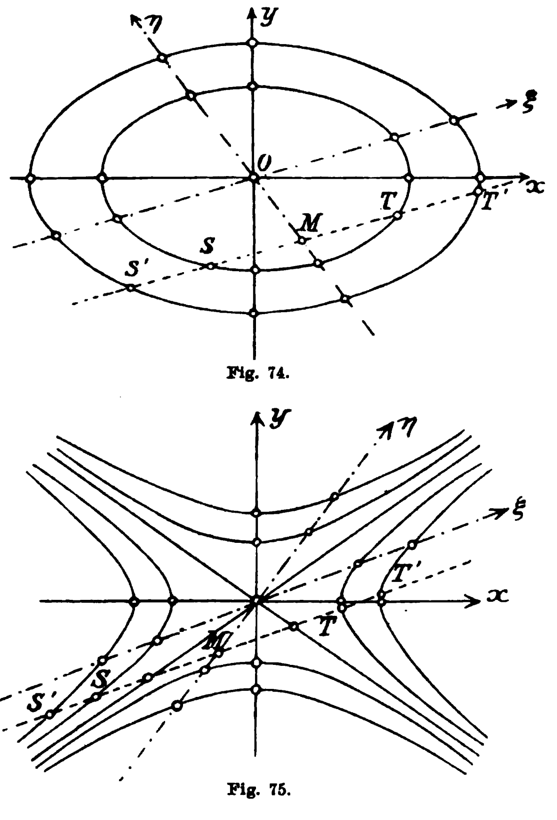
und die konjugiert liegenden Hyperbeln (Fig. 75):

(34) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (34') $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = m^2$

einander ähnlich, mit $m = 0$ auch die Hyperbel und ihre Asymptoten.

11. Konjugierte Durchmesser ähnlicher Ellipsen und Hyperbeln. Da die Bedingung (4) nur das Verhältnis $a^2 : b^2$ enthält, so folgt:

I. *Konzentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen und Hyperbeln (auch im weiteren Sinne) haben gemeinsame konjugierte Durchmesser (und Asymptoten).*



Da nun eine beliebige gemeinsame Sehne $ST, S'T'$ zweier ähnlicher Kegelschnitte einem bestimmten Durchmesser parallel ist und nach 2, I von dem konjugierten in M halbiert wird, so ist sowohl $SM = MT$ als $S'M = MT'$ (Fig. 74; 75) und folgt daher:

II. *Wenn eine Gerade zwei konzentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen oder Hyperbeln schneidet, so sind die zwischen beiden*

enthaltenen Abschnitte gleich $S'S = TT'$; und insbesondere mit $S = M = T$ (Fig. 74):

III. *Eine Sehne* $S'T'$ *des einen der beiden ähnlichen Kegelschnitte, die den anderen berührt, wird im Berührungspunkt halbiert.*

IV. Beide Sätze gelten auch für *Asymptotenpaar* und *Hyperbel.*[75])

III. Kapitel.

Die Kurve zweiter Klasse.

§ 15. Die allgemeine Gleichung der Kurve zweiter Klasse in gemeinen Linienkoordinaten.

1. Begriff der Kurve zweiter Klasse. Die Gleichungen § 12, (27), § 13, (18), (41), (43) der Ellipse, Hyperbel und Parabel und § 13, (57'), (59') des Punktepaares in Linienkoordinaten u, v, bezüglich u, v, s haben das gemeinsame Merkmal, in u, v, s vom zweiten Grade zu sein. Wir betrachten daher jetzt die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen homogenen, auf ein *rechtwinkliges Koordinatensystem* Oxy bezogenen *Linienkoordinaten* u, v, s (I § 22, **1**)[40]):

$$(1) \quad F(u,v,s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}us + 2b_{23}vs + b_{33}s^2 = 0,$$

wo die Koeffizienten der Bedingung entsprechen sollen:

$$(2) \qquad b_{kl} = b_{lk}.$$

Jede durch eine Gleichung von der Form (1) *dargestellte Kurve soll als Kurve zweiter Klasse (Strahlenbüschel zweiter Ordnung) gelten* (I § 71, (4')).

Die der Gleichung genügenden Geraden heißen *Tangenten* (§ 13, **6**) oder *Geraden der Kurve.*

Mit $s = 1$ geht man zu *nicht* homogenen Linienkoordinaten u, v über.

2. Ableitungen der Funktion F. Die halben partiellen Ableitungen der Funktion (1) bezeichnen wir zur Abkürzung mit:

$$(3) \quad \begin{cases} F_1(u, v, s) = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}s, \\ F_2(u, v, s) = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}s, \\ F_3(u, v, s) = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}s, \end{cases}$$

worauf identisch in u, v, s:

$$(4) \quad F_1(u, v, s)u + F_2(u, v, s)v + F_3(u, v, s)s = F(u, v, s)$$

und identisch in u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2:

$$(5)\quad F_1(u_1v_1s_1)u_2 + F_2(u_1v_1s_1)v_2 + F_3(u_1v_1s_1)s_2 = F_1(u_2v_2s_2)u_1 + F_2(u_2v_2s_2)v_1 + F_3(u_2v_2s_2)s_1.$$

Hieran schließen wir die weiteren Abkürzungen:

$$(6)\quad H(u, v) = b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2,$$

$$(7)\quad \begin{cases} H_1(u, v) = b_{11}u + b_{12}v, \\ H_2(u, v) = b_{21}u + b_{22}v \end{cases}$$

mit den Identitäten:

$$(8)\quad H_1(u, v)u + H_2(u, v)v = H(u, v),$$

$$(9)\quad H_1(u_1v_1)u_2 + H_2(u_1v_1)v_2 = H_1(u_2v_2)u_1 + H_2(u_2v_2)v_1.$$

3. Determinante der Kurve. Die Determinante B der Koeffizienten der linearen Ausdrücke (3) wird, wie § 9, (15), *die Determinante der Kurve zweiter Klasse* (1) genannt, ihre *Unterdeterminanten* wie dort mit $B_{kl} = B_{lk}$ bezeichnet.[41])

4. Transformation auf ein neues Koordinatensystem. Der Übergang zu einem neuen *recht- oder schiefwinkligen Koordinatensystem* $O'x'y'$ mit dem Anfangspunkt $O' = x_0, y_0$ und den Richtungskosinus α_1, β_1 und α_2, β_2 der Achsen x' und y' wird durch die Formeln vermittelt (I § 23, (2); (4) nach I § 14, (11); (14) auf schiefwinklige Achsen ausgedehnt):

$$(10)\quad \begin{cases} u' = \alpha_1 u + \beta_1 v, \\ v' = \alpha_2 u + \beta_2 v, \\ s' = x_0 u + y_0 v + s, \end{cases} \qquad (11)\quad \begin{cases} Su = A_1u' + A_2v', \\ Sv = B_1u' + B_2v', \\ Ss = Sx_0'u' + Sy_0'v' + Ss'. \end{cases}$$

Hier bedeuten (I § 14, (13)) x_0', y_0' die Koordinaten des alten Anfangspunktes O im neuen System und ist:

$$(12)\quad \begin{cases} Sx_0' = -A_1x_0 - B_1y_0, \\ Sy_0' = -A_2x_0 - B_2y_0, \end{cases} \qquad (13)\quad \begin{cases} x_0 = -\alpha_1x_0' - \alpha_2y_0', \\ y_0 = -\beta_1x_0' - \beta_2y_0'. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$(14)\quad S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \sin\omega = \sin x'y'$$

und sind:

$$(15)\quad A_1 = \beta_2,\ B_1 = -\alpha_2,\ A_2 = -\beta_1,\ B_2 = \alpha_1$$

die Unterdeterminanten der gleichnamigen Elemente in der zweireihigen Determinante S. Bei *rechtwinkligem* neuen System $O'x'y'$ ist (I § 14, (8)):

$$(16)\quad A_1 = \alpha_1,\ B_1 = \beta_1,\ A_2 = \alpha_2,\ B_2 = \beta_2;\ S = 1.$$

Geht nun die Gleichung (1) vermöge (11) über in:

$$(17)\quad S^2F(u,v,w)=b_{11}'u'^2+b_{22}'v'^2+2b_{12}'u'v'+2b_{13}'u's' + 2b_{23}'v's'+b_{33}'s'^2=0,$$

so haben die neuen Koeffizienten die Werte (vgl. (4); (5)):

$$(18)\begin{cases} b_{11}'=F_1(A_1,B_1,Sx_0')A_1+F_2(A_1,B_1,Sx_0')B_1+F_3(A_1,B_1,Sx_0')Sx_0' \\ b_{22}'=F_1(A_2,B_2,Sy_0')A_2+F_2(A_2,B_2,Sy_0')B_2+F_3(A_2,B_2,Sy_0')Sy_0' \\ b_{12}'=F_1(A_1,B_1,Sx_0')A_2+F_2(A_1,B_1,Sx_0')B_2+F_3(A_1,B_1,Sx_0')Sy_0' \end{cases}$$

$$(19)\begin{cases} b_{13}'=F_3(A_1,B_1,Sx_0')S \\ b_{23}'=F_3(A_2,B_2,Sy_0')S \end{cases}$$

$$(20)\quad b_{33}'=b_{33}S^2.$$

Die Form der Gleichung (1) *bleibt* nach (17) *in jedem recht- und schiefwinkligen System dieselbe.* Die *Klasse* der Kurve ist *vom Koordinatensystem unabhängig.*[42])

5. Geometrische Bedeutung der Klasse. Mit $s'=0$ (I § 22, (9)) erhält man aus (17) die Bedingung für die durch den Punkt O' gehenden Strahlen (Tangenten) der Kurve zweiter Klasse:

$$(21)\quad b_{11}'u'^2+2b_{12}'u'v'+b_{22}'v'^2=0.$$

Es ist (bei rechtwinkligem $O'x'y'$) die Gleichung *eines Strahlenpaares* in homogenen Koordinaten u', v' des Strahles im Büschel (I § 23, 2; § 70, (6)).

Durch einen endlichen Punkt der Ebene gehen daher zwei Tangenten der Kurve zweiter Klasse.[43])

Dasselbe folgt aus (17) mit $v'=0$ für einen *unendlich fernen* Punkt, denjenigen der beliebig gewählten y'-Achse (I § 70, (7)).

Eine *Ausnahme* tritt ein, wenn alle Koeffizienten der Gleichung (21) verschwinden. *Der Punkt gehört* dann als Träger eines Strahlbüschels *selbst der Kurve an.*

Für das Strahlenpaar (21) kann man, da es nur auf den Punkt O' ankommt, die Achsen x' und y' mit x und y *parallel* nehmen, also neben (16) noch $\alpha_1=\beta_2=1$, $\alpha_2=\beta_1=0$ und damit nach (13) $x_0'=-x_0$, $y_0'=-y_0$ setzen. Dann wird in (21):

$$(22)\begin{cases} b_{11}'=b_{11}-2b_{13}x_0+b_{33}x_0^2,\ b_{22}'=b_{22}-2b_{23}y_0+b_{33}y_0^2, \\ b_{12}'=b_{12}-b_{13}y_0-b_{23}x_0+b_{33}x_0y_0. \end{cases}$$

6. Bestimmung der Kurve zweiter Klasse durch fünf Tangenten. Dual entsprechend dem Satze § 9, 9 ergibt sich auch hier:

Die Kurve zweiter Klasse ist durch fünf ihrer Tangenten bestimmt.[44])

Sind u_i, v_i, s_i $(i = 1, 2, .. 5)$ die Koordinaten der fünf gegebenen Tangenten, so lautet die Gleichung der Kurve:

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} u^2 & v^2 & uv & us & vs & s^2 \\ u_1^2 & v_1^2 & u_1v_1 & u_1s_1 & v_1s_1 & s_1^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_5^2 & v_5^2 & u_5v_5 & u_5s_5 & v_5s_5 & s_5^2 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 16. Tangenten von einem Punkte an die Kurve; Berührungspunkte.

1. Erste Form der Gleichung des Tangentenpaares durch einen Punkt. Läßt man (Fig. 76) von einem Punkte $O' = x_0, y_0$ der Ebene ein zu Oxy paralleles Koordinatensystem $O'x'y'$ ausgehen, so kann man (I § 23, 2) als Koordinaten eines Strahles p im Büschel des Punktes O', wie in § 15, (21), die beiden ersten Koordinaten u', v' der Geraden p im System $O'x'y'$ wählen, die sich wie die Richtungskosinus der Normale von p verhalten (die dritte s' ist Null), aber auch den Richtungswinkel φ gegen die x'- oder x-Achse, beziehungsweise $\operatorname{tg}\varphi$ benutzen. Zwischen diesen Koordinaten besteht (I § 7, (3)) die Beziehung:

$$(1) \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{u'}{v'}.$$

Demnach folgt aus § 15, (21):

Die Gleichung der beiden durch den Punkt $O' = x_0, y_0$ gehenden Tangenten g_1, g_2 der Kurve zweiter Klasse:

$$(2) \qquad F(u, v, s) = 0$$

lautet in der Koordinate $\operatorname{tg}\varphi$ im Strahlbüschel O':

$$(3) \qquad b'_{11}\operatorname{tg}^2\varphi - 2b'_{12}\operatorname{tg}\varphi + b'_{22} = 0,$$

wo $b'_{11}, b'_{12}, b'_{22}$ die Werte § 15, (22) *haben* (§ 7 (31)).

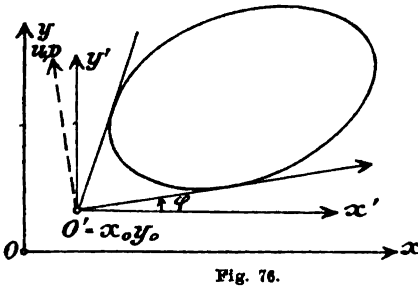


Fig. 76.

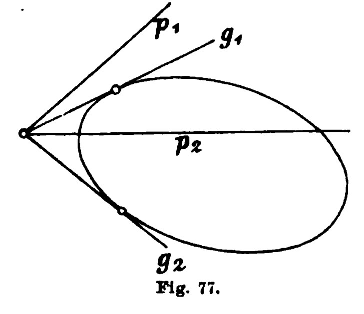


Fig. 77.

2. Zweite Form der Gleichung des Tangentenpaares durch einen Punkt. Wir denken uns jetzt den Punkt O' nicht durch seine Koordinaten x_0, y_0, sondern als Schnittpunkt zweier Geraden $p_1 = u_1, v_1, s_1$

und $p_2 = u_2, v_2, s_2$ gegeben (Fig. 77). Eine Gerade p des Strahlbüschels an diesem Schnittpunkt hat alsdann stets Koordinaten von der Form (I § 22, (24)):

$$u = u_1 + \lambda u_2, \quad v = v_1 + \lambda v_2, \quad s = s_1 + \lambda s_2, \tag{4}$$

wo λ einen Parameter, die Koordinate des Strahles p im Büschel, bedeutet.[45]) Die Gerade (4) gehört der Kurve (2) an (ist Tangente), wenn:

$$F(u_1 + \lambda u_2, v_1 + \lambda v_2, s_1 + \lambda s_2) = 0 \tag{5}$$

oder:

$$F_{11} + 2F_{12}\lambda + F_{22}\lambda^2 = 0. \tag{6}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$F_{11} = F(u_1, v_1, s_1), \quad F_{22} = F(u_2, v_2, s_2), \tag{7}$$

$$F_{12} = F_1^{(1)}u_2 + F_2^{(1)}v_2 + F_3^{(1)}s_2 = F_1^{(2)}u_1 + F_2^{(2)}v_1 + F_3^{(2)}s_1 \tag{8}$$

und (§ 15, (3)):

$$F_1^{(1)} = F_1(u_1, v_1, s_1), \ldots, \ldots; \quad F_1^{(2)} = F_1(u_2, v_2, s_2), \ldots, \ldots \tag{9}$$

Die quadratische Gleichung (6) *bestimmt die Parameterwerte* $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ *der beiden Tangenten* g_1 *und* g_2 *der Kurve* (2), *die durch den Punkt* $p_1 \times p_2$ *hindurchgehen* (§ 7, (30); (34)).

3. Berührungspunkt einer Geraden der Kurve. Gehört die Gerade p_1 selbst der Kurve an, so daß:

$$F_{11} = 0, \tag{10}$$

so ist die eine Wurzel der Gleichung (6) $\lambda_1 = 0$. Soll auch die andere Wurzel $\lambda_2 = 0$ werden, muß auch:

$$F_{12} = F_1^{(1)}u_2 + F_2^{(1)}v_2 + F_3^{(1)}s_2 = 0 \tag{11}$$

sein. Es folgt daher unter Weglassung des Index 2:

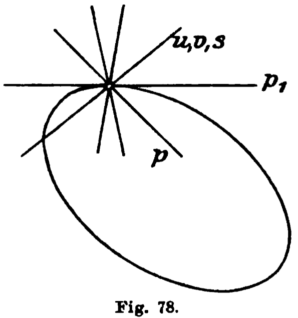


Fig. 78.

Alle Geraden $p = u, v, s$, *durch deren Schnittpunkt mit einer gegebenen Tangente* $p_1 = u_1, v_1, s_1$ *der Kurve* (1) *nur diese eine Tangente doppelt zählend hindurchgeht, gehen durch einen Punkt*[47]) (Fig. 78)

$$F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}s = 0. \tag{12}$$

Er heißt der *Berührungspunkt der Tangente* (vgl. § 10, (17)).

4. Schnittpunktepaar einer Geraden mit der Kurve. Die Gleichung (6) hat überhaupt zwei gleiche Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2$, wenn:

$$F_{11}F_{22} - F_{12}^2 = 0. \tag{13}$$

Durch den Punkt $p_1 \times p_2$ geht dann nur *eine* Tangente $g_1 = g_2$ der Kurve (2). Daher stellt bei festem u_1, v_1, s_1 die Gleichung[48]):

(14) $$F_{11} F(u, v, s) - (F_1^{(1)} u + F_2^{(1)} v + F_3^{(1)} s)^2 = 0$$

den Ort aller Geraden u, v, s dar (Fig. 79), durch deren Schnittpunkt mit der Geraden u_1, v_1, s_1 nur *eine* Tangente der Kurve (2) geht. Es ist die *Gleichung des Schnittpunktepaares der Kurve und der Geraden* u_1, v_1, s_1 *in laufenden Koordinaten* u, v, s (vgl. § 10, (23)).

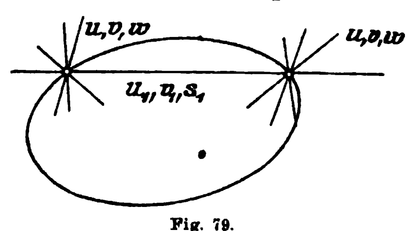


Fig. 79.

5. Begriff der Doppelgeraden (Doppeltangente). Wenn für eine Gerade u_1, v_1, s_1:

(15) $$F_1^{(1)} = 0, \quad F_2^{(1)} = 0, \quad F_3^{(1)} = 0,$$

womit nach § 15, (4) schon von selbst die Gleichung (10) besteht, so wird *der Berührungspunkt* (12) *unbestimmt*, oder die Tangente u_1, v_1, s_1 der Kurve wird von *jeder* Geraden u, v, s in einem Punkte geschnitten, durch den *nur* die Tangente u_1, v_1, s_1 doppelt zählend hindurchgeht (vgl. § 20, 20). Eine solche Gerade heißt eine *Doppelgerade (Doppeltangente) der Kurve* (2).

Die Bedingungen einer Doppeltangente sind daher (mit Weglassung des Index 1)[49]):

(16) $$\begin{cases} F_1(u, v, s) = b_{11} u + b_{12} v + b_{13} s = 0, \\ F_2(u, v, s) = b_{21} u + b_{22} v + b_{23} s = 0, \\ F_3(u, v, s) = b_{31} u + b_{32} v + b_{33} s = 0. \end{cases}$$

6. Recht- und schiefwinklige Systeme. Die Entwicklungen 2—5 gelten sowohl für rechtwinklige als auch für schiefwinklige Koordinaten u, v, s.

§ 17. Harmonische Polaren und Pol einer Geraden.

1. Harmonische Polaren. Wenn die quadratische Gleichung § 16, (6) zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln λ_1 und $\lambda_2 = -\lambda_1$ hat, so sind (§ 8, (21)) die beiden Tangenten g_1 und g_2 der Kurve zweiter Klasse (Fig. 77):

(1) $$F(u, v, s) = 0$$

zu den beiden Geraden p_1 und p_2 *harmonisch.* Die Bedingung hierfür ist das Verschwinden des mittleren Koeffizienten:

(2) $$F_{12} = 0.$$

Sie kann nach § 16, (8) auch in den beiden Formen:

(3) $$F_1^{(1)} u_2 + F_2^{(1)} v_2 + F_3^{(1)} s_2 = F_1^{(2)} u_1 + F_2^{(2)} v_1 + F_3^{(2)} s_1 = 0$$

geschrieben werden und ist in den Koordinaten u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2 der beiden Geraden p_1 und p_2 symmetrisch.

Zwei durch die Bedingung (2) *oder* (3) *verknüpfte Strahlen* p_1 *und* p_2 *der Ebene sind zu den beiden durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten* g_1 *und* g_2 *der Kurve* (1) *harmonisch. Man nennt sie harmonische Polaren* (vgl. später § 18, **1**) *in bezug auf die Kurve.*[51])

2. Involution harmonischer Polaren. In entsprechendem Sinne, wie § 11, **6** gilt der Satz:

Die Kurve zweiter Klasse bestimmt an jedem Punkte der Ebene, von dem zwei Tangenten an sie gelegt werden können, eine Involution harmonischer Polaren.[52])

Die Gleichung der Involution lautet, je nachdem für die beiden Tangenten die Gleichung § 16, (3) oder (6) zugrunde gelegt wird, nach § 8, **10**:

$$b_{11}' \operatorname{tg}\varphi' \operatorname{tg}\varphi'' - b_{12}'(\operatorname{tg}\varphi' + \operatorname{tg}\varphi'') + b_{22}' = 0 \tag{4}$$

oder:

$$F_{11} + F_{12}(\lambda' + \lambda'') + F_{22}\lambda'\lambda'' = 0. \tag{5}$$

3. Der Pol einer Geraden. Nach (3) ist *der Ort aller harmonischen Polaren* p_2 *einer festen Geraden* p_1 *ein Punkt, welcher der Pol* (vgl. § 11, **7**) *der Geraden* p_1 *heißt.*

Mit Unterdrückung des Index 2 in (3) erhält man:

$$F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}s = 0 \tag{6}$$

als *Gleichung des Poles der Geraden* $p_1 = u_1, v_1, s_1$ *in bezug auf die Kurve* (1) in laufenden Koordinaten u, v, s.[57])

Zur *Konstruktion des Poles* einer Geraden benutzt man, genau dual zu § 11, **8**, das vollständige Vierseit der vier Tangenten der Kurve, die durch zwei beliebige Punkte der Geraden gehen. Die Kurve ist dabei als Tangentengebilde gegeben gedacht.

4. Pol und Berührungspunkt. Die Gerade p_1 geht immer dann und nur dann durch ihren Pol (6), wenn:

$$F_1^{(1)}u_1 + F_2^{(1)}v_1 + F_3^{(1)}s_1 = F(u_1, v_1, s_1) = F_{11} = 0, \tag{7}$$

also wenn sie der Kurve angehört. Der Pol (6) ist dann nach § 16, (12) der Berührungspunkt der Geraden, also (§ 11, **9**):

I. *Eine Gerade liegt immer dann und nur dann mit ihrem Pol vereinigt, wenn sie eine Tangente der Kurve ist.*

II. *Eine Gerade ist immer dann und nur dann ihre eigene harmonische Polare, wenn sie eine Tangente der Kurve ist.*

III. *Der Pol einer Tangente der Kurve ist der Berührungspunkt der Tangente.*[55])

5. Pol und Tangentenpaar. Jede den Gleichungen (6) und (1) genügende Gerade u, v, s genügt auch der Gleichung § 16, (14) und jede den Gleichungen (1) und § 16, (14) genügende Gerade auch der Gleichung (6). Daraus folgt (§ 11, **10**):

Wenn eine Tangente der Kurve durch den Pol der Geraden p_1 geht, so geht sie auch durch einen der beiden Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden p_1 und umgekehrt, oder:

Die durch die Schnittpunkte der Kurve mit einer beliebigen Geraden gehenden Tangenten schneiden sich im Pol der Geraden.

6. Die Koordinaten des Poles. Die Koeffizienten der Gleichung (6) sind bis auf einen Faktor σ die Koordinaten des Poles von $p_1 = u_1, v_1, s_1$, also mit Weglassung des Index 1:

Die Koordinaten des Poles der Geraden u, v, s in bezug auf die Kurve (1) *sind:*

$$(8) \qquad \begin{cases} \sigma x = F_1 = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}s, \\ \sigma y = F_2 = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}s, \\ \sigma t = F_3 = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}s. \end{cases}$$

Nach § 16, (16) folgt daher:

Jede Gerade der Ebene, die keine Doppelgerade ist, hat einen bestimmten Pol.

7. Involutorische Beziehung zweier harmonischer Polaren. Die Doppelform (3) der Bedingung harmonischer Polaren hat mit Rücksicht auf (6) die Bedeutung (§ 11, **14**):

I. *Von zwei harmonischen Polaren geht jede durch den Pol der andern*; oder:

II. *Geht die Gerade p_2 durch den Pol P_1 der Geraden p_1, so liegt der Pol P_2 der Geraden p_2 auf der Geraden p_1*; und mit Rücksicht auf **4**, III:

III. *Der Pol P_2 einer Geraden p_2, die durch den Berührungspunkt P_1 einer Tangente p_1 geht, liegt auf p_1.*

8. Pole der Strahlen eines Büschels. Die duale Schlußweise zu § 11, **15** gibt die Sätze:

I. *Die Pole der Strahlen eines Büschels bilden eine zu ihm projektive Punktreihe;* oder kürzer:

II. *Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol eine Gerade.*

9. Die Polare eines Punktes. Diese Gerade heißt die *Polare des Punktes* (§ 11, **16**).

I. *Die Polare eines Punktes ist die Verbindungslinie der Pole zweier durch den Punkt gehender Strahlen.*

II. *Die Pole aller durch einen Punkt gehender Strahlen liegen auf dessen Polare.*

III. *Ein Punkt ist der Pol seiner Polare,* oder:

IV. *Die Polare eines Punktes ist die Gerade, deren Pol er ist.*

V. *Die Polare eines Berührungspunktes ist seine Tangente, die mit ihm vereinigt liegt* (§ 11, **17**).

10. Die Koordinaten der Polare. Wie in § 11, **18** folgt:

Die Koordinaten der Polare eines Punktes x, y, t sind mit einem Faktor ϱ:

$$(9) \qquad \begin{cases} \varrho u = f_1 = B_{11}x + B_{12}y + B_{13}t, \\ \varrho v = f_2 = B_{21}x + B_{22}y + B_{23}t, \\ \varrho s = f_3 = B_{31}x + B_{32}y + B_{33}t. \end{cases}$$

Jeder Punkt, für den die hierin zur Abkürzung mit f_k bezeichneten linearen Funktionen seiner Koordinaten nicht sämtlich verschwinden, hat eine bestimmte Polare.

11. Gleichung der Polare. Wie in § 11, **19** geht aus (9) hervor:

Die Gleichung der Polare des Punktes $P_1 = x_1, y_1, t_1$ in bezug auf die Kurve (1) *ist in laufenden Punktkoordinaten:*

$$(10) \qquad f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t = 0.$$

12. Konjugierte Elemente. Indem wir, wie § 11, **20**, *zwei gleichnamige Elemente konjugiert nennen, wenn jedes von beiden mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt,* haben wir in:

$$(11) \qquad f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}y_2 + f_3^{(1)}t_2 = 0$$

und in (3) die Bedingungen für zwei *konjugierte Punkte* und *Gerade.*

Zwei konjugierte Geraden bedeutet dasselbe wie zwei harmonische Polaren.

IV. Kapitel.

Unterscheidung der Kurven und ihrer Polarsysteme nach dem Rang.

§ 18. Die eigentlichen Kurven zweiter Ordnung und Klasse mit ihrem Polarsystem.

1. Einteilung nach der Anzahl der Doppelelemente. Die allgemeine Kurve zweiter Ordnung und die allgemeine Kurve zweiter Klasse sind in §§ 9—11 und §§ 15—17 in *dual entsprechender* Weise,

aber *völlig unabhängig voneinander* betrachtet worden. Daher haben auch die für beide Kurven mit *denselben* Worten Pol und Polare bezeichneten Begriffe zunächst *verschiedene* Bedeutungen.

Erst in §§ 18—19 werden wir die Frage beantworten, ob und unter welchen Umständen eine Kurve zweiter Ordnung und eine Kurve zweiter Klasse *ein und dasselbe* Gebilde darstellen oder nicht. Hierzu bedarf es aber einer *Einteilung der beiderlei Kurven nach der Anzahl der Doppelelemente.*

Die Gleichungen der Doppelpunkte § 10, (28) stellen drei Gerade dar, nach § 11, (15) die Polaren der Eckpunkte des Koordinatendreiecks $x, y, t = 1, 0, 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1$ (I § 22 (18)).

Drei Gerade haben entweder keinen oder einen Punkt gemein oder fallen alle drei zusammen. Das dual Entsprechende gilt im Anschluß an die Gleichungen § 16, (16).

Die Kurve zweiter Ordnung hat entweder keinen oder einen Doppelpunkt oder ihre Doppelpunkte erfüllen eine Gerade.

Die Kurve zweiter Klasse hat entweder keine oder eine Doppelgerade oder ihre Doppelgeraden bilden ein Strahlbüschel.

Man nennt die Kurven zweiter Ordnung oder Klasse, diesen drei Fällen entsprechend, *vom Range 3, 2 oder 1.*[76])

2. Die Kurven ohne Doppelelement. Die drei Geraden § 10, (28) haben immer dann und nur dann keinen Punkt gemein, wenn die Determinante § 9, (15) von Null verschieden ist (I § 24, 5):

Die Kurve zweiter Ordnung § 9, (3):

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \cdots \cdots + 2a_{12}xy = 0 \tag{1}$$

hat keinen Doppelpunkt, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist:

$$A = |a_{kl}| \neq 0. \tag{2}$$

Sie heißt dann eine *eigentliche Kurve zweiter Ordnung.*

Die Kurve zweiter Klasse § 15, (1):

$$F = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + \cdots \cdots + 2b_{12}uv = 0 \tag{1'}$$

hat keine Doppelgerade, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist:

$$B = |b_{kl}| \neq 0. \tag{2'}$$

Sie heißt dann eine *eigentliche Kurve zweiter Klasse.*

3. Bestimmtheit der Polarelemente bei den eigentlichen Kurven. Das Fehlen eines Doppelelementes findet nach § 11, **13** und § 17, **6** einen weiteren charakteristischen Ausdruck in dem Satze:

I. *In bezug auf eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung hat jeder Punkt der Ebene eine bestimmte Polare.*

I'. *In bezug auf eine eigentliche Kurve zweiter Klasse hat jede Gerade der Ebene einen bestimmten Pol.*

Für jede Determinante dritten Grades A ist aber die Determinante der neun Unterdeterminanten A_{kl} (I Anm. 1, II, (4)):

(3) $$|A_{kl}| = A^2.$$

Daher können unter der Voraussetzung (2) oder (2') auch die Ausdrücke F_k in § 11, (26) oder f_k in § 17, (9) nicht gleichzeitig verschwinden, so daß sich zu I der Zusatz ergibt:

II. *Jede Gerade der Ebene hat einen bestimmten Pol.*

II'. *Jeder Punkt der Ebene hat eine bestimmte Polare.*

4. Involutorische Beziehung zwischen Pol und Polare. Unter der Voraussetzung (2) sind die Gleichungen § 11, (26) die *Auflösungen* der Gleichungen § 11, (21) nach x, y, t, falls $\varrho\sigma = A$ genommen wird. Die beiden Sätze § 11, **16**, I und IV enthalten daher *gleichbedeutende* Definitionen des Poles x, y, t einer Geraden u, v, s. Ebenso sind für (2') die Gleichungen § 17, (9) die *Auflösungen* der Gleichungen § 17, (8).

In bezug auf die eigentliche Kurve zweiter Ordnung oder Klasse gehören je ein Punkt und eine Gerade der Ebene wechselseitig als Pol und Polare zusammen.

Zwischen beiden Elementen bestehen die Gleichungen § 11, (21) und (26), bezüglich § 17, (8) und (9).

5. Vereinigte Lage von Pol und Polare. Wenn bei der eigentlichen Kurve zweiter Ordnung eine Gerade Tangente ist, liegt ihr Pol nach § 11, **17** mit ihr vereinigt. Wenn umgekehrt eine Gerade mit ihrem Pol vereinigt liegt, ist dieser nach § 11, **9** ein Punkt der Kurve und die Gerade Tangente in ihm. Ebenso dual nach § 17, **9**; **4**. Sowohl für die Kurve zweiter Ordnung als die zweiter Klasse gilt daher der Satz:

Die vereinigte Lage von Pol und Polare ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Pol ein Punkt und die Polare eine Tangente der Kurve ist.

6. Gleichung der Kurve zweiter Ordnung in Linienkoordinaten. Zwischen Pol x, y, t und Polare u, v, s der Kurve (1) bestehen nach **4** die Gleichungen § 11, (26). Die Bedingung der vereinigten Lage beider, nämlich:

(4) $$ux + vy + st = 0,$$

ist nach **5** zugleich die Bedingung, daß u, v, s Tangente der Kurve (1) ist. Eliminiert man aber aus (4) mittels § 11, (26) die Koordinaten x, y, t des Poles, so erhält man in:

(5) $$F_1 u + F_2 v + F_3 s = A_{11} u^2 + A_{22} v^2 + \cdots + 2 A_{12} uv = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Tangente u, v, s der Kurve (1). Also mit Hinzufügung des dualen Satzes:

Die Kurve zweiter Ordnung (1) *hat in laufenden Linienkoordinaten die Gleichung:*

(6) $A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + \cdots + 2A_{12}uv = 0.$

Ihr genügen alle *Tangenten* der Kurve (1).

Die Kurve zweiter Klasse (1′) *hat in laufenden Punktkoordinaten die Gleichung:*

(6′) $B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + \cdots + 2B_{12}xy = 0.$

Ihr genügen alle *Berührungspunkte* der Kurve (1′).

7. Identität der eigentlichen Kurven zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichung (6) fällt unter die allgemeine Form (1′) der Kurve zweiter Klasse, nur daß die Koeffizienten b_{kl} mit A_{kl} bezeichnet sind, ebenso (6′) unter die Form (1). Unter der Voraussetzung (2) ist aber nach (3) mit Rücksicht auf (2′) die Kurve zweiter Klasse (6) eine eigentliche, also:

Jede eigentliche Kurve zweiter Ordnung ist zugleich eine eigentliche Kurve zweiter Klasse und umgekehrt.[77])

8. Vereinigte Behandlung beider. Indem wir also in der Gleichung (1) alle Kurven zweiter Ordnung umfassen, umfassen wir in der Gleichung (6) zugleich alle Kurven zweiter Klasse. Wir vereinigen daher die bisher getrennte Behandlung beider, indem wir:

$$b_{kl} = A_{kl} \tag{7}$$

setzen, womit zugleich (I Anm. 1, II, (5)) wird:

$$B_{kl} = A a_{kl}. \tag{8}$$

Wir betrachten also fernerhin *dieselbe eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse, deren Gleichung in Punktkoordinaten:*

$$f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{23}yt + 2a_{31}tx + 2a_{12}xy = 0 \tag{9}$$

und deren Gleichung in Linienkoordinaten lautet:

$$F = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}s^2 + 2A_{23}vs + 2A_{31}su + 2A_{12}uv = 0. \tag{10}$$

Die Koeffizienten A_{kl} sind nach § 9, (16) die Unterdeterminanten der Determinante der a_{kl} und die a_{kl} nach (8) bis auf den Faktor A die Unterdeterminanten der Determinante der A_{kl}, so daß es ganz gleich ist, welche der beiden Gleichungen (9) und (10) die gegebene ist.

9. Identität der Polarentheorie der Kurve zweiter Ordnung und Klasse. Infolge der Annahme (7) werden nun die Formeln § 17, (9) mit § 11, (21) und § 17, (8) mit § 11, (26) identisch.

Die in § 11 und § 17 zunächst unabhängig voneinander erklärten gleichbenannten *Begriffe von Pol und Polare* fallen also für die eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse (9), (10) je zusammen, so daß für diese Kurve die *Sätze von* § 11 *und* § 17 *gleichzeitig gelten.*

Dabei ist wegen (2) die § 11, **15**, III erwähnte Voraussetzung immer erfüllt. Wir wiederholen nur die *Formeln* der Polarentheorie nochmals in ihrer durch die Annahme (7) vereinigten Form.

10. Pol und Polare. Mit den Abkürzungen (§ 9, (5); § 15, (3)):

(11) $f_i = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}t$ (11′) $F_i = A_{i1}u + A_{i2}v + A_{i3}s$,

$i = 1, 2, 3$, lauten die *Beziehungen zwischen den Koordinaten von Pol und Polare* (§ 11, (21); (26); § 15, (8); (9)):

(12) $\varrho u = f_1,\ \varrho v = f_2,\ \varrho s = f_3$ (12′) $\sigma x = F_1,\ \sigma y = F_2,\ \sigma t = F_3$.

Die *Gleichungen der Polare des Punktes* x_1, y_1, t_1 *und des Poles der Geraden* u_1, v_1, s_1 sind (§ 11, (15); § 17, (6)):

(13) $f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}t = 0$ (13′) $F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}s = 0$.

Die *Bedingungen für zwei konjugierte Punkte* x_1, y_1, t_1 und x_2, y_2, t_2 *oder Gerade* u_1, v_1, s_1 und u_2, v_2, s_2 lauten (§ 11, (9); § 17, (3)):

(14) $$f_{12} = f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}y_2 + f_3^{(1)}t_2 = 0,$$

(14′) $$F_{12} = F_1^{(1)}u_2 + F_2^{(1)}v_2 + F_3^{(1)}s_2 = 0.$$

Sie geben mit $x_2, y_2, t_2 = x_1, y_1, t_1 = x, y, t$ und $u_2, v_2, s_2 = u_1, v_1, s_1 = u, v, s$ wieder die Gleichungen (9) und (10), *als Örter der Punkte und Geraden, die sich selbst konjugiert sind.*

11. Kurve und Polarsystem. Die durch die Gleichungen (12); (12′) ausgedrückte Beziehung zwischen Punkten und Geraden der Ebene heißt ein *Polarsystem.*[78])

Zu jeder eigentlichen Kurve zweiter Ordnung und Klasse (9); (10) *gehört ein solches Polarsystem,* da es durch die sechs Koeffizienten a_{kl} der Gleichung (9) bestimmt ist.

Aber auch umgekehrt führen die Gleichungen (12), wenn sie mit ihren Auflösungen (12′) vorliegen, zu der Kurve zurück. Ist diese doch der Ort der Punkte, die mit ihren Polaren, oder das Umhüllungsgebilde der Geraden, die mit ihren Polen vereinigt liegen. Man erhält in der Tat ihre Gleichungen (9) und (10), indem man bezüglich die Werte (12) und (12′) in die Bedingung (4) einsetzt.

Zu jedem durch die Gleichungen (12) *gegebenen Polarsystem* ($a_{kl} = a_{lk}$, $A \neq 0$) *gehört eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse.*

12. Polarsystem und allgemeine Korrelation. Das Polarsystem ist ein durch die Bedingung:

$$a_{kl} = a_{lk} \tag{15}$$

bezeichneter *Sonderfall der allgemeinen Korrelation* der Ebene, bei welcher diese Bedingung nicht notwendig gefordert wird (I § 67, (16)).

In diesem allgemeinen Falle hat man zwei vereinigt gelegene Ebenen E und E' zu unterscheiden; jeder Punkt ist doppelt zu denken, einmal als Punkt P der einen und einmal als Punkt P' der andern Ebene, ebenso jede Gerade als p und p'. Nun entspricht einerseits durch die Gleichungen:

$$\varrho' u' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} t, \ldots \qquad (A \neq 0) \tag{16}$$

und ihre Auflösungen:

$$\sigma x = A_{11} u' + A_{21} v' + A_{31} s', \ldots \tag{17}$$

jedem Punkte $P = x, y, t$ der ersten Ebene eine Gerade $p' = u', v', s'$ der zweiten und umgekehrt jeder Geraden p' ein Punkt P. Andererseits aber entspricht der Geraden $p = u, v, s$ durch zwei Punkte P_1 und P_2 der ersten ein Punkt $P' = x', y', t'$ der zweiten als Schnittpunkt der entsprechenden Geraden p_1' und p_2'. Für seine Koordinaten ergibt sich nach der Methode § 11, 18:

$$\sigma' x' = A_{11} u + A_{12} v + A_{13} s, \ldots, \tag{18}$$

und hieraus folgt durch Auflösung:

$$\varrho u = a_{11} x' + a_{21} y' + a_{31} t', \ldots \tag{19}$$

Vereinigt gelegenen Punkten $x, y, t = x', y', t'$ beider Ebenen entsprechen also nach (16) und (19) im allgemeinen *verschiedene Gerade* u', v', s' und u, v, s, *vereinigt gelegenen Geraden* $u, v, s = u', v', s'$ nach (18) und (17) *verschiedene Punkte* x', y', t' und x, y, t.

Sollten vereinigt gelegenen Punkten stets auch vereinigt gelegene Geraden entsprechen, müßten die neun Koeffizienten von (16) denen von (19) proportional sein, also mit einem Faktor τ:

$$a_{11} = \tau a_{11}, \quad a_{12} = \tau a_{21}, \quad a_{21} = \tau a_{12}, \ldots \tag{20}$$

Falls nun nicht alle a_{kl} $(k \neq l)$ verschwinden, also etwa a_{12} und a_{21} nicht beide 0 sind, folgt das Verschwinden der Determinante der zweiten und dritten Gleichung (20): $1 - \tau^2 = 0$. Den Werten $\tau = 1$ und $\tau = -1$ entsprechen aber die beiden Möglichkeiten:

$$(21) \quad a_{kl} = a_{lk} \quad \text{oder} \quad (22) \quad a_{kk} = 0, \quad a_{kl} = -a_{lk}$$

für $k, l = 1, 2, 3$. Die erste schließt auch den zuerst ausgeschlossenen Fall ein, daß alle a_{kl} $(k \neq l)$ verschwinden. Die Annahme (22) fällt

aber fort, weil die alsdann schiefe Determinante dritten Grades $A = |a_{kl}| = 0$ wäre (I Anm. 1, IV, 7).

Die allgemeine Korrelation (16) *der Ebene ist also nur im Falle* (21), *dem Falle des Polarsystems der eigentlichen Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse, „involutorisch", so daß vereinigt gelegenen Punkten stets auch vereinigt gelegene Gerade entsprechen und umgekehrt.*

Es ist dann nicht mehr nötig, die Punkte P und P', die Geraden p und p' zu unterscheiden und die Gleichungen (16) fallen mit (19), (17) mit (18) zusammen (vgl. § 8, **15**).

§ 19. Kurven zweiter Ordnung oder Klasse mit Doppelelementen.

1. Bedingung für ein Doppelelement. Wenn die Determinante A der Kurve (§ 18, (2)) verschwindet, ohne daß alle Unterdeterminanten A_{kl} (I Anm. 1, II, (2)) verschwinden, so gibt es einen Punkt, der den drei Gleichungen § 10, (28) genügt (I § 24, 4) und dessen Koordinaten aus je zwei dieser Gleichungen bestimmt werden können.[79])

Die Kurve zweiter Ordnung § 18, (1) *hat, wenn:*

(1) $A = 0$, A_{kl} *nicht alle* 0,

einen Doppelpunkt P_0 *mit den Koordinaten:*

(2) $x_0 : y_0 : t_0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}, \quad k = 1, 2, 3.$

Die Kurve zweiter Klasse § 18, (1') *hat, wenn:*

(1') $B = 0$, B_{kl} *nicht alle* 0,

eine Doppelgerade p_0 *mit den Koordinaten:*

(2') $u_0 : v_0 : s_0 = B_{k1} : B_{k2} : B_{k3}, \quad k = 1, 2, 3.$

2. Andere Form der Bedingung. Wir bezeichnen zur Abkürzung die Summe der *„Hauptunterdeterminanten"* der Determinante A mit:

$$(3) \qquad A' = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

und die Summe den *„Hauptelemente"* („Diagonalelemente") mit:

$$(4) \qquad A'' = a_{11} + a_{22} + a_{33};$$

und entsprechend für die Determinante B.

Da nun (I Anm. 1, II, (5)) unbedingt:

$$(5) \quad A a_{11} = A_{22} A_{33} - A_{23}^2, \quad A a_{22} = A_{33} A_{11} - A_{31}^2, \quad A a_{33} = A_{11} A_{22} - A_{12}^2,$$

so folgt aus (3):

$$(6) \qquad \begin{cases} A_{11} A' = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A(a_{22} + a_{33}), \\ A_{22} A' = A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + A(a_{33} + a_{11}), \\ A_{33} A' = A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 + A(a_{11} + a_{22}). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich durch Addition die *identische Gleichung*[80]):

$$(7) \quad A'^2 = A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 + 2A_{23}^2 + 2A_{31}^2 + 2A_{12}^2 + 2AA''.$$

Wenn nun A und A' verschwinden, verschwinden bei reellen a_{kl} nach (7) auch alle A_{kl}; wenn aber alle A_{kl} verschwinden, so ist $A = 0$ (I Anm. 1, II, (4)) und $A' = 0$.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden aller A_{kl} sind (bei reellen a_{kl}):

$$(8) \qquad A = 0, \quad A' = 0.$$

Die Bedingungen (1) *und* (1′) *eines Doppelelementes sind daher ersetzbar durch:*

$$(9) \qquad A = 0, \quad A' \neq 0. \qquad\qquad (9') \qquad B = 0, \quad B' \neq 0.$$

3. Kurven mit Doppelelement als Linienpaare und Punktepaare. Ein Punkt der Geraden, die den Doppelpunkt $P_0 = x_0, y_0, t_0$ mit einem beliebigen Punkte $P_1 = x_1, y_1, t_1$ der Ebene verbindet, hat die Koordinaten (I § 22, (24′)):

$$(10) \qquad x = x_0 + \lambda x_1, \; y = y_0 + \lambda y_1, \; t = t_0 + \lambda t_1.$$

Die für ihn gebildeten Ausdrücke f_1, f_2, f_3 (§ 9, (5)) werden daher mit Rücksicht auf § 10, (28):

$$(11) \qquad f_1 = f_1^0 + \lambda f_1^{(1)} = \lambda f_1^{(1)}, \; f_2 = \lambda f_2^{(1)}, \; f_3 = \lambda f_3^{(1)}.$$

Nach § 9, (6) wird hiernach für den Punkt (10):

$$f = f(x, y, t) = f_1 x + f_2 y + f_3 t$$
$$= \lambda \{ f_1^{(1)}(x_0 + \lambda x_1) + f_2^{(1)}(y_0 + \lambda y_1) + f_3^{(1)}(t_0 + \lambda t_1) \}$$

und nach § 9, (7); (6) und § 10, (28):

$$(12) \quad f = \lambda(f_1^0 x_1 + f_2^0 y_1 + f_3^0 t_1) + \lambda^2 f(x_1, y_1, t_1) = \lambda^2 f(x_1, y_1, t_1).$$

Daher liegt der Punkt (10) unabhängig von λ auf der Kurve selbst immer dann und nur dann, wenn x_1, y_1, t_1 auf ihr liegt, oder:

Ist P_0 der Doppelpunkt und P_1 ein anderer Punkt der Kurve, so gehört stets die ganze Gerade $P_0 P_1$ der Kurve an.

Die Kurve besteht daher aus *Strahlen*, die durch den Punkt P_0 gehen, und zwar *zwei* solchen Strahlen, da sie von irgendeiner Geraden der Ebene in zwei Punkten geschnitten wird (§ 9, 8). Die beiden Strahlen, aus denen die Kurve besteht, müssen *getrennte* Strahlen sein; denn fielen sie in einen Doppelstrahl zusammen, wäre nach § 10, 6 jeder Punkt dieses Doppelstrahles ein Doppelpunkt der Kurve, während sie nur einen Doppelpunkt hat.

I. *Unter den Bedingungen* (1) *oder* (9) *ist die Kurve zweiter Ordnung* § 18, (1) *ein getrenntes Strahlenpaar mit dem Schnittpunkt* (2).

I′. *Unter den Bedingungen* (1′) *oder* (9′) *ist die Kurve zweiter Klasse* § 18, (1′) *ein getrenntes Punktepaar mit der Verbindungslinie* (2′).

II. *Alle Punkte der Kurve liegen auf einem der beiden Strahlen des Paares.*

II'. *Alle Tangenten der Kurve gehen durch einen der beiden Punkte des Paares.*

4. Beziehung zwischen Pol und Polare. Die Polare des Punktes $P_2 = x_2, y_2, t_2$ hat nach § 11, (15) in laufenden Koordinaten x, y, t die Gleichung:

$$(13) \qquad f_1^{(2)}x + f_2^{(2)}y + f_3^{(2)}t = f_1 x_2 + f_2 y_2 + f_3 t_2 = 0\,.$$

Diese wird, wie ihre zweite Form zeigt, unabhängig von P_2 stets durch den den Gleichungen § 10, (28) genügenden Doppelpunkt erfüllt und wird, wie ihre erste Form zeigt, unbestimmt, wenn P_2 selbst in P_0 fällt.

I. *Jeder Punkt der Ebene, außer dem Doppelpunkt P_0, hat eine bestimmte Polare, die durch P_0 geht.*

Jede Gerade der Ebene, außer der Doppellinie p_0, hat einen bestimmten Pol, der auf p_0 liegt.

II. *Die Polare von P_0 selbst ist unbestimmt.*

Der Pol von p_0 selbst ist unbestimmt.

Die Polare (13) des Punktes $x_2 = x_0 + \lambda x_1$, $y_2 = y_0 + \lambda y_1$, $t_2 = t_0 + \lambda t_1$ wird, da nach (11) $f_k^{(2)} = \lambda f_k^{(1)}$ ist, unabhängig von λ, also:

III. *Alle Punkte eines durch P_0 gehenden Strahles haben dieselbe Polare.*

Alle Geraden eines auf p_0 liegenden Punktes haben denselben Pol.

5. Übergang auf Strahlen- und Punktinvolution. Innerhalb des Strahlbüschels am Punkte P_0 (Fig. 80) gehört nach **4**, III zu jedem Strahl p_1 eine Polare p_2, eben die gemeinsame Polare aller Punkte von p_1. Die Verbindungslinie eines Punktes P_1 auf p_1 und eines Punktes P_2 auf p_2 schneidet, da P_1 und P_2 harmonische Pole sind (§ 11, **5**), die Kurve selbst in zwei Punkten S_1 und S_2, die zu P_1 und P_2 harmonisch sind. Die Strahlen p_1 und p_2 sind daher zu dem Strahlenpaar der Kurve selbst harmonisch (I § 5, **6**).

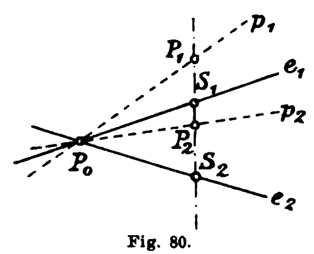


Fig. 80.

Innerhalb des Strahlbüschels, welches durch das die Kurve bildende Strahlenpaar e_1, e_2 bestimmt ist, kommt die Polarentheorie des Strahlenpaares auf die Strahleninvolution § 8, **10** *zurück.*

Innerhalb der Punktreihe, welche durch das die Kurve bildende Punktepaar E_1, E_2 bestimmt ist, kommt die Polarentheorie des Punktepaares auf die Punktinvolution § 8, **5** *zurück.*

6. Gleichungen des Strahlenpaares in Linienkoordinaten. Wenn die Kurve § 18, (1) ein Strahlenpaar ist, so hat dessen Doppelpunkt nach (2) in Linienkoordinaten die Gleichung:

$$A_{k1}u + A_{k2}v + A_{k3}s = 0, \tag{14}$$

$k = 1, 2$ oder 3. Die beiden Strahlen des Paares selbst sind als Verbindungslinien des Doppelpunktes mit dem Punktepaar:

$$a_{22}y^2 + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0, \quad x = 0 \tag{15}$$

bestimmt, in denen das Strahlenpaar § 18, (1) die y-Achse schneidet, falls nicht gerade der Doppelpunkt selbst auf der y-Achse liegt. Nun ist allgemein für eine durch den Punkt $0, y, t$ gehende Gerade u, v, s (I § 22, (4')):

$$yv + ts = 0 \quad \text{oder:} \quad v:s = -t:y. \tag{16}$$

Daher genügen *alle durch einen der beiden Punkte* (15) gehenden Geraden der Gleichung:

$$a_{22}s^2 - 2a_{23}sv + a_{33}v^2 = 0, \tag{17}$$

die beiden *Strahlen des Strahlenpaares selbst* aber den *beiden* Gleichungen (14) und (17).

Da der Doppelpunkt jedenfalls nicht auf allen drei Koordinatenachsen $x = 0$, $y = 0$ und $t = 0$ liegen kann, gilt somit der Satz (§ 13, 22):

Das unter den Bedingungen (1) *durch die eine Gleichung* § 18, (1) *in Punktkoordinaten dargestellte Linienpaar hat in Linienkoordinaten zwei Gleichungen, nämlich die Gleichung* (14) *in Verbindung mit einer der drei Gleichungen:*

$$\begin{cases} a_{22}s^2 - 2a_{23}sv + a_{33}v^2 = 0, \\ a_{33}u^2 - 2a_{31}us + a_{11}s^2 = 0, \\ a_{11}v^2 - 2a_{12}vu + a_{22}u^2 = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Der dual entsprechende Satz gilt unter den Bedingungen (1') für das *Punktepaar* § 18, (1').

7. Doppelgerade und Doppelpunkt. Wenn im Gegensatz zu (1) neben A auch alle Unterdeterminanten A_{kl} verschwinden, fallen die drei Geraden § 10, (28) in eine, die Doppellinie der Kurve § 18, (1), zusammen (vgl. § 18, 1). Die Kurve kann außerhalb dieser Doppellinie keinen Punkt besitzen. Denn wäre P_1 ein solcher, würde wie in 3 die ganze Verbindungslinie P_1P_0 mit einem beliebigen Punkte P_0 der Doppellinie der Kurve angehören, diese also ∞^2 Punkte enthalten.

Die Kurve zweiter Ordnung § 18, (1) *ist, wenn:*

(19) *alle* A_{kl}, *aber nicht alle* a_{kl} *Null sind,*

eine Doppelgerade mit den Koordinaten:

(20) $u : v : s = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3}$.

Die Kurve zweiter Klasse § 18, (1′) *ist, wenn:*

(19′) *alle* B_{kl}, *aber nicht alle* b_{kl} *Null sind,*

ein Doppelpunkt mit den Koordinaten:

(20′) $x : y : t = b_{k1} : b_{k2} : b_{k3}$.

Die Doppelgerade selbst ist die *Polare* aller Punkte der Ebene, die nicht ihr selbst angehören, während ihre eignen Punkte keine bestimmte Polare haben.

8. Andere Form der Bedingungen. Da die Hauptunterdeterminanten von A die Werte haben:

(21) $A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2, \quad A_{22} = a_{33}a_{11} - a_{31}^2, \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$

so folgt aus (4):

$$(22) \quad \begin{cases} a_{11}A'' = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + A_{22} + A_{33}, \\ a_{22}A'' = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + A_{33} + A_{11}, \\ a_{33}A'' = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 + A_{11} + A_{22} \end{cases}$$

und hieraus durch Addition die *identische Gleichung*[80]):

$$(23) \quad A''^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{31}^2 + 2a_{12}^2 + 2A'.$$

Wenn daher A' und A'' verschwinden, sind alle $a_{kl} = 0$, während aus dem Verschwinden aller a_{kl} umgekehrt das von A', A'' sowie A folgt.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden aller (reellen) Elemente a_{kl} *sind:*

$$(24) \quad (A = 0), \quad A' = 0, \quad A'' = 0.$$

Die Bedingungen (19), *bezüglich* (19′) *sind daher ersetzbar durch:*

(25) $A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0.$ | $B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0.$

9. Einteilung der Kurven zweiter Ordnung oder Klasse nach dem Rang. Der *Rang* der Kurve zweiter Ordnung oder Klasse ist durchaus entscheidend für die *Anzahl ihrer Doppelelemente* (§ 18, 1), für die *Natur ihrer Polarsysteme* (§ 18, 3 - 4; § 19, 4; 7) und für die *doppelte Darstellung in Punkt- und Linienkoordinaten* (§ 18, 6—7; § 19, 6—7).

Die Unterscheidung nach dem Rang geht daher nicht nur jeder weiteren Einteilung dieser Kurven (§ 21 ff.), sondern auch einer eingehenderen Darstellung der Polarsysteme einzelner Kurvenarten (§ 20) voran.

Wir stellen die *Merkmale des Ranges der Kurven zweiter Ordnung* § 18, (1) noch einmal tabellarisch zusammen und bezeichnen dabei zur *Abkürzung* mit den mit *Ausrufezeichen* versehenen Gleichungen:

$$(26)\qquad \begin{cases} A_{kl} = 0!, & \text{daß } \textit{alle } A_{kl} \text{ gleich Null,} \\ A_{kl} \neq 0!, & \text{daß } \textit{nicht alle } A_{kl} \text{ gleich Null sind,} \end{cases}$$

und entsprechend für a_{kl}.

$$(27)\qquad \begin{cases} A \neq 0: & \text{Eigentliche Kurven zweiter Ordnung,} \\ A = 0, \quad A_{kl} \neq 0!: & \text{Getrennte Linienpaare,} \\ A = 0, \quad A_{kl} = 0! \quad a_{kl} \neq 0!: & \text{Doppellinien.} \end{cases}$$

Die beiden letzten Zeilen (27) sind (bei reellen a_{kl}) ersetzbar durch:

$$(28)\qquad \begin{cases} A = 0, \quad A' \neq 0: & \text{Getrennte Linienpaare,} \\ A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' \neq 0: & \text{Doppellinien.} \end{cases}$$

Unter den entsprechenden Bedingungen mit b_{kl} für a_{kl} sind *die Kurven zweiter Klasse* § 18, (1') *eigentliche Kurven zweiter Klasse* oder *getrennte Punktepaare* oder *Doppelpunkte.*

Alle diese Merkmale (27) und (28) gelten wie die Gleichungen § 10, (28) und § 16, (16), auf denen sie beruhen, auch für *schiefwinklige* Koordinaten x, y, t (u, v, s) in § 18, (1) und (1') und sind, wie ihre geometrische Bedeutung zeigt, *in jedem Koordinatensystem dieselben* (vgl. den direkten Nachweis hierfür § 42, 1).

§ 20. Die Polarentheorie der einzelnen Kegelschnitte.

1. Ellipse und Hyperbel als Kurven zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der reellen und imaginären Ellipse und der Hyperbel lauten nach § 13, (1); (18) in homogenen Punkt- und Linienkoordinaten:

$$(1)\qquad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - t^2 = 0 \qquad (1')\quad -a^2b^2F = a^2u^2 + b^2v^2 - s^2 = 0.$$

Die hier vorliegenden besonderen Funktionen f und F stehen in der Tat in dem § 18, 8 allgemein angegebenen Zusammenhang, insofern:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = -1, \quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0; \\ A_{11} = -\frac{1}{b^2}, \quad A_{22} = -\frac{1}{a^2}, \quad A_{33} = \frac{1}{a^2b^2}, \quad A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0. \end{cases}$$

Die Determinante § 18, (2) wird mit den Elementen a_{kl} in (2):

$$(3)\qquad A = -\frac{1}{a^2b^2}.$$

Da sie bei endlichen Werten a und b nicht verschwindet, sind nach § 18, 2 *Ellipse und Hyperbel stets eigentliche Kurven zweiter Ordnung und Klasse.*

2. Pol und Polare. In der Bezeichnung § 18, (11) ist jetzt, wenn wir den Faktor $-a^2b^2$ in (1′) der Kürze wegen unterdrücken:

$$(4)\qquad f_1 = \frac{x}{a^2},\quad f_2 = \frac{y}{b^2},\quad f_3 = -t \qquad (4')\quad F_1 = a^2u,\ F_2 = b^2v,\ F_3 = -s.$$

Nach § 18, **10** bestehen daher *zwischen Pol* $P = x, y, t$ *und Polare* $p = u, v, s$ *in bezug auf die Kurve* (1), (1′) *die Beziehungen:*

$$(5)\qquad \varrho u = \frac{x}{a^2},\quad \varrho v = \frac{y}{b^2},\quad \varrho s = -t \qquad (5')\quad \sigma x = a^2u,\ \sigma y = b^2v,\ \sigma t = -s.$$

Die Gleichungen der Polare des Punktes $P_0 = x_0, y_0, t_0$ *und des Poles der Geraden* $p_0 = u_0, v_0, s_0$ *lauten:*

$$(6)\qquad \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - t_0t = 0 \qquad (6')\quad a^2u_0u + b^2v_0v - s_0s = 0$$

und *die Bedingungen für zwei konjugierte Punkte* $P_1 = x_1, y_1, t_1$ *und* $P_2 = x_2, y_2, t_2$ *oder Geraden* $p_1 = u_1, v_1, s_1$ *und* $p_2 = u_2, v_2, s_2$:

$$(7)\qquad \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - t_1t_2 = 0 \qquad (7')\quad a^2u_1u_2 + b^2v_1v_2 - s_1s_2 = 0.$$

Mit $P_1 = P_2 = P$ und $p_1 = p_2 = p$ gehen aus (7) und (7′) wieder die Kurven (1) und (1′) als *Örter der sich selbst konjugierten Punkte und Geraden* hervor.

Mit $t = 1$, $s = 1$ geht man überall von homogenen zu gemeinen Koordinaten über.

3. Besondere Paare von Pol und Polare. Der Mittelpunkt $x, y, t = 0, 0, 1$ ist der Pol der unendlich fernen Geraden $u, v, s = 0, 0, 1$. Daher geht die Polare jedes unendlich fernen Punktes durch den Mittelpunkt. Die unendlich fernen Punkte der x- und y-Achse $x, y, t = 1, 0, 0$ und $0, 1, 0$ haben als Polaren die y- und x-Achse $u, v, s = 1, 0, 0$ und $0, 1, 0$.

Die Polaren der beiden Brennpunkte $x, y, t = \pm e, 0, 1$ sind die entsprechenden Direktricen $u, v, s = \mp e, 0, a^2$ (§ 4, (24)).[14])

Die gemeinsame Ordinate PP' zweier Punkte $P = x, y$ und $P' = x, -y$ der Kurve, deren Tangenten sich nach § 13, (3) in einem Punkte T der x-Achse treffen, ist nach § 11, **10** die Polare von T.

Daher wird *die große Achse der Ellipse und die reelle Achse der Hyperbel von der Ordinate und Tangente eines Punktes der Kurve harmonisch geteilt.*[53])

4. Involution harmonischer Polaren. *Die Involution harmonischer Polaren,* welche die *Ellipse* oder *Hyperbel* (1') an einem Punkte x_0, y_0 der Ebene bestimmt, ist nach § 17, (4):

$$(8) \qquad (a^2 - x_0^2) \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + x_0 y_0 (\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2) + (b^2 - y_0^2) = 0 .$$

Für den Mittelpunkt $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ geht sie über in:

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + \frac{b^2}{a^2} = 0 ,$$

die *Involution konjugierter Durchmesser* von § 14, (5).

Die Involution (8) wird eine *gleichseitig hyperbolische* (§ 8, **13**), wenn der Punkt x_0, y_0 dem Kreis § 13, (25) angehört, und wird eine *Involution rechter Winkel* (§ 8, **12**) für die vier Brennpunkte § 13, (26).

I. *Die Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel sind diejenigen Punkte der Ebene, an denen die von der Kurve bestimmte Involution harmonischer Polaren eine Involution rechter Winkel ist.*[2])

II. *Sonst gehen durch jeden Punkt* x_0, y_0 *der Ebene nur zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren, nämlich* nach § 17, **1** und § 8, **12**, I *die Halbierungslinien des Tangentenpaares* § 13, (20).

5. Senkrechte harmonische Polaren. Zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren u, v, s und u', v', s' überhaupt sind nach (7') durch die beiden Bedingungen verknüpft (I § 18, (5)):

$$(10) \qquad a^2 uu' + b^2 vv' = ss' \qquad\qquad (11) \qquad uu' + vv' = 0 .$$

Hieraus ergibt sich bei gegebenem u, v, s:

$$(12) \qquad u' : v' : s' = vs : -us : (a^2 - b^2) uv .$$

Zu jeder Geraden $g = u, v, s$ *gehört nach* (12) *eine bestimmte senkrechte harmonische Polare* $g' = u', v', s'$.

Man konstruiert sie (Fig. 81), indem man durch den Pol P von g eine Senkrechte g' auf g fällt (§ 17, **3**).

Eine *Ausnahme* bilden die beiden Hauptachsen $u, v, s = 1, 0, 0$; $0, 1, 0$ und die unendlich ferne Gerade $0, 0, 1$, für die $u' : v' : s'$ in (12) unbestimmt werden. In der Tat sind nach **3.** alle zu einer Hauptachse senkrechten Geraden harmonische Polaren derselben, weil sie durch ihren Pol gehen. Eine Ausnahme bilden ferner alle außer den Hauptachsen durch den Mittelpunkt gehenden Geraden $u \neq 0$, $v \neq 0$, $s = 0$, für die u', v', s' nach (12) die unendlich ferne Gerade wird.

6. Schnittpunkte zweier senkrechter harmonischer Polaren mit den Hauptachsen. Schließen wir diese Ausnahmefälle aus und gehen mit $s = s' = 1$ zu nicht homogenen Koordinaten über, so bestehen

nach (10) und (11) *zwischen zwei senkrechten harmonischen Polaren die Beziehungen:*

(13) $(a^2 - b^2)uu' = 1, \qquad (b^2 - a^2)vv' = 1.$

Da aber allgemein (I § 19, **1**) $x = -1 : u$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = -1 : v$ die Koordinaten der Schnittpunkte einer Geraden u, v mit den Koordinatenachsen sind, so genügen die Schnittpunkte X, X' zweier rechtwinkliger harmonischer Polaren g und g' (Fig. 81) mit der x-, bezüglich Y, Y' mit der y-Achse mit ihren Koordinaten x, x' und y, y' den Gleichungen:

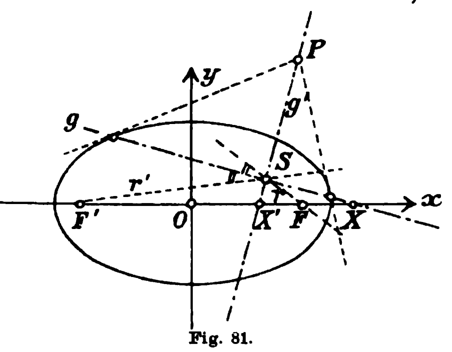


Fig. 81.

(14) $xx' = a^2 - b^2$

(14′) $yy' = b^2 - a^2.$

Sie gehören also nach § 8, (15); (14) der *Involution* an, deren Doppelpunkte die reellen, bezüglich imaginären Brennpunkte sind[81]), oder (§ 8, **16**):

I. *Zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren g und g'* (Fig. 81) *sind zu den reellen oder imaginären Brennstrahlen r und r' ihres Schnittpunktes S harmonisch,* und nach § 8, **13**, II:

II. *Zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren halbieren die Winkel der reellen Brennstrahlen ihres Schnittpunktes.*

7. Anwendung auf Tangente und Normale. Zu einer Tangente ist nach § 17, **4**, III jede durch den Berührungspunkt gehende Gerade harmonische Polare. Daher sind *Tangente* und *Normale* in einem Punkte P der Kurve zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren.

I. *Sie halbieren also nach* **6**, II *den Winkel der Brennstrahlen des Punktes P* (§ 13, **4**).[64])

Die y-Achse wird von *irgend zwei senkrechten harmonischen Polaren* g und g' in entsprechenden Punkten der Involution (14′) geschnitten, so also von Tangente und Normale eines Punktes P der Kurve, so nach **4**, I auch von irgend zwei durch einen Brennpunkt F gelegten senkrechten Strahlen. Sind nun T und N (Fig. 82) die Schnittpunkte von Tangente und Normale mit der y-Achse, so muß, wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels vom Scheitel F durch T geht, der andere Schenkel durch N gehen, da ja zwei entsprechende Punkte einer Involution sich gegenseitig eindeutig bestimmen (§ 8, **2**). Es muß also TFN ein rechter Winkel sein oder (Fig. 82)[81]):

II. *Der Kreis, der durch einen Punkt P der Kurve und die Schnittpunkte T und N von Tangente und Normale mit der y-Achse bestimmt ist, geht durch die Brennpunkte F, F'.*

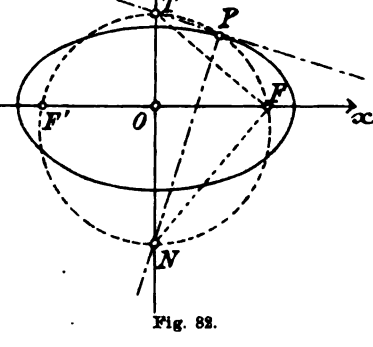


Fig. 82.

8. Der konjugierte Normalstrahl eines Punktes. Indem jeder Punkt $P = x, y$ nach (5) eine bestimmte Polare hat mit den Koordinaten ($s = 1$, $t = 1$):

$$(15) \qquad u = -\frac{x}{a^2}, \quad v = -\frac{y}{b^2},$$

gehört ihm auch eine bestimmte Gerade zu, die *durch ihn senkrecht zu seiner Polare* gelegt ist und *der ihm zugeordnete Normalstrahl* heißt.[82])

Er hat in laufenden Koordinaten X, Y die Gleichung:

$$(16) \qquad \frac{y}{b^2}(X - x) - \frac{x}{a^2}(Y - y) = 0,$$

also die Koordinaten:

$$(17) \qquad u = -\frac{a^2}{(a^2 - b^2)x} = -\frac{a^2}{e^2 x}, \quad v = \frac{b^2}{(a^2 - b^2)y} = \frac{b^2}{e^2 y}.$$

Umgekehrt gehört zu jeder Geraden $g = u, v$ ein auf ihr liegender Punkt:

$$(18) \qquad x = -\frac{a^2}{e^2 u}, \quad y = \frac{b^2}{e^2 v} \quad (ux + vy + 1 = 0),$$

dessen konjugierter Normalstrahl sie ist, und der ihr *zugeordneter Punkt* heißt. Er ist der Pol der zu $g = u, v$ senkrechten harmonischen Polaren u', v', wie denn nach (13) die Formeln (18) auch geschrieben werden können (vgl. (5') mit $s = 1$):

$$(19) \qquad x = -a^2 u', \qquad y = -b^2 v'.$$

Der konjugierte Normalstrahl eines Punktes der Kurve selbst ist die Normale der Kurve in ihm.

9. Normalen der Kurve durch einen Punkt. Geht die Gerade u, v durch einen festen Punkt $P_0 = x_0, y_0$, so daß:

$$(20) \qquad x_0 u + y_0 v + 1 = 0,$$

so genügt ihr zugeordneter Punkt x, y nach (17) und (20) der Gleichung:

$$(21) \qquad -\frac{a^2 x_0}{e^2 x} + \frac{b^2 y_0}{e^2 y} + 1 = 0$$

oder:

$$(22) \qquad e^2 xy + b^2 y_0 x - a^2 x_0 y = 0.$$

Sie stellt den *Ort der zugeordneten Punkte aller Strahlen des Büschels am Punkte P_0* oder den *Ort der Punkte, deren konjugierte Normalstrahlen durch P_0 gehen,* dar.

Die Kurve (22) geht durch $O = 0, 0$ und $P_0 = x_0, y_0$ und erhält durch die Parallelverschiebung:

$$x = \frac{a^2 x_0}{e^2} + \xi, \quad y = -\frac{b^2 y_0}{e^2} + \eta \tag{23}$$

des rechtwinkligen Koordinatensystems (I § 14, (1)) die Gleichung:

$$e^2 \xi \eta + \frac{a^2 b^2 x_0 y_0}{e^2} = 0. \tag{24}$$

Der Ort (22) ist daher (§ 1, (22); § 3, (15)) *eine gleichseitige Hyperbel, die durch O und P_0 geht, und deren Asymptoten den Hauptachsen des Kegelschnittes* (1) *parallel sind.*

Ihre vier Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt (1) sind nach 8 *die Fußpunkte der vier Normalen, die vom Punkte P_0 an ihn gelegt werden können.*[83])

Für einen *Brennpunkt* $P_0 = \pm e, 0$ zerfällt die gleichseitige Hyperbel (22) in ein rechtwinkliges Geradenpaar:

$$ey(ex \mp a^2) = 0, \tag{25}$$

die *x-Achse* und die dem Brennpunkt zugehörige *Direktrix* (§ 4, (24)). Der konjugierte Normalstrahl eines Punktes P der Direktrix geht also durch den Brennpunkt. Da aber einerseits die Polare des Punktes P zu seinem konjugierten Normalstrahl senkrecht steht und andererseits durch den Brennpunkt als den Pol der Direktrix geht, so folgt:

Die Polare eines Punktes P der Direktrix ist die im zugehörigen Brennpunkt F auf der Verbindungslinie PF errichtete Senkrechte.[84])

10. Reelles Polarsystem der imaginären Ellipse. Bei negativen Werten von a^2 und b^2 stellt die Gleichung (1); (1′) eine *imaginäre* Ellipse dar. Sie hat *keinen reellen Punkt* und *keine reelle Tangente,* aber das zu ihr gehörige Polarsystem ist *reell,* indem nach (5); (5′) reellen Polen reelle Polaren entsprechen und umgekehrt (vgl. § 8, 5).[85])

11. Das Polarsystem der Dualität. Insbesondere gehört zu dem imaginären Kreise:

$$x^2 + y^2 + t^2 = 0, \quad u^2 + v^2 + s^2 = 0 \tag{26}$$

$(a^2 = b^2 = -1)$ nach (5); (5′) das Polarsystem:

$$u : v : s = x : y : t \quad \text{(nicht homogen } u = x, \ v = y\text{)}, \tag{27}$$

bei dem Pol und Polare gleiche Koordinaten haben.

Dieses Polarsystem bildet eine Deutung der Dualität, die in der Gegenüberstellung der Punkte und Geraden der Ebene zum Ausdruck kommt (I § 19, 3).

Zwei nach (27) sich entsprechende Gebilde, z. B. die *Kurven:*

$$f(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad f(u, v) = 0 \tag{28}$$

heißen *dual* oder *polarreziprok.* Da die Gleichung (26) gegen jede Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems invariant ist (I § 14, (9)), so hängt das Polarsystem nur vom *Anfangspunkt* O, dem *Ursprung der Polarreziprozität,* ab. Ihm entspricht die unendlich ferne Gerade.

12. Kreis und Kegelschnitt als reziproke Kurven. Der Kreis mit dem Mittelpunkt $M = a, b$ und dem Radius r hat in bezug auf ein rechtwinkliges System Oxy in Punkt- und Linienkoordinaten die Gleichungen (§ 12, (1); (27)):

$$F(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0, \tag{29}$$

$$f(u, v) = (au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0. \tag{30}$$

Die reziproke Kurve mit Bezug auf den Ursprung O hat daher in Linien- und Punktkoordinaten die Gleichungen:

$$F(u, v) = (u - a)^2 + (v - b)^2 - r^2 = 0, \tag{31}$$

$$f(x, y) = (ax + by + 1)^2 - r^2(x^2 + y^2) = 0. \tag{32}$$

Führt man nun, um die Bedeutung der Gleichung (32) zu ermitteln, ein neues rechtwinkliges System $O\xi\eta$ ein, dessen ξ-Achse die Richtungskosinus:

$$\alpha = \frac{a}{c}, \quad \beta = \frac{b}{c}; \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \overline{OM} \tag{33}$$

hat, so wird (I § 14, (7)):

$$ax + by = c\xi, \quad x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{34}$$

und daher die Gleichung (32):

$$(\xi^2 + \eta^2) - \frac{c^2}{r^2}\left(\xi + \frac{1}{c}\right)^2 = 0. \tag{35}$$

Die Reziproke eines Kreises ist daher (§ 4, (11)) *ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkt in den Anfangspunkt O und dessen Brennpunktsachse in den Radiusvektor des Kreismittelpunktes fällt.*[86]) *Seine Exzentrizität ist* $\varepsilon = c : r$, *sein Parameter* $p = 1 : r$.

13. Die Parabel als Kurve zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der Parabel lauten nach § 13, (33) und (42) in homogenen Punkt- und Linienkoordinaten:

$$f = y^2 + 2p(x + qt)t = 0 \tag{36}$$

$$-\frac{1}{p}F = pv^2 - 2qu^2 + 2us = 0. \tag{36'}$$

Die hier vorliegenden Funktionen f und F stehen in der Tat in dem § 18, 8 angegebenen Zusammenhang, insofern:

$$(37)\quad \begin{cases} a_{11}=0, & a_{22}=1, \quad a_{33}=2pq, \; a_{23}=0, \; a_{31}=p, \quad a_{12}=0; \\ A_{11}=2pq, & A_{22}=-p^2, \; A_{33}=0, \quad A_{23}=0, \; A_{31}=-p, \; A_{12}=0. \end{cases}$$

Die Determinante § 18, (2) wird mit den Elementen a_{kl} in (37):

$$(38)\qquad A=-p^2.$$

Da sie nicht verschwindet, ist *die Parabel eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse.*

14. Pol und Polare. In der Bezeichnung § 18, (11) ist jetzt, wenn wir den Faktor $-1:p$ in (36′) der Kürze wegen unterdrücken:

$$(39)\qquad f_1=pt, \quad f_2=y, \quad f_3=p(x+2qt)$$

$$(39')\qquad F_1=-2qu+s, \quad F_2=pv, \quad F_3=u.$$

Nach § 18, **10** bestehen daher *zwischen Pol $P=x, y, t$ und Polare $g=u, v, s$ in bezug auf die Parabel* (36); (36′) *die Beziehungen:*

$$(40)\qquad \varrho u=pt, \quad \varrho v=y, \quad \varrho s=p(x+2qt)$$

$$(40')\qquad \sigma x=-2qu+s, \quad \sigma y=pv, \quad \sigma t=u.$$

Die Gleichungen der Polare des Punktes $P_0=x_0, y_0, t_0$ und des Poles der Geraden $g_0=u_0, v_0, s_0$ lauten:

$$(41)\qquad y_0y+p(t_0x+x_0t+2qt_0t)=0$$

$$(41')\qquad pv_0v-2qu_0u+s_0u+u_0s=0$$

und *die Bedingungen für zwei konjugierte Punkte $P_1=x_1, y_1, t_1$ und $P_2=x_2, y_2, t_2$ oder Geraden: $g_1=u_1, v_1, s_1$ und $g_2=u_2, v_2, s_2$:*

$$(42)\qquad y_1y_2+p(t_1x_2+x_1t_2+2qt_1t_2)=0$$

$$(42')\qquad pv_1v_2-2qu_1u_2+s_1u_2+u_1s_2=0.$$

Mit $P_1=P_2=P$ und $g_1=g_2=g$ gehen aus (42); (42′) wieder die Kurven (36); (36′) als *Örter der sich selbst konjugierten Punkte und Geraden* hervor.

Mit $t=1$, $s=1$ geht man überall von homogenen zu gemeinen Koordinaten, mit $q=0$ und Umkehr des Vorzeichens von p zu den auf die Gleichung § 13, (37) bezüglichen Formeln über.

15. Besondere Paare von Pol und Polare. Der Pol der unendlich fernen Geraden $u, v, s=0, 0, 1$ ist nach (40′) der unendlich ferne Punkt der x-Achse $x, y, t=1, 0, 0$. In ihm berührt jene die Parabel (§ 2, **9**).

Die Polare des Brennpunktes $x, y, t=-\frac{p}{2}-q, 0, 1$ ist nach (40) die Direktrix $u, v, s=1, 0, -\frac{p}{2}+q$ (§ 2, (19); (20)).

Die gemeinsame Ordinate PP' zweier Punkte $P = x, y$ und $P' = x, -y$ der Parabel, deren Tangenten sich nach § 13, (35) in einem Punkte T der x-Achse treffen, ist nach § 11, **10** die Polare von T. Daher *liegt der Scheitel der Parabel in der Mitte zwischen den Schnittpunkten der Hauptachse mit der Ordinate und Tangente eines Punktes der Parabel* (vgl. **3.** und § 13, **12**).

16. Involution harmonischer Polaren. *Die Involution harmonischer Polaren,* welche die *Parabel* (36′) an einem Punkte x_0, y_0 der Ebene bestimmt, ist nach § 17, (4) und § 15, (22):

$$(43) \qquad -2(x_0 + q)\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2 + y_0(\operatorname{tg}\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_2) + p = 0.$$

Sie wird gleichseitig hyperbolisch (§ 8, **13**), wenn der Punkt x_0, y_0 auf der Direktrix (§ 13, **16**) liegt, und wird eine Involution rechter Winkel (§ 8, **12**) für den Brennpunkt (§ 13, **16**).

I. *Der Brennpunkt der Parabel ist derjenige Punkt der Ebene, an dem die von der Parabel bestimmte Involution harmonischer Polaren eine Involution rechter Winkel ist.*

Sonst gehen durch jeden Punkt x_0, y_0 der Ebene nur *zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren,* nämlich die Hauptachsen des Tangentenpaares (§ 13, (45)) und der Strahleninvolution (43).

17. Senkrechte harmonische Polaren. Zwei zueinander senkrechte harmonische Polaren u, v, s und u', v', s' überhaupt sind nach (42′) durch die beiden Bedingungen verknüpft:

$$(44) \quad pvv' - 2quu' + su' + us' = 0 \qquad (45) \quad uu' + vv' = 0.$$

Hieraus ergibt sich bei gegebenem u, v, s:

$$(46) \qquad u' : v' : s' = uv : -u^2 : (p + 2q)uv - vs.$$

Zu jeder Geraden $g = u, v, s$ gehört nach (46) *eine bestimmte senkrechte harmonische Polare $g' = u', v', s'$,* die wie unter **5.** konstruiert wird.

Eine *Ausnahme* bilden die x-Achse $u, v, s = 0, 1, 0$ und die unendlich ferne Gerade 0, 0, 1, für die g' unbestimmt wird.

18. Schnittpunkte zweier senkrechter harmonischer Polaren mit der Hauptachse. Schließen wir diese Fälle aus und gehen mit $s = s' = 1$ zu nicht homogenen Koordinaten über, so besteht nach (44) und (45) *zwischen zwei senkrechten harmonischen Polaren die Beziehung:*

$$(47) \qquad -(p + 2q)uu' + u + u' = 0$$

und zwischen den Schnittpunkten T und T' mit der x-Achse, wie unter **6**:

$$(48) \qquad x + x' + (p + 2q) = 0 \quad \text{oder} \quad FT = T'F:$$

I. *Zwei senkrechte harmonische Polaren schneiden die Hauptachse in zwei beiderseits gleichweit vom Brennpunkt F gelegenen Punkten.* Die Schnittpunkte bilden eine *gleichseitig hyperbolische* Involution (§ 8, **6**).[81]) Daraus folgt weiter, wie unter **6**:

II. *Zwei senkrechte harmonische Polaren g und g'* (Fig. 83) *sind zu dem durch ihren Schnittpunkt S gehenden Brennstrahl und der durch S gehenden Parallelen zur Hauptachse harmonisch, halbieren also die Winkel beider.*

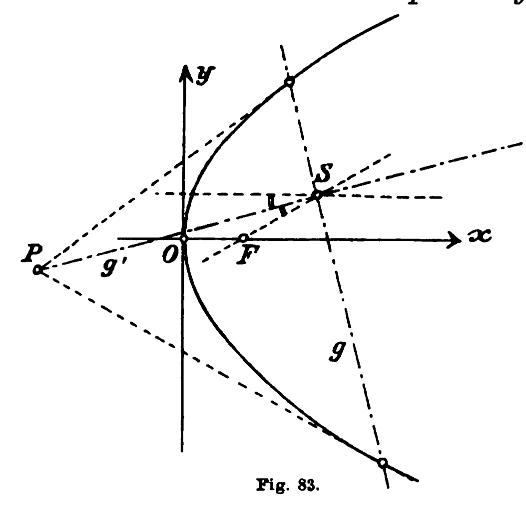


Fig. 83.

Dasselbe gilt wie unter **7.** von *Tangente* und *Normale.*

19. Normalen der Parabel durch einen Punkt. Für den *einem Punkte x, y zugeordneten Normalstrahl* ergeben sich, wie unter **8**, aus (40) die Gleichungen:

$$y(X - x) - p(Y - y) = 0 \tag{49}$$

und die Koordinaten:

$$u = \frac{1}{p - x}, \quad v = \frac{-p}{(p - x)y}. \tag{50}$$

Setzt man diese Werte wie unter **9.** in die Gleichung (20) ein, so erhält man als *Ort der Punkte, deren konjugierte Normalstrahlen durch den festen Punkt P_0 gehen, die Kurve:*

$$xy - (p + x_0)y + py_0 = 0. \tag{51}$$

Sie nimmt durch die Parallelverschiebung:

$$x = p + x_0 + \xi, \quad y = \eta \tag{52}$$

des rechtwinkligen Koordinatensystems die Form an:

$$\xi\eta + py_0 = 0. \tag{53}$$

Sie ist also eine gleichseitige Hyperbel, die durch P_0 geht, und von deren Asymptoten die eine die x-Achse, die andere eine Parallele zur y-Achse ist.

Von ihren vier Schnittpunkten mit der Parabel (36) sind drei die Fußpunkte der drei Normalen[83]), die von P_0 an die Parabel gelegt werden können. Der vierte Schnittpunkt fällt in den unendlich fernen Punkt der x-Achse.

Für den Brennpunkt $P_0 = -\frac{p}{2} - q, 0$ zerfällt die Hyperbel (51) wie unter **9.** in die x-Achse und die Direktrix:

$$(54) \qquad y\left(x - \frac{p}{2} + q\right) = 0,$$

so daß der Schlußsatz von **9.** ebenfalls für die Parabel gilt.

20. Strahlenpaar und Punktepaar als Kurven mit Doppelelement. Für das Strahlenpaar und sein unendlich fernes Punktepaar (§ 13, (57); (57')):

$$(55) \quad f(x, y, t) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (55') \quad F(u, v, s) = a^2u^2 - b^2v^2 = 0$$

ist im Sinne von § 9, (3) und § 15, (1):

$$(56) \quad \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = -\frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0; \\ A_{11} = A_{22} = A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0, \quad A_{33} = -\frac{1}{a^2b^2}; \end{cases}$$

$$(56') \quad \begin{cases} b_{11} = a^2, \quad b_{22} = -b^2, \quad b_{33} = b_{23} = b_{31} = b_{12} = 0; \\ B_{11} = B_{22} = B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0, \quad B_{33} = -a^2b^2, \end{cases}$$

so daß nach § 19, **1** folgt:

Das Linienpaar (55) *ist eine Kurve zweiter Ordnung mit dem Doppelpunkt* $x, y, t = 0, 0, 1$, *dem Schnittpunkt der beiden Linien des Paares.*

Aber es gehört nach § 13, (58') nicht zu den Kurven zweiter *Klasse* § 15, (1).

Das Punktepaar (55') *ist eine Kurve zweiter Klasse mit der Doppelgeraden* $u, v, s = 0, 0, 1$, *der Verbindungslinie der beiden Punkte des Paares.*

Aber es gehört nach § 13, (58) nicht zu den Kurven zweiter *Ordnung* § 9, (3).

21. Die Polarentheorie des Linienpaares oder Punktepaares. In bezug auf das Linienpaar (55) ergibt sich aus § 11, (21); (26) und, unabhängig davon, in bezug auf das Punktepaar (55') aus § 17, (8); (9):

für die *Polare eines Punktes* x, y, t:

$$(57) \quad \varrho u = \frac{x}{a^2}, \ \varrho v = -\frac{y}{b^2}, \ \varrho s = 0$$

und für den *Pol einer Geraden* u, v, s:

$$(58) \quad \sigma x = 0, \ \sigma y = 0, \ \sigma t = -\frac{s}{a^2b^2}.$$

für den *Pol einer Geraden* u, v, s:

$$(57') \quad \sigma x = a^2u, \ \sigma y = -b^2v, \ \sigma t = 0$$

und für die *Polare eines Punktes* x, y, t:

$$(58') \quad \varrho u = 0, \ \varrho v = 0, \ \varrho s = -a^2b^2t.$$

Die Gleichungen (57) und (58) oder (57') und (58'), die nicht mehr Auflösungen voneinander sind wie (5) und (5') oder (40) und (40'), bringen unmittelbar die Sätze § 19, **4**, I—III zum Ausdruck.

Die Bedingungen für zwei *konjugierte Punkte* x, y, t *und* x', y', t' *in bezug auf das Linienpaar* (55), bezüglich zwei *konjugierte Gerade*

u, v, s und u', v', s' in bezug auf das Punktepaar (55') lauten (§ 11, (9); § 17, (3)):

(59) $\frac{xx'}{a^2} - \frac{yy'}{b^2} = 0$. (59') $a^2uu' - b^2vv' = 0$.

Sie führen, wenn x, y als Koordinaten *des Strahles im Büschel* (I § 7, (2)) und $-v$, u als Koordinaten *des Punktes auf der unendlich fernen Geraden* (I § 7, (3); § 23, **1**) betrachtet werden, auf die *Strahleninvolution* § 8, (28) und die *Punktinvolution* auf der unendlich fernen Geraden § 8, **16** zurück (§ 19, **5**).

22. Das Kreisstrahlenpaar und Kreispunktepaar. Mit $a^2 = -b^2$ erhält man aus (55) und (55') in:

(60) $x^2 + y^2 = 0$

die Gleichung des Kreisstrahlenpaares am Koordinatenanfangspunkt O in Punktkoordinaten.

(60') $u^2 + v^2 = 0$ [60])

die Gleichung des Kreispunktepaares auf der unendlich fernen Geraden in Linienkoordinaten (§ 12, **10**; § 13, **21**).

Für zwei *konjugierte Punkte* in bezug auf (60) ist:

(61) $xx' + yy' = 0$.

Für zwei *konjugierte Gerade* in bezug auf (60') ist:

(61') $uu' + vv' = 0$.

Die Gleichung (61') gibt sofort die Sätze:

I. *In bezug auf das Kreispunktepaar sind zwei Gerade konjugiert (harmonische Polaren), wenn sie aufeinander senkrecht stehen.*[87])

II. *Die Involution harmonischer Polaren, die das Kreispunktepaar an einem Punkte P der Ebene bestimmt, ist stets eine Involution rechter Winkel (das Tangentenpaar von P an das Kreispunktepaar ist ein Kreisstrahlenpaar).*

Ferner folgt aus (61) und (61'):

III. *Die Polare eines Punktes P in bezug auf das Kreisstrahlenpaar ist die zum Leitstrahl OP durch O gelegte Normale.*

III'. *Der Pol einer Geraden p in bezug auf das Kreispunktepaar ist der gemeinsame unendlich ferne Punkt aller Normalen von p.*

IV. In der Auffassung des Schlußsatzes von **21.** wird (61) die *Involution rechter Winkel* § 8, (30) und werden zwei entsprechende Punkte der Involution (61') durch irgend zwei rechtwinklige Gerade aus der unendlich fernen Geraden ausgeschnitten. *Beide Involutionen liegen perspektiv.*

23. Kreispunktepaar und Kegelschnitt. Die *Brennpunkte*, an denen der Kegelschnitt (1') oder (36') nach **4**, I und nach **16**, I eine

Involution rechter Winkel bestimmt, sind in der Auffassung **22**, II auch *diejenigen Punkte, an denen der Kegelschnitt und das Kreispunktepaar beide dieselbe Involution harmonischer Polaren bestimmen* oder, was dasselbe ist (§ 13, **8**, II; **16**, II), *von denen an den Kegelschnitt und das Kreispunktepaar dasselbe Tangentenpaar geht;* oder auch (§ 19, **3**, II'):

Die vier Brennpunkte der Ellipse oder Hyperbel (der Brennpunkt der Parabel) sind die Schnittpunkte der von den beiden imaginären Kreispunkten an den Kegelschnitt gelegten vier (bei der Parabel nach § 13, **15**, I *zwei) Tangenten.*[2])

III. Abschnitt.

Einteilung der Kurven zweiter Ordnung und Klasse

I. Kapitel.

Die Arten der Kurven zweiter Ordnung.

§ 21. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten.

1. Begriff der Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten. Wenn die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy bezogene Gleichung:

$$(1)\quad g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

mittels der Substitution § 9, (17) auf ein neues *recht-* oder *schiefwinkliges* System $\Omega\xi\eta$ transformiert wird, so erhält sie die Form § 9, (19). Dabei hängen die drei neuen Koeffizienten a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} nach § 9, (20), (21) einerseits nur von den drei ersten Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{22} von (1), anderseits aber *nicht von dem Anfangspunkte Ω, sondern lediglich von den Richtungen α_1, β_1 und α_2, β_2 der Achsen ξ und η ab.*

Wir nennen nun diese *ein Paar Hauptachsenrichtungen* (vgl. weiterhin **6**, II) der Kurve (1), wenn sie zueinander *rechtwinklig* stehen *und der Koeffizient a'_{12} verschwindet,* so daß die neue Gleichung die Form erhält:

$$(2)\qquad g(x, y) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0.$$

Die Koeffizienten a'_{11}, a'_{22} sollen alsdann die *zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten* heißen.

2. Bedeutung der Hauptachsenrichtungen in der Polarentheorie. Mit Rücksicht auf den Wert § 9, (21) von a'_{12} und die Bedingung § 11, (12) unendlich ferner harmonischer Pole folgt auch:

I. *Ein Paar Hauptachsenrichtungen besteht aus zwei zueinander senkrechten Richtungen, deren unendlich ferne Punkte harmonische Pole der Kurve sind*; oder mit Bezugnahme auf § 20, 22, IV:

II. *Ein Paar Hauptachsenrichtungen besteht aus zwei Richtungen, deren unendlich ferne Punkte gleichzeitig harmonische Pole der Kurve und des imaginären Kreispunktepaares sind.* [88])

3. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten. Die Hauptachsenrichtungen α_1, β_1 und α_2, β_2 haben nach ihrer Erklärung den Gleichungen zu genügen:

(3) $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1;$ (4) $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0,$

(5) $a_{12}' = h_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_2 = h_1(\alpha_2, \beta_2)\alpha_1 + h_2(\alpha_2, \beta_2)\beta_1 = 0.$

Die Hauptachsenkoeffizienten sind alsdann durch die Gleichungen:

(6) $$a_{11}' = h(\alpha_1, \beta_1), \qquad a_{22}' = h(\alpha_2, \beta_2)$$

bestimmt.

Die sechs Gleichungen (3), (4), (5), (6) *enthalten somit die vollständige Erklärung der sechs Unbekannten* $a_{11}', a_{22}'; \alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2$ *des Hauptachsenproblems.*

Aus (3) und (4) folgen überdies die weiteren Gleichungen (I § 13, (10)):

(7) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1,$ (8) $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$

4. Zusammengehörigkeit einer Richtung und eines Koeffizienten. Vertauscht man die Richtungen α_1, β_1 und α_2, β_2 und zugleich die Koeffizienten a_{11}' und a_{22}', so ändern sich die Gleichungen (3), (4) und (5) nicht und vertauschen sich die beiden Gleichungen (6) untereinander. Die Gesamtheit der sechs Gleichungen bleibt unverändert.

Die sechs Unbekannten zerfallen daher in zwei Gruppen $a_{11}', \alpha_1, \beta_1$ *und* $a_{22}', \alpha_2, \beta_2$, *die untereinander vertauschbar sind, während die drei Elemente jeder Gruppe zusammengehören.*

5. Gleichung für den Richtungswinkel einer Hauptachse. Bezeichnet φ den Richtungswinkel der ξ-Achse gegen die x-Achse, also $\varphi + \varepsilon\frac{\pi}{2}\,(\varepsilon = \pm 1)$ den der η-Achse, so ist (I § 13, (8)):

$$\alpha_1 = \cos\varphi, \; \beta_1 = \sin\varphi; \; \alpha_2 = -\varepsilon\sin\varphi, \; \beta_2 = \varepsilon\cos\varphi.$$

Damit sind die Gleichungen (3) und (4) schon erfüllt. Dagegen wird die Gleichung (5):

$$\begin{aligned} 2a_{12}' &= 2\,(a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2) \\ &= 2\,\varepsilon(-(a_{11} - a_{22})\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)) = 0 \end{aligned}$$

(§ 8 (31)) oder[89]):

(9) $$(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi - 2a_{12}\cos 2\varphi = 0.$$

Sind die Koeffizienten dieser Gleichung nicht beide 0, so gibt die Gleichung einen bestimmten Wert von $\sin 2\varphi : \cos 2\varphi$ und daher von Vielfachen von 2π abgesehen, *zwei* Werte von 2φ, die in der

Beziehung 2φ und $2\varphi+\pi$, also *vier* Werte von φ, die in der Beziehung: φ, $\varphi+\frac{\pi}{2}$, $\varphi+\pi$, $\varphi+\frac{3\pi}{2}$ stehen. Die ξ-Achse kann also, von der Pfeilspitze abgesehen, zwei zueinander rechtwinklige Lagen haben. Da aber die η-Achse zur ξ-Achse senkrecht steht, so folgt:

Wenn nicht gleichzeitig die beiden Bedingungen:

$$a_{11}=a_{22},\quad a_{12}=0 \tag{10}$$

bestehen, so gibt es stets ein und nur ein Paar von Hauptachsenrichtungen der Kurve.

Ihre Bezeichnung mit ξ oder mit η und ihre Pfeilspitzen bleiben dabei willkürlich.

Sind dagegen die beiden Bedingungen (10) erfüllt, so hat schon die Gleichung (1) die Form:

$$g(x,y)=a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \tag{11}$$

und behält sie, da nach (5) und (6) für irgend zwei rechtwinklige Achsen $a'_{12}=0$, $a'_{11}=a'_{22}=a_{11}$ ist, in jedem rechtwinkligen System $\Omega\xi\eta$. *Die Hauptachsenrichtungen sind unbestimmt.*

6. Notwendige Gleichungen für die einzelnen Gruppen. Wir wiederholen die Gleichungen (5) und (6) in der Form:

$$\begin{cases} h_1(\alpha_1,\beta_1)\alpha_1+h_2(\alpha_1,\beta_1)\beta_1=a'_{11},\\ h_1(\alpha_1,\beta_1)\alpha_2+h_2(\alpha_1,\beta_1)\beta_2=0.\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} h_1(\alpha_2,\beta_2)\alpha_1+h_2(\alpha_2,\beta_2)\beta_1=0,\\ h_1(\alpha_2,\beta_2)\alpha_2+h_2(\alpha_2,\beta_2)\beta_2=a'_{22}.\end{cases} \tag{12'}$$

Multipliziert man je zwei Gleichungen mit α_1, α_2 oder β_1, β_2 und addiert, so ergibt sich mit Hinblick auf (7); (8) und unter Hinzunahme von (3):

I. *Die beiden Gruppen von je drei Unbekannten a'_{11}, α_1, β_1 und a'_{22}, α_2, β_2 müssen den beiden Systemen von je drei Gleichungen genügen:*

$$\begin{cases} h_1(\alpha_1,\beta_1)=a'_{11}\alpha_1,\\ h_2(\alpha_1,\beta_1)=a'_{11}\beta_1,\\ \alpha_1^2+\beta_1^2=1;\end{cases} \tag{13} \qquad \begin{cases} h_1(\alpha_2,\beta_2)=a'_{22}\alpha_2,\\ h_2(\alpha_2,\beta_2)=a'_{22}\beta_2,\\ \alpha_2^2+\beta_2^2=1.\end{cases} \quad (13')$$

Ein solches System hat nach § 11, (3) i. Allg. die Bedeutung:

II. *Jede einzelne Hauptachsenrichtung ist dadurch charakterisiert, daß sie auf der zu ihr konjugierten Geraden senkrecht steht.*[88])

7. Hinreichende Gleichungen für die einzelnen Gruppen. Umgekehrt folgt, ohne daß $\Omega\xi\eta$ rechtwinklig vorausgesetzt wird, aus den

beiden ersten Gleichungen (13) durch Multiplikation mit α_1, β_1 und Addition mit Rücksicht auf die dritte Gleichung (13):

$$h_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_1 + h_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_1 = a'_{11} \quad \text{oder} \quad h(\alpha_1, \beta_1) = a'_{11}$$

und ebenso aus (13') die andere Gleichung (6).

Multipliziert man ferner die zwei ersten Gleichungen (13) mit α_2, β_2 und (13') mit α_1, β_1 und addiert, so ergibt sich:

$$(14) \qquad \begin{cases} h_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_2 = a'_{11}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2), \\ h_1(\alpha_2, \beta_2)\alpha_1 + h_2(\alpha_2, \beta_2)\beta_1 = a'_{22}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2), \end{cases}$$

wo die linken Seiten beide den Ausdruck a'_{12} in (5) darstellen. Hieraus aber folgt, falls $a'_{11} \neq a'_{22}$ (I Anm. 2, I, (7)), daß:

$$(15) \qquad a'_{12} = 0, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$$

Es folgen also aus den sechs Gleichungen (13), (13') die sechs Gleichungen (3), (4), (5), (6). Ist aber $a'_{11} = a'_{22}$, so folgen aus (14) erst unter Annahme der zweiten Gleichung (15) beide Gleichungen (15).

Die sechs Gleichungen (13) *und* (13') *sind hinreichende Bedingungen für die Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten, falls die letzteren* a'_{11} *und* a'_{22} *verschieden ausfallen. Dagegen sind sie für* $a'_{11} = a'_{22}$ *erst unter Hinzufügung der Gleichung* (4) *hinreichend.*

8. Die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten. Ausführlich geschrieben lauten die Gleichungen (13) und (13'):

$$(16) \begin{cases} (a_{11} - a'_{11})\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - a'_{11})\beta_1 = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 0. \end{cases} \qquad (16') \begin{cases} (a_{11} - a'_{22})\alpha_2 + a_{12}\beta_2 = 0, \\ a_{21}\alpha_2 + (a_{22} - a'_{22})\beta_2 = 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \end{cases}$$

Da nach der letzten Gleichung (16) oder (16') α_1 und β_1, bezüglich α_2 und β_2 nicht beide verschwinden, so folgt aus den beiden ersten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - a'_{11} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} - a'_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - a'_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Jeder der beiden Hauptachsenkoeffizienten a'_{11}, a'_{22} *muß daher der in* λ *quadratischen Gleichung*[89]*):*

$$(17) \qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

genügen.

9. Realität der Wurzeln. Mit den Abkürzungen:

$$(18) \qquad A'_{33} = a_{11} + a_{22}, \qquad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

wird die Gleichung (17):

$$(19) \qquad \Delta(\lambda) = \lambda^2 - A'_{33}\lambda + A_{33} = 0.$$

Ihre Diskriminante:

$$A_{33}'^2 - 4A_{33} = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \tag{20}$$

ist niemals negativ. *Ihre beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 sind daher stets reell.*

10. Einfache und doppelte Wurzeln. Wenn für eine Wurzel λ von (19) die Diagonalelemente $a_{11} - \lambda$ und $a_{22} - \lambda$ beide verschwinden, so wird auch der Differentialquotient von $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta'(\lambda) = (a_{11} - \lambda) + (a_{22} - \lambda) \tag{21}$$

Null, so daß λ eine Doppelwurzel ist. Umgekehrt folgt daher:

I. *Für eine einfache Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ können nicht beide Hauptelemente $a_{11} - \lambda$ und $a_{22} - \lambda$ der Determinante $\Delta(\lambda)$ gleichzeitig verschwinden.*

Eine *Doppelwurzel* tritt nach (20) immer dann und nur dann auf, wenn, wie in (10):

$$a_{11} = a_{22}, \qquad a_{12} = 0. \tag{22}$$

Der Wert der Doppelwurzel ist alsdann:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}. \tag{23}$$

II. *Für eine Doppelwurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ verschwinden stets alle vier Elemente der Determinante $\Delta(\lambda)$.*

11. Positive und negative und verschwindende Wurzeln. Für die beiden Wurzeln λ_1, λ_2 der Gleichung (19) ist:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A_{33}', \qquad \lambda_1\lambda_2 = A_{33}. \tag{24}$$

Ist daher $A_{33} \neq 0$, so verschwindet keine der beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 und ihre Vorzeichen sind für:

$$\begin{cases} A_{33} > 0, & A_{33}' > 0 : + +, \\ A_{33} > 0, & A_{33}' < 0 : - -, \\ A_{33} < 0 & \qquad : + -. \end{cases} \tag{25}$$

Dagegen ist für:

$$\begin{cases} A_{33} = 0, & A_{33}' \neq 0 : \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = A_{33}' \neq 0; \\ A_{33} = 0, & A_{33}' = 0 : \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{26}$$

12. Die zu einer Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung. Jeder Hauptachsenkoeffizient a_{11}' oder a_{22}' muß nach 8 eine Wurzel $\lambda_k (k = 1, 2)$ der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ sein. Die zu ihm und damit *zu der Wurzel λ_k gehörige Hauptachsenrichtung* α_k, β_k (vgl. **6**, I) muß nach (16), (16′) den Gleichungen:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)\alpha_k + a_{12}\beta_k = 0, \\ a_{21}\alpha_k + (a_{22} - \lambda_k)\beta_k = 0, \end{cases} \tag{27}$$

die wegen $\Delta(\lambda_k) = 0$ miteinander verträglich sind, und der Gleichung:

(28) $$\alpha_k^2 + \beta_k^2 = 1$$

genügen.

Ist nun λ_k eine einfache Wurzel, so verschwinden nach **10**, I nicht alle Koeffizienten der Gleichungen (27), so daß diese ein bestimmtes Wertsystem:

(29) $$\alpha_k : \beta_k = -a_{12} : a_{11} - \lambda_k = a_{22} - \lambda_k : -a_{21}$$

liefern. Mit diesem ist zuzüglich der Formel (28) die zu λ_k gehörige Hauptachsenrichtung abgesehen von der Pfeilspitze bestimmt.

Zu einer einfachen Wurzel λ_k *gehört daher stets eine und nur eine den Gleichungen* (27) *und* (28) *entsprechende Hauptachsenrichtung.*

Um also bei *verschiedenen* Wurzeln λ_1 und λ_2 *zwei* Hauptachsenrichtungen ξ und η zu erhalten, muß man für die Hauptachsenkoeffizienten:

(30) $$a'_{11} = \lambda_1, \qquad a'_{22} = \lambda_2$$

nehmen und dann α_1, β_1 und α_2, β_2 mit $k = 1$ und $k = 2$ aus (27) oder (29) und (28) bestimmen. Die Richtungen ξ und η sind dann nach 7 auch rechtwinklig. Einer Vertauschung der Wurzeln λ_1 und λ_2 in (30) entspricht nach (29) eine Vertauschung der Achsen ξ und η, so daß λ_1 mit ξ und λ_2 mit η untrennbar zusammenbleibt (vgl 4).

Bei *gleichen* Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2$ sind nach **10**, II die Gleichungen (27) identisch in α_k, β_k erfüllt. Es bleibt daher nur die Gleichung (28) für $k = 1, 2$ und dieser ist nach 7 noch die Gleichung (4) hinzuzufügen, so daß ξ und η irgend zwei rechtwinklige Achsen sind.

13. Gesamtergebnis der Hauptachsentransformation. Hiernach ergibt sich:

Die auf ein rechtwinkliges Achsensystem Oxy bezogene Gleichung (1) *einer Linie zweiter Ordnung nimmt durch Transformation auf ein neues rechtwinkliges System* $\Omega\xi\eta$, *deren Achsen* ξ *und* η *bei beliebigem Anfangspunkt* $\Omega = x_0, y_0$ *die stets vorhandenen Hauptachsenrichtungen der Kurve haben, folgende Formen an:*

1. *Für* $A_{33} \neq 0$:

(31) $$g(x, y) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0,$$

wo λ_1 und λ_2 die *nicht verschwindenden* Wurzeln der Gleichung

$$\Delta(\lambda) = 0 \quad (\lambda_1 \lambda_2 = A_{33})$$

sind.

a) Die Hauptachsenrichtungen ξ und η sind für zwei *ungleiche* Wurzeln $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *eindeutig* bestimmt, und zwar ist:

$$(32)\qquad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 = -a_{12} : a_{11} - \lambda_1 = a_{22} - \lambda_1 : -a_{21}, \\ \alpha_2 : \beta_2 = -a_{12} : a_{11} - \lambda_2 = a_{22} - \lambda_2 : -a_{21}. \end{cases}$$

b) Bei *gleichen* Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2$ sind *irgend* zwei rechtwinklige Achsen Hauptachsen.

2. *Für* $A_{33} = 0,\ A'_{33} \neq 0$:

$$(33)\qquad g(x, y) = \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0,$$

wo $\lambda_2 = A'_{33}$ die nicht verschwindende Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ ist.

Die Hauptachsenrichtungen ξ und η sind *eindeutig* bestimmt, und zwar ist:

$$(34)\qquad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{21}, \\ \alpha_2 : \beta_2 = -a_{12} : a_{11} - \lambda_2 = a_{22} - \lambda_2 : -a_{21}. \end{cases}$$

3. *Für* $A_{33} = 0,\ A'_{33} = 0$:

$$(35)\qquad g(x, y) = 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0.$$

Irgend zwei rechtwinklige Richtungen ξ, η sind Hauptachsenrichtungen.

14. Unendlich fernes Punktepaar der Kurve. Die Kurve (1) schneidet nach § 9, (25) die unendlich ferne Gerade $t = 0$ in dem Punktepaar:

$$(36)\qquad h(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0, \qquad t = 0,$$

welches bei der homogen gemachten Darstellung (31) die Form erhält:

$$(37)\qquad h(x, y) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0, \qquad \tau = 0.$$

Mit Bezug darauf folgt aus (25), (26):

Das unendlich ferne Punktepaar der Kurve zweiter Ordnung (1) *ist für:*

$$(38)\qquad \begin{cases} 1.\ A_{33} > 0\text{: getrennt imaginär;} \\ 2.\ A_{33} < 0\text{: getrennt reell;} \\ 3.\ A_{33} = 0,\ A'_{33} \neq 0\text{: zusammenfallend;} \\ 4.\ A_{33} = 0,\ A'_{33} = 0\text{: unbestimmt.}^{9)} \end{cases}$$

Man nennt das Punktepaar auch *vom Range* 2, 1 *oder* 0 (vgl. § 18, **1**), je nachdem es getrennt, zusammenfallend oder unbestimmt ist. Im letzten Falle gehört die *ganze* unendlich ferne Gerade der Kurve an.

Abgesehen von diesem letzten Fall, *geht die Kurve* (1) *durch die imaginären Kreispunkte* (§ 12, (25)) für $\lambda_1 = \lambda_2$, also nach (22) *unter den Bedingungen:*

$$(39)\qquad a_{11} = a_{22},\ a_{12} = 0 \qquad (A_{33} = \lambda_1^2 = a_{11}^2 > 0,\ A'_{33} = 2a_{11}).$$

In zwei zu den imaginären Kreispunkten harmonischen Punkten (den unendlich fernen Punkten zweier senkrechter Richtungen, § 20, 22, IV; § 7, (40)) *schneidet die Kurve* (1) *die unendlich ferne Gerade für* $\lambda_1 = -\lambda_2$, also nach (24) *unter der Bedingung:*

$$(40) \qquad A'_{33} = 0 \qquad (A_{33} = -\lambda_1^2 = -a_{11}^2 - a_{12}^2 < 0).$$

Man hat in (39) und (40) Spezialfälle von (38), 1. und 2.

15. Die Hauptachsen des Strahlenpaares. Die Hauptachsentransformation der Kurve (1) liefert zugleich diejenige des Strahlenpaares. Man hat nur in (1) $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$, in § 9, (17) $x_0 = y_0 = 0$ und in (31) $a'_{13} = a'_{23} = a'_{33} = 0$ zu nehmen:

Die auf ein rechtwinkliges Achsensystem Oxy bezogene Gleichung des Strahlenpaares (§ 7, (33)):

$$(41) \qquad h(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

wo x, y Punktkoordinaten in der Ebene oder Strahlenkoordinaten im Büschel sind (§ 7, **11**), *nimmt, auf die stets vorhandenen rechtwinkligen Hauptachsen (Halbierungslinien)* $O\xi\eta$ *bezogen, die Form an:*

$$(42) \qquad h(x, y) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 = 0.$$

Es gilt dann eine entsprechende *Klassifikation* wie in (38). In der Tat ist das Strahlenpaar (41) zu dem Punktepaar (36) perspektiv. Den Sonderfällen (39) und (40) entspricht das *Kreisstrahlenpaar* und *rechtwinklige* Strahlenpaar § 7 (39); (40).

16. Unendlich fernes Punktepaar in Linienkoordinaten. Wie (41) kann auch (36) unabhängig von der Kurve (1) als *beliebiges unendlich fernes Punktepaar* gelten. Es hat nach § 19, (18) in Linienkoordinaten die Gleichung (I § 71, (16')):

$$(43) \qquad a_{22}u^2 - 2a_{12}uv + a_{11}v^2 = 0.$$

Auch auf dieses überträgt sich die Klassifikation (38).

§ 22. Invarianten der Kurve zweiter Ordnung im gemeinen Koordinatensystem.

1. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen System. Transformiert man die auf ein *rechtwinkliges* System Oxy bezogene Gleichung der Kurve zweiter Ordnung:

$$(1) \quad f(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$$

durch die Substitution (I § 14, (11); (14)):

$$(2)\quad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + x_0 t', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + y_0 t', \\ t = \qquad\qquad\quad t', \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} Sx' = A_1 x + B_1 y + Sx_0' t. \\ Sy' = A_2 x + B_2 y + Sy_0' t, \\ St' = \qquad\qquad\quad St. \end{cases}$$

auf ein beliebiges *schiefwinkliges* System $O'x'y'$, so haben die Koeffizienten der neuen Gleichung:

$$(4)\quad f(x,y,t) = a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{12}x'y' + 2a'_{13}x't' + 2a'_{23}y't' + a'_{33}t'^2 = 0$$

die Werte § 9, (20)—(23). Gleichzeitig finden die Beziehungen § 15, (12)—(16) statt, so daß für die Substitutionsdeterminante die doppelte Darstellung gilt:

$$(5)\quad S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad (6)\quad S = \sin\omega = \sin x'y' = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

2. Zwei Determinanten als Invarianten. Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 2) ist nun unter Benutzung des Wertes (5) von S und mit Rücksicht auf die Werte § 9, (11), (14), (8):

$$S \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1(\alpha_1\beta_1) & h_2(\alpha_1\beta_1) & h_3(\alpha_1\beta_1) \\ h_1(\alpha_2\beta_2) & h_2(\alpha_2\beta_2) & h_3(\alpha_2\beta_2) \\ g_1(x_0y_0) & g_2(x_0y_0) & g_3(x_0y_0) \end{vmatrix}$$

und abermals nach demselben Multiplikationstheorem und § 9, (20) bis (23); (9):

$$(7)\qquad S^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Ebenso folgt nach dem Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 1) unter Benutzung des Wertes (6) von S:

$$S \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1(\alpha_1\beta_1) & h_2(\alpha_1\beta_1) \\ h_1(\alpha_2\beta_2) & h_2(\alpha_2\beta_2) \end{vmatrix}$$

und weiter:

$$(8)\qquad S^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}.$$

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System Oxy zu einem schiefwinkligen $O'x'y'$ bestehen zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen (1) *und* (4) *die Beziehungen* (7) *und* (8).

3. Kreis und Kurve zweiter Ordnung. Die Gleichung des um den Punkt $O' = x_0 y_0$ beschriebenen Kreises vom Radius r:

(9) $$k(x, y, t) = (x - x_0 t)^2 + (y - y_0 t)^2 - r^2 t^2 = 0$$

lautet in dem schiefwinkligen System $O'x'y'$ nach (2):

(10) $$k(x, y, t) = x'^2 + y'^2 + 2\gamma x'y' - r^2 t'^2 = 0,$$

wo:

(11) $$\gamma = \cos\omega = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 .$$

Demnach geht die Gleichung:

(12) $$f(x, y, t) - \lambda k(x, y, t) = 0$$

bei beliebigem Werte von λ durch (2) über in:

(13) $$f - \lambda k = a'_{11} x'^2 + \cdots + a'_{33} t'^2 - \lambda (x'^2 + y'^2 + 2\gamma x'y' - r^2 t'^2) = 0.$$

Da aber auch für die Kurve zweiter Ordnung (12) der Satz (8) gelten muß, so ist identisch in λ:

(14) $$S^2 \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} - \gamma\lambda \\ a'_{21} - \gamma\lambda & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung enthält schließlich nur mehr die Koeffizienten von (1) und (4), so daß sich ergibt:

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System Oxy zu einem schiefwinkligen $O'x'y'$ besteht zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen (1) *und* (4) *identisch in λ die Beziehung* (14), *wo S nach* (6) *und γ nach* (11) *dem System $O'x'y'$ eigentümlich sind.*

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der beiderseitigen Potenzen von λ folgt dann aus (14) neben (8) die weitere Gleichung:

(15) $$S^2 (a_{11} + a_{22}) = a'_{11} + a'_{22} - 2 a'_{12} \gamma .$$

4. Invarianten im gemeinen Koordinatensystem. Dividiert man die Gleichungen (7), (8) und (15) durch S^2, so hängt die linke Seite jeder Gleichung nur von a_{kl}, die rechte nur von a'_{kl} und ω ab. Geht man also von demselben rechtwinkligen System Oxy zu verschiedenen schiefwinkligen $O'x'y'$ über, so bleibt die rechte Seite bei wechselnden Werten von a'_{kl} und ω immer der unveränderlichen linken Seite gleich. Indem man also die Gleichung (1) fallen läßt und in der auf das schiefwinklige System bezogenen Gleichung (4) die Akzente unterdrückt, kann man den Satz aussprechen:

Die Koeffizientenverbindungen[90]):

(16) $$\frac{1}{\sin^2\omega} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sin^2\omega} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}$$

der Gleichung der Kurve zweiter Ordnung:

$$(17) \qquad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + 2a_{33}t^2 = 0$$

haben in jedem schief- oder rechtwinkligen Koordinatensystem Oxy denselben Wert, falls $\omega = xy$ den jedesmaligen Achsenwinkel (also beim rechtwinkligen $\omega = \frac{\pi}{2}$) bedeutet.

5. Bedingte Invariante. Wie in (7) die Determinante $A = |a_{kl}|$ durch die Determinante $A' = |a'_{kl}|$, so kann man auch die Unterdeterminanten A_{kl} von A durch diejenigen A'_{kl} von A' ausdrücken. Es gelten dann die Formeln, deren Beweis wir in § 41, **12** nachholen werden:

$$(18) \begin{cases} S^2 A_{11} = A'_{11}\alpha_1^2 + 2A'_{12}\alpha_1\alpha_2 + A'_{22}\alpha_2^2 + 2A'_{13}\alpha_1 x_0 + 2A'_{23}\alpha_2 x_0 + A'_{33}x_0^2, \\ S^2 A_{22} = A'_{11}\beta_1^2 + 2A'_{12}\beta_1\beta_2 + A'_{22}\beta_2^2 + 2A'_{13}\beta_1 y_0 + 2A'_{23}\beta_2 y_0 + A'_{33}y_0^2, \\ S^2 A_{13} = A'_{13}\alpha_1 + A'_{23}\alpha_2 + A'_{33}x_0, \\ S^2 A_{23} = A'_{13}\beta_1 + A'_{23}\beta_2 + A'_{33}y_0, \\ S^2 A_{33} = A'_{33} \text{ (wie in (8))}. \end{cases}$$

Hiernach ist unter der Voraussetzung:

$$(19) \qquad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{33} = 0$$

stets auch:

$$(20) \qquad A'_{13} = 0, \quad A'_{23} = 0, \quad A'_{33} = 0$$

und umgekehrt. Zugleich wird dann:

$$(21) \qquad S^2(A_{11} + A_{22}) = A'_{11} + A'_{22} + 2A'_{12}\gamma.$$

Unterdrückt man also, wie unter 4. die Akzente, so folgt:

Unter den Bedingungen (19) *ist für die Gleichung* (17) *auch der Ausdruck:*

$$(22) \qquad \frac{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}$$

in jedem schief- oder rechtwinkligen System Oxy von gleichem Werte, falls $\omega = xy$ den jedesmaligen Achsenwinkel (also beim rechtwinkligen $\omega = \frac{\pi}{2}$) bedeutet.

6. Die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten bei schiefwinkligen Koordinaten. Da die Gleichung (14) identisch in λ gilt, so sind auch die Wurzeln $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ der beiderseitigen Determinanten dieselben. Es folgt also mit Rücksicht auf § 21, (17):

Ist eine Kurve zweiter Ordnung durch ihre Gleichung (4) *in bezug auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem $O'x'y'$ mit dem Achsenwinkel*

$\omega = x'y'$ $(\cos\omega = \gamma)$ *gegeben, so lautet die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten* $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ [89]):

$$(23) \qquad \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} - \gamma\lambda \\ a'_{21} - \gamma\lambda & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung sind stets reell.

7. Invarianten des Strahlenpaares. Mit $a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0$ kommt die auf Oxy bezogene Gleichung (1) auf die Gleichung eines Strahlenpaares im Strahlbüschel des Anfangspunktes O zurück (§ 7, (33)):

$$(24) \qquad h(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0,$$

wobei man x, y als Koordinaten ebensowohl des Punktes P in der Ebene wie des Strahles $p = OP$ im Büschel nehmen kann.

Für dieses Strahlenpaar gelten beim Übergang zu einem konzentrischen schief- oder rechtwinkligen System $O\xi\eta$ (in (2) $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ und ξ, η für x', y') ebenfalls die Invariantenbeziehungen (8) und (15).

Insbesondere sind bei ebenfalls rechtwinkligem System $O\xi\eta$ $\left(\omega = \frac{\pi}{2}\right)$ die Ausdrücke:

$$(25) \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad a_{11} + a_{22}$$

invariant. Es sind die bei der Einteilung § 21, **14** benutzten Ausdrücke A_{33}, A'_{33}.

8. Das Kreisstrahlenpaar. Beim Übergang von dem *rechtwinkligen* System Oxy zu einem *anderen rechtwinkligen* $O\xi\eta$ *bleibt die Gleichung des imaginären Kreisstrahlenpaares im Büschel* (§ 7, (39)) *selbst invariant* (vgl. § 21, (11)):

$$(26) \qquad x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2 = 0.$$

Man kann diesen Satz noch etwas anders auffassen. Denkt man sich nämlich den Strahl OP als $p' = \xi, \eta$ mit dem System $O\xi\eta$ starr verbunden und dreht nun das System $O\xi\eta$ bis zum Zusammenfall mit Oxy (Fig. 84), so bleiben die Koordinaten ξ, η des Strahles p' während dieser Bewegung immer dieselben. Daher bestehen zwischen der alten Lage $p = x, y$ und der neuen $p' = \xi, \eta$ in bezug auf die nunmehr identischen Systeme Oxy und $O\xi\eta$ nach wie vor die Gleichungen (2) (mit den in **7.** angegebenen Änderungen). Infolge von (26) genügt dann jeder Strahl, der in seiner alten Lage der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ genügt, auch in

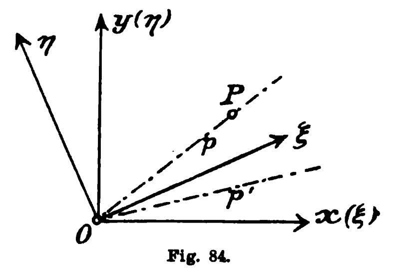


Fig. 84.

der neuen Lage der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 = 0$. Beide Gleichungen beziehen sich aber nun auf dasselbe System $Oxy = O\xi\eta$. Daher ergibt sich[91]):

Das imaginäre Kreisstrahlenpaar:

$$x^2 + y^2 = 0 \tag{27}$$

bleibt bei jeder Drehung der (starren) Ebene um den Mittelpunkt des Strahlbüschels fest.

9. Rechtwinklige Halbmesser der Ellipse und Hyperbel. Erhält die auf ein *rechtwinkliges* System Oxy bezogene Gleichung der *Ellipse* oder *Hyperbel:*

$$g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{28}$$

wie in § 14, (8) in einem beliebigen konzentrischen System $O\xi\eta$ die Form:

$$g = \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + 2\nu\xi\eta - 1 = 0, \tag{29}$$

und ist das zweite System $O\xi\eta$ *ebenfalls rechtwinklig* ($S = 1$, $\gamma = 0$), so ist nach (15):

$$\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}. \tag{30}$$

Da aber λ und μ nach (29) die (reellen oder imaginären) Längen der in die ξ- und η-Achse fallenden Halbmesser der Kurve sind, so folgt, wie § 5, 2:

Die Summe der reziproken Quadrate zweier rechtwinkliger Halbmesser der Ellipse oder Hyperbel ist konstant.[23])

Dies ist also eine Folge davon, daß der dritte Ausdruck (16), der sich für $\omega = \frac{\pi}{2}$ auf $a_{11} + a_{22}$ reduziert, in jedem rechtwinkligen System derselbe bleibt.

Bei der *gleichseitigen Hyperbel* (§ 1, (22)) bleibt er in jedem rechtwinkligen System gleich *Null.*

10. Konjugierte Durchmesser der Ellipse und Hyperbel. Erhält die Gleichung (28) in bezug auf ein schiefwinkliges System $O\xi\eta$ aus zwei konjugierten Durchmessern nach § 14, (11) die Form:

$$g = \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} - 1 = 0, \tag{31}$$

so folgt aus (8) und (15):

$$S^2 \frac{1}{a^2}\frac{1}{b^2} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{\mu^2}. \tag{32}$$ $$S^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}. \tag{33}$$

Die Gleichung (32) gibt:

(34) $$\lambda^2\mu^2\sin^2\omega = a^2b^2$$

und die Gleichung (33) reduziert sich mittels (32) auf:

(35) $$\lambda^2 + \mu^2 = a^2 + b^2.$$

Diese in § 14, (17); (16) aufgestellten Sätze sind also *ein Ausdruck der Invarianteneigenschaften* (8) und (15).[73])

11. Der Parameter der Parabel. Nimmt die Scheitelgleichung der Parabel:

(36) $$g = \frac{y^2}{p} - 2x = 0$$

in bezug auf ein schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta$ wie in § 14, (25) die Form an:

(37) $$g = \frac{\eta^2}{\pi} - 2\xi = 0,$$

so folgt aus (15):

(38) $$S^2\frac{1}{p} = \frac{1}{\pi}$$

und damit für den neuen Koeffizienten π der Wert:

(39) $$\pi = \frac{p}{\sin^2\omega}$$

übereinstimmend mit § 14, (25).

12. Das imaginäre Kreispunktepaar in schiefwinkligen Koordinaten. Nach (10) hat das imaginäre Kreispunktepaar in dem schiefwinkligen System $O'x'y'$ mit dem Achsenwinkel ω ($\cos\omega = \gamma$) die Gleichungen:

(40) $$x'^2 + y'^2 + 2\gamma x'y' = 0, \quad t' = 0.$$

Die auf dasselbe System bezogene *Kurve* (4) *geht durch diese hindurch*, wenn:

(41) $$a'_{11}\gamma = a'_{22}\gamma = a'_{12}.$$

Mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ gehen wieder die Bedingungen § 21, (39) hervor.

§ 23. Einteilung der Kurven zweiter Ordnung nach dem Mittelpunkt.

1. Allgemeiner Begriff des Mittelpunktes. Für die auf ein rechtwinkliges (oder schiefwinkliges) Koordinatensystem bezogene Linie zweiter Ordnung:

(1) $$f(x, y, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}t^2 + 2a_{23}yt + 2a_{31}tx + 2a_{12}xy = 0$$

soll im Anschluß an § 11, (7) jeder Punkt, dessen homogene Koordinaten den zwei Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t = 0, \\ f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}t = 0 \end{cases}$$

genügen, ein *Mittelpunkt* heißen.

Ein Mittelpunkt in diesem (weiteren) Sinne ist entweder *endlich* ($t = 1$), und dann auch ein Mittelpunkt in dem (engeren) Sinne § 11, (6), oder *unendlich fern* ($t = 0$). In beiden Fällen ist seine *Polare* nach § 11, (15) *die unendlich ferne Gerade*, sofern er überhaupt eine bestimmte Polare hat ($f_3 \neq 0$).

2. Mittelpunkt und Doppelpunkt. Da die Gleichungen (2) einen Teil der Gleichungen § 10, (28) des Doppelpunktes bilden, so folgt:

I. *Jeder endliche oder unendlich ferne Doppelpunkt ist zugleich ein (auf der Kurve selbst liegender) Mittelpunkt.*

Mit Rücksicht auf § 9, (6) folgt aus den drei Gleichungen:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0; \quad f = 0$$

stets:

$$f_3 t = 0.$$

II. *Ein endlicher Mittelpunkt* ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $t = 1$), *der auf der Kurve liegt* ($f = 0$), *ist stets ein Doppelpunkt* ($f_3 = 0$); und ebenfalls aus § 9, (6):

III. *Ein unendlich ferner Mittelpunkt* ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$; $t = 0$) *liegt stets auf der Kurve* ($f = 0$), *auch wenn er kein Doppelpunkt ist.* Er liegt eben mit seiner Polare vereinigt (§ 11, 9, I).

3. Die Anzahl der Mittelpunkte. Die Gleichungen (2) stellen *zwei Gerade*, die Polaren der unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen (§ 11, (21); I § 22, (18)) dar, deren gemeinsame Punkte Mittelpunkte sind. Es ist daher zu unterscheiden, ob die beiden Geraden einen *Punkt* gemein haben oder ganz *zusammenfallen* oder beide *unbestimmt* sind.[92])

Wenn die Unterdeterminanten der Koeffizienten von (2):

$$(3)\qquad A_{13},\ A_{23},\ A_{33} \text{ nicht alle } 0$$

sind, hat demnach die Kurve *einen einzigen bestimmten Mittelpunkt mit den Koordinaten* (I § 24, 2):

$$(4)\qquad x_0 : y_0 : t_0 = A_{13} : A_{23} : A_{33}.$$

Wenn dagegen:

$$(5)\qquad A_{13} = 0, \quad A_{23} = 0, \quad A_{33} = 0,$$

aber die Elemente:

$$(6)\qquad a_{11},\ a_{22},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{23} \text{ nicht alle } 0$$

sind, hat die Kurve *eine Mittelpunktsachse mit den Koordinaten:*

(7) $$u_0 : v_0 : s_0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3},$$

$k = 1$ oder 2. Mit (5) ist stets auch die Determinante:

(8) $$A = 0.$$

Wenn endlich (§ 19, (4)):

(9) $$a_{k1} = 0, \quad a_{k2} = 0, \quad a_{k3} = 0, \quad k = 1, 2; \quad A'' = a_{33} \neq 0,$$

wird den Gleichungen (2) durch jeden Punkt der Ebene genügt; der Mittelpunkt ist *unbestimmt.* Mit (9) ist neben (5) auch $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$ und damit (§ 19, (3)):

(10) $$A = 0, \quad A' = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0.$$

4. Unterscheidung eines endlichen und unendlich fernen Mittelpunktes. Der Mittelpunkt (4) ist ein *bestimmter endlicher Mittelpunkt,* wenn:

(11) $$A_{33} \neq 0.$$

Er hat die *gemeinen Koordinaten:*

(12) $$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \quad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}},$$

zugleich die Auflösungen der Gleichungen § 11, (7).

Er ist dagegen *unendlich fern,* wenn:

(13) $$A_{33} = 0, \quad A_{13}, A_{23} \text{ nicht beide } 0,$$

und hat dann nach (4) die Richtungskosinus (I § 22, 6):

(14) $$\alpha_1 : \beta_1 = A_{13} : A_{23}.$$

Die unmittelbare Auflösung der mit $t = 0$ reduzierten Gleichungen (2) ergibt aber auch:

(15) $$x_0 : y_0 = \alpha_1 : \beta_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{21}.$$

Die Bedingungen (3) sind in (11) und (13) schon mit enthalten.

5. Unterscheidung einer endlichen und unendlich fernen Mittelpunktsachse. Die Mittelpunktsachse (7) ist *endlich,* wenn die Elemente von A_{33}:

(16) $$a_{11}, a_{12}, a_{22} \text{ nicht alle } 0.$$

Sie hat die Richtungskosinus:

(17) $$\alpha_1 : \beta_1 = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{21}.$$

Sie ist dagegen *unendlich fern,* wenn:

(18) $$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0; \quad a_{13}, a_{23} \text{ nicht beide } 0.$$

Die Bedingungen (6) sind in (16) und (18) aufgenommen.

6. Umformung der Bedingungen eines unendlich fernen Mittelpunktes. Die für die Determinante A gültigen Gleichungen (§ 19, (5)):

$$A a_{11} = A_{22} A_{33} - A_{23}^2, \quad A a_{22} = A_{33} A_{11} - A_{31}^2, \quad A a_{33} = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$$

geben für $A_{33} = 0$:

(19) $$A a_{11} = - A_{23}^2, \quad A a_{22} = - A_{31}^2$$

und daher (§ 21, (18)):

(20) $$A A'_{33} = - (A_{13}^2 + A_{23}^2).$$

Bei reellen Koeffizienten a_{kl} sind daher *die Bedingungen* (13) *eines unendlich fernen Mittelpunktes* auch:

(21) $$A_{33} = 0, \quad A A'_{33} \neq 0.$$

7. Umformung der Bedingungen für eine Mittelpunktsachse. *Die Bedingungen* (5) *für eine Mittelpunktsachse* sind nach (20) auch ersetzbar durch:

(22) $$A_{33} = 0, \quad A A'_{33} = 0$$

oder mit Rücksicht auf (8) durch:

(22′) $$A_{33} = 0, \quad A = 0$$

Aus den beiden Gleichungen:

(23) $$A'_{33} = a_{11} + a_{22}, \quad A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

folgt nun:

(24) $$\begin{cases} a_{11} A'_{33} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + A_{33}, \\ a_{22} A'_{33} = a_{21}^2 + a_{22}^2 + A_{33} \end{cases}$$

und daraus die *identische Gleichung:*

(25) $$A'^2_{33} = a_{11}^2 + 2 a_{12}^2 + a_{22}^2 + 2 A_{33}.$$

Aus (23) und (25) aber ergibt sich:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden aller Elemente a_{11}, a_{12}, a_{22} von A_{33} (womit auch $A = 0$) sind:

(26) $$A_{33} = 0, \quad A'_{33} = 0.$$

Die *Bedingungen* (5) *und* (16) *einer endlichen Mittelpunktsachse* sind daher ersetzbar durch:

(27) $$A_{33} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{33} \neq 0.$$

Wenn mit (26) $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, so folgt aus:

$$A' = A_{11} + A_{22} + A_{33}; \; A_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2, \; A_{22} = a_{33} a_{11} - a_{31}^2:$$

(28) $$A' = - (a_{13}^2 + a_{23}^2).$$

Die *Bedingungen* (5) *und* (18) *der unendlich fernen Mittelpunktsachse* sind daher ersetzbar durch:

(29) $$A_{33} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{33} = 0, \quad A' \neq 0;$$

die *Bedingungen* (5) *und* (9) *einer unbestimmten Mittelpunktsachse* auch durch:

(30) $$A_{33} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{33} = 0, \quad A' = 0, \quad a_{33} \neq 0.$$

8. Gesamtergebnis. *Die Kurve zweiter Ordnung* (1) *hat unter den Bedingungen:*

$$(31)\quad \begin{aligned} &A_{33} \neq 0: \text{ einen endlichen Mittelpunkt;}\\ &A_{33} = 0,\ AA'_{33} \neq 0: \text{ einen } \infty \text{ fernen Mittelpunkt;}\\ &A_{33} = 0,\ A = 0,\ A'_{33} \neq 0: \text{ eine endliche Mittelpunktsachse;}\\ &A_{33} = 0,\ A = 0,\ A'_{33} = 0,\ A' \neq 0: \text{ eine } \infty \text{ ferne Mittelpunktsachse;}\\ &A_{33} = 0,\ A = 0,\ A'_{33} = 0,\ A' = 0,\ A'' = a_{33} \neq 0: \text{ Mittelp. unbest.} \end{aligned}$$

§ 24. Mittelpunkts- und Hauptachsengleichung der Mittelpunktskurven.

1. Begriff der Mittelpunktsgleichung. Wird die Gleichung:

$$(1)\quad g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

auf ein neues rechtwinkliges (oder schiefwinkliges) Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$ transformiert, so verschwinden die Koeffizienten § 9, (22) der linearen Glieder der transformierten Gleichung § 9, (19), wenn:

$$(2)\quad \begin{cases} g_1{}^0\alpha_1 + g_2{}^0\beta_1 = 0, \\ g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Da aber die Determinante $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ nicht verschwinden darf (I § 13, (7)), so ist für das Bestehen der Gleichungen (2) notwendig und hinreichend, daß:

$$(3)\quad g_1{}^0 = 0, \quad g_2{}^0 = 0,$$

also nach § 11, (6) der neue Anfangspunkt $\Omega = x_0, y_0$ ein (endlicher) Mittelpunkt ist.

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung erhält daher in einem recht- oder schiefwinkligen System $\Omega\xi\eta$ immer dann und nur dann die Form (vgl. § 7, (23)):

$$(4)\quad g(x, y) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{33} = 0,$$

wenn der Anfangspunkt Ω, ohne Rücksicht auf die Richtung der Achsen ξ, η, ein (endlicher) Mittelpunkt der Kurve ist. Sie heißt dann die *Mittelpunktsgleichung* der Kurve.

2. Das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung. Der Wert § 9, (23) des Koeffizienten a'_{33} in (4) wird mit Rücksicht auf § 9, (9) infolge von (3):

$$(5)\quad a'_{33} = g^0 = g_1{}^0x_0 + g_2{}^0y_0 + g_3{}^0 = g_3{}^0 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33},$$

wo für x_0, y_0 *der* den Gleichungen (3) genügende Mittelpunkt (oder *ein* solcher) einzusetzen ist. Man kann daher, um a'_{33} zu bestimmen, auch x_0, y_0 eliminieren aus den drei Gleichungen (2) und (5), also aus:

$$(6)\quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33} - a'_{33} = 0. \end{cases}$$

3. Das konstante Glied im Falle eines einzigen Mittelpunktes. Da die drei Gleichungen (6) in x_0, y_0, 1 linear und homogen sind, so folgt aus ihnen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a'_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$(7)\qquad A - A_{33}a'_{33} = 0.$$

Im Falle eines bestimmten endlichen Mittelpunktes (§ 23, (11)) *ist somit in* (4) (vgl. § 7, (25))[93]:

$$(8)\qquad a'_{33} = \frac{A}{A_{33}} \qquad (A_{33} \neq 0).$$

4. Das konstante Glied im Falle einer Mittelpunktsachse. Wenn dagegen eine endliche Mittelpunktsachse vorliegt, sind nach § 23, (27) die Koeffizienten A und A_{33} in (7) Null.

Jedoch gibt dann die Elimination von x_0, 1 aus der ersten und dritten und von y_0, 1 aus der zweiten und dritten Gleichung (6):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0 + a_{13} \\ a_{31} & a_{32}y_0 + a_{33} - a'_{33} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{21}x_0 + a_{23} \\ a_{32} & a_{31}x_0 + a_{33} - a'_{33} \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt, wobei y_0 und x_0 die verschwindenden Koeffizienten $-A_{23}$ und $-A_{13}$ erhalten (§ 23, (5)):

$$A_{22} - a_{11}a'_{33} = 0, \quad A_{11} - a_{22}a'_{33} = 0.$$

Durch Addition folgt:

$$(9)\qquad A' - A'_{33}a'_{33} = 0.$$

Im Falle einer endlichen Mittelpunktsachse (§ 23, (27)) *ist somit in* (4) *unabhängig von der Wahl von Ω auf der Mittelpunktsachse:*

$$(10)\qquad a'_{33} = \frac{A'}{A'_{33}} \qquad (A_{33} = 0,\ A = 0,\ A'_{33} \neq 0).$$

Bei *unbestimmtem* Mittelpunkt (§ 23, (30)) reduzieren sich die Gleichungen (6) auf:

$$(11)\qquad a'_{33} = a_{33}.$$

5. Begriff der Hauptachsen bei den Mittelpunktskurven. Haben die *Achsen* ξ, η des neuen Systems $\Omega\xi\eta$ die *Hauptachsenrichtungen*, so erhält die Gleichung (1) nach § 21, (31) die Form:

$$(12)\qquad g(x, y) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + 2a'_{13}\xi + 2a'_{23}\eta + a'_{33} = 0,$$

unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes Ω, von dem nur die Werte der Koeffizienten $a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}$ abhängig bleiben.

Legt man andererseits den *Anfangspunkt* Ω in einen (endlichen) *Mittelpunkt* der Kurve, so erhält die Gleichung (1) die Form (4), unabhängig von der Wahl der Achsenrichtungen ξ, η, von denen nur die Werte der Koeffizienten $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}$ abhängig bleiben.

Legt man daher gleichzeitig die Achsen ξ, η *nach den Hauptachsenrichtungen und den Anfangspunkt* Ω *in einen endlichen Mittelpunkt, so muß die Gleichung* (1) *die Form erhalten:*

$$(13) \qquad g(x, y) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a'_{33} = 0\,.$$

Die alsdann nach *Lage* und *Richtung* gewählten Achsen ξ und η heißen die beiden *Hauptachsen der Kurve* und die Gleichung (13) die *Hauptachsengleichung.*

Nach § 21, **13** und § 24, **3—4** sind jedoch sowohl in betreff der Werte von λ_1, λ_2, als auch des Wertes von a'_{33} weitere Unterscheidungen zu machen.

6. Hauptachsengleichung der Kurve mit einem Mittelpunkt. Die Ungleichung:

$$(14) \qquad A_{33} \neq 0$$

ist nach § 21, (31) und § 23, (11) die *gemeinsame* Voraussetzung dafür, daß keine der beiden Größen λ_1 und λ_2 verschwindet, und dafür, daß ein bestimmter endlicher Mittelpunkt vorliegt und das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung den Wert (8) hat.

Unter der Voraussetzung (14) *kann die Gleichung* (1) *auf die Form* (vgl. § 7, (26)):

$$(15) \qquad g(x, y) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$$

gebracht werden, wo keiner der zwei Koeffizienten λ_1 *und* λ_2 *verschwindet.*

Für das rechtwinklige Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$, auf das sich die Gleichung (15) bezieht, ist Ω der Mittelpunkt § 23, (12) und sind ξ, η die beiden Hauptachsen der Kurve. Diese sind *eindeutig bestimmt,* wenn λ_1, λ_2, die Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ (§ 21, **13**), verschieden, dagegen zwei *beliebige* von Ω ausgehende rechtwinklige Achsen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$.

7. Hauptachsengleichung der Kurven mit einer Mittelpunktsachse. Die Voraussetzung:

$$(16) \qquad A_{33} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{33} \neq 0$$

hat nach § 21, (33) zur Folge, daß eine der Wurzeln λ_1, λ_2, etwa λ_1 verschwindet, die andere nicht, und hat nach § 23, (27) zur Folge,

daß eine endliche Mittelpunktsachse vorliegt und das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung den Wert (10) hat.

Unter der Voraussetzung (16) *kann die Gleichung* (1) *auf die Form:*

$$(17) \qquad g(x, y) = \lambda_2 \eta^2 + \frac{A'}{A'_{33}} = 0$$

gebracht werden, wo λ_2 *nicht verschwindet.*

Für das rechtwinklige Koordinatensystem $\Omega\xi\eta$, auf das sich die Gleichung (17) bezieht, ist Ω irgendein Punkt der Mittelpunktsachse (§ 23, (7)) und sind ξ und η die Hauptachsen der Kurve. Die *Hauptachse* ξ fällt nach § 21, (34) und § 23, (17) in die *Mittelpunktsachse.*

Unter den Voraussetzungen eines unbestimmten Mittelpunktes:

$$(18) \qquad A_{33} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{33} = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = a_{33} \neq 0$$

ist die Gleichung der Kurve in homogenen Koordinaten in jedem System Oxy oder $\Omega\xi\eta$:

$$(19) \qquad f(x, y, t) = a_{33} t^2 = a_{33} \tau^2 = 0.$$

8. Bedeutung der Hauptachsengleichungen. In den Gleichungen (15) und (17) können die Koeffizienten λ_1, λ_2, bezüglich λ_2 unter den bezüglichen Voraussetzungen nicht mehr verschwinden, wohl aber das konstante Glied. In jedem Falle ist die Bedeutung der Gleichung aus ihrer Form bereits zu ersehen.

Die *Gleichung* (15) stellt für:

$$(20) \qquad A \neq 0$$

eine *eigentliche* (§ 18, (2)) *Mittelpunktskurve,* nach § 13, (1) eine imaginäre oder reelle *Ellipse* oder eine *Hyperbel* dar; für:

$$(21) \qquad A = 0$$

aber nach § 21, (42) ein *eigentliches Strahlenpaar.* In diesem Falle muß neben (21):

$$(21') \qquad A' \neq 0$$

sein, da sonst nach § 19, (8) gegen die Voraussetzung (14) $A_{33} = 0$ wäre. Der Mittelpunkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ des Strahlenpaares ist zugleich sein Doppelpunkt (§ 23, 2, II).

Die Gleichung (17) mit den Bedingungen (16) stellt für:

$$(22) \qquad A' \neq 0$$

ein reelles oder imaginäres *Parallellinienpaar* dar. Der unendlich ferne Punkt $\eta = 0$, $\tau = 0$ der ξ-Achse ist zugleich der Doppelpunkt der Kurve. Für:

$$(23) \qquad A' = 0$$

wird die Kurve (17) eine *Doppelgerade*. In diesem Falle muß neben (23):

$$A'' \neq 0 \tag{23'}$$

sein, da sonst nach § 19, (24) alle a_{kl}, und damit gegen die Voraussetzung (16) auch $A'_{33} = 0$ wäre. Die *Mittelpunktsachse* $\eta = 0$ ist zugleich *Doppellinie* der Kurve.

Die Gleichung (19) stellt die *unendlich ferne Doppelgerade* dar.

9. Übersicht der Hauptachsengleichungen. Nach dem Range (vgl. § 18, 1) geordnet, zerfallen die Kurven mit endlichen Mittelpunkten in die folgenden Formen:

(24) $A \neq 0$; $A_{33} \neq 0$: $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \dfrac{A}{A_{33}} = 0$: Ellipsen und Hyperbeln (§ 13, (1));

(25) $\begin{cases} A = 0, A' \neq 0; A_{33} \neq 0: \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0: \text{gekreuzte Strahlenpaare (§ 7, (35))}; \\ A = 0, A' \neq 0; A_{33} = 0, A'_{33} \neq 0: \lambda_2 \eta^2 + \dfrac{A'}{A'_{33}} = 0: \text{Parallellinienpaare}; \end{cases}$

(26) $\begin{cases} A = 0, A' = 0, A'' \neq 0; A_{33} = 0, A'_{33} \neq 0: \lambda_2 \eta^2 = 0: \text{Endliche Doppelgerade}; \\ A = 0, A' = 0, A'' \neq 0; A_{33} = 0, A'_{33} = 0: a_{33} \tau^2 = 0: \text{unendl. ferne Doppelgerade}. \end{cases}$

§ 25. Die Kurven ohne endlichen Mittelpunkt.

1. Einführung der Hauptachsenrichtungen. Die *gemeinsame* Bedingung der Kurven ohne endlichen Mittelpunkt ist nach § 23, (31):

$$A_{33} = 0. \tag{1}$$

Führt man daher ein Koordinatensystem $\Omega \xi \eta$ ein, dessen Achsen ξ, η, *bei verfügbar bleibendem Anfangspunkt* $\Omega = x_0, y_0$, die *Hauptachsenrichtungen* haben, so wird die Gleichung der Kurve nach § 21, (33):

$$\lambda_2 \eta^2 + 2 a'_{13} \xi + 2 a'_{23} \eta + a'_{33} = 0, \tag{2}$$

je nachdem dann mit (§ 23, (20)):

$$A_{13}^2 + A_{23}^2 = - A A'_{33} \neq 0 \tag{3}$$

ein *einziger* unendlich ferner Mittelpunkt oder mit:

$$A = 0, \quad A'_{33} = 0, \quad A' \neq 0 \tag{4}$$

eine unendlich ferne *Mittelpunktsachse* vorliegt, wird:

$$\lambda_2 = A'_{33} \neq 0 \tag{5}$$

oder:

$$\lambda_2 = 0. \tag{6}$$

2. Beziehung der Hauptachsenrichtungen zu dem unendlich fernen Mittelpunkt. Wenn der Fall (3) eintritt, liegt *der unendlich*

ferne Mittelpunkt nach § 23, (14); (15) in der Richtung:

(7) $$\alpha_1 : \beta_1 = A_{13} : A_{23} = -a_{12} : a_{11} = a_{22} : -a_{21}$$

und gehört der Kurve selbst an (§ 23, 2, III). Diese Richtung hat aber nach § 21, (34) auch die Hauptachse ξ.

Die Hauptachsenrichtung ξ ist dieselbe wie die Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt.

Wir verfügen über ihre Pfeilspitze, indem wir mit Rücksicht auf (3) in:

(8) $$\tau\alpha_1 = A_{13}, \quad \tau\beta_1 = A_{23}; \quad \tau = \sqrt{-AA'_{33}}$$

die positive Wurzel nehmen.

Im Falle (4) einer *unendlich fernen Mittelpunktsachse* sind nach § 21, (35) die Hauptachsenrichtungen unbestimmt.

3. Verschwinden eines linearen Gliedes. Die beiden Koeffizienten:

(9) $$\begin{cases} a'_{13} = g_1{}^0\alpha_1 + g_2{}^0\beta_1, \\ a'_{23} = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 \end{cases}$$

können mangels eines endlichen Mittelpunktes nach § 24, 1 *niemals beide gleichzeitig verschwinden.*

Wohl aber kann über den Punkt $\Omega = x_0, y_0$ derart verfügt werden, daß *einer* dieser Koeffizienten, a'_{23}, und außerdem a'_{33} verschwindet, also:

(10) $$a'_{23} = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 = 0,$$ (11) $$a'_{33} = g^0 = 0.$$

4. Der Scheitelpunkt der Kurven mit einem unendlich fernen Mittelpunkt. Im Falle (3) sind die Hauptachsenrichtungen α_1, β_1 und α_2, β_2 mit (8) bekannt. Die beiden Gleichungen (10) und (11) bestimmen dann nach § 10, (13) den Punkt x_0, y_0 der Kurve derart, daß deren Tangente in ihm die Richtung α_2, β_2 hat.

Wir nennen diesen Punkt der Kurve, in dem Normale und Tangente die Hauptachsenrichtungen ξ und η haben, den *Scheitelpunkt der Kurve.*

Da neben (10):

(12) $$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1,$$

so muß mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ sein:

(13) $$g_1{}^0 + \varrho\alpha_1 = 0, \quad g_2{}^0 + \varrho\beta_1 = 0.$$

Auch folgt hieraus umgekehrt durch Multiplikation mit α_2, β_2 und Addition nach (12) wieder die Gleichung (10).

Der Scheitelpunkt hat daher den drei Gleichungen (13), (11) *unter Elimination von ϱ zu genügen.* Wir beweisen im folgenden, daß *unter*

den Voraussetzungen (1), (3) *ein einziger endlicher* Scheitelpunkt vorhanden ist.

Aus (13) folgt überdies, da $\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1$ ist, für den nicht verschwindenden Koeffizienten a'_{13} in (9):

(14) $$a'_{13} = -\varrho.$$

5. Die Gleichungen der Hauptachse. Die Gleichungen (13) lauten ausführlich:

(15) $$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + \varrho\alpha_1 = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + \varrho\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Da nun für die Determinante A infolge von (1) die Gleichungen gelten (I Anm. 1, II, (6)):

(16) $$a_{11}A_{13} + a_{21}A_{23} = 0, \quad a_{12}A_{13} + a_{22}A_{23} = 0, \quad a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} = A,$$

so folgt durch Multiplikation der Gleichungen (15) mit A_{13} und A_{23} und Addition:

$$A + \varrho(\alpha_1 A_{13} + \beta_1 A_{23}) = 0$$

oder, da nach (8): $\alpha_1 A_{13} + \beta_1 A_{23} = \tau(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = \tau$ ist:

$$A + \varrho\tau = 0$$

oder:

(17) $$\varrho = -\frac{A}{\tau} = -\frac{A}{\sqrt{-AA'_{33}}} = \frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'_{33}}.$$

Die Produkte $\varrho\alpha_1$ und $\varrho\beta_1$ werden nach (8) und (17):

(18) $$\varrho\alpha_1 = -\frac{AA_{13}}{\tau^2} = \frac{A_{13}}{A'_{33}}, \quad \varrho\beta_1 = \frac{A_{23}}{A'_{33}}.$$

Setzt man diese Werte in (15) ein, so ergibt sich mit Unterdrückung des Index 0, daß der Scheitelpunkt den Gleichungen:

(19) $$\begin{cases} X_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} + \dfrac{A_{13}}{A'_{33}} = 0, \\ X_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} + \dfrac{A_{23}}{A'_{33}} = 0 \end{cases}$$

genügen muß. Diese stellen aber, da nach (16) und (3) identisch:

$$A_{13}X_1 + A_{23}X_2 = 0$$

und A_{13}, A_{23} nicht beide verschwinden, beide *dieselbe* Gerade dar. Diese ist endlich und bestimmt, da nach (3) a_{11}, a_{12}, a_{22} nicht sämtlich verschwinden (§ 23, (26)), und hat die Richtung (7) (I § 17, (5)).

Wir nennen *diese in der Hauptachsenrichtung* $\mathfrak{x}$ *durch den Scheitelpunkt gehende Gerade die Hauptachse der Kurve.*

Jede der beiden Gleichungen (19) stellt die Hauptachse dar.

6. Lineare Gleichungen für den Scheitelpunkt. Da die Hauptachse durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Kurve geht, ist der Scheitelpunkt ihr anderer Schnittpunkt mit der Kurve. Dementsprechend wird die Gleichung (11) infolge von (13) linear:

$$g^0 = g_1{}^0 x_0 + g_2{}^0 y_0 + g_3{}^0 = -\varrho(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0) + g_3{}^0 = 0,$$

wo die Werte (18) einzusetzen sind.

Der Scheitelpunkt ist daher aus den drei linearen Gleichungen zu bestimmen:

$$(20)\quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} + \dfrac{A_{13}}{A'_{33}} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} + \dfrac{A_{23}}{A'_{33}} = 0, \\ \left(a_{31} - \dfrac{A_{13}}{A'_{33}}\right)x_0 + \left(a_{32} - \dfrac{A_{23}}{A'_{33}}\right)y_0 + a_{33} = 0, \end{cases}$$

von denen die beiden ersten nur für eine zählen.

Nach (7) ist: $-a_{12}A_{13} = a_{22}A_{23}$ und $-a_{21}A_{23} = a_{11}A_{13}$ und daher:

$$(21)\quad a_{11}A_{23} - a_{12}A_{13} = A'_{33}A_{23}, \quad -a_{21}A_{23} + a_{22}A_{13} = A'_{33}A_{13}.$$

Daher sind die Determinanten der Koeffizienten von x_0, y_0 in der ersten und dritten bzw. zweiten und dritten Gleichung (20):

$$(22)\quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} - \dfrac{A_{13}}{A'_{33}} & a_{32} - \dfrac{A_{23}}{A'_{33}} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \frac{1}{A'_{33}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix} = -2A_{23}, \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} - \dfrac{A_{13}}{A'_{33}} & a_{32} - \dfrac{A_{23}}{A'_{33}} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \frac{1}{A'_{33}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ A_{13} & A_{23} \end{vmatrix} = -2A_{13}. \end{aligned}$$

Da sie nach (3) nicht beide 0 sind, folgt, daß *die Gleichungen* (20) *stets einen einzigen endlichen Scheitelpunkt bestimmen.*

7. Die Koordinaten des Scheitelpunktes. Um die Gleichungen (20) gleichmäßig aufzulösen, betrachten wir sie als drei Gleichungen, die in den vier Größen x_0, y_0, 1, $\frac{1}{A'_{33}}$ linear und homogen sind. Dann folgt (I Anm. 2, III, (14)) aus ihnen:

$$(23)\quad x_0 : y_0 : 1 : \frac{1}{A'_{33}} = X : -Y : S : -R,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(24)\quad X = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & A_{13} \\ a_{22} & a_{23} & A_{23} \\ a_{32} - \frac{A_{23}}{A'_{33}} & a_{33} & 0 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & A_{13} \\ a_{21} & a_{23} & A_{23} \\ a_{31} - \frac{A_{13}}{A'_{33}} & a_{33} & 0 \end{vmatrix},$$

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_{13} \\ a_{21} & a_{22} & A_{23} \\ a_{31} - \frac{A_{13}}{A'_{33}} & a_{32} - \frac{A_{23}}{A'_{33}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_{13} \\ a_{21} & a_{22} & A_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{A'_{33}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A_{13} \\ a_{21} & a_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

oder mit Benutzung von (21):

$$(25)\quad S = (A_{13}^2 + A_{23}^2) + \frac{A'_{33}A_{13}^2 + A'_{33}A_{23}^2}{A'_{33}} = 2(A_{13}^2 + A_{23}^2) = -2AA'_{33}.$$

Endlich ist R die Unterdeterminante aus den drei letzten Kolonnen der Koeffizienten in (20).

Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind daher[94]*):*

$$(26)\quad x_0 = -\frac{X}{2AA'_{33}}, \quad y_0 = \frac{Y}{2AA'_{33}},$$

wo X und Y die Bedeutung (24) *haben* (vgl. (3)).

8. Die Hauptachsen-Scheitelgleichung. Die Gleichung (2) wird nun nach (5), (10), (11), (14), (17):

$$(27)\quad g(x, y) = A'_{33}\eta^2 - 2\frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'_{33}}\xi = 0.$$

Unter den Voraussetzungen (1), (3) *erhält die Gleichung* § 24, (1) *in bezug auf ein neues System $\Omega\xi\eta$, dessen Anfangspunkt Ω der Scheitel* (26) *der Kurve ist und dessen Achsen die Hauptachsenrichtungen haben, die Form* (27).

Die Pfeilspitze der Hauptachse ξ ist dabei durch die Formeln (8) bestimmt. Die Quadratwurzel aus $-AA'_{33}$ ist nach (3) reell, ihr Vorzeichen ist dasselbe wie in (8). Die Kurve ist eine Parabel, die nach der Richtung (8) hin offen ist (§ 2, 6).

9. Kurven mit unendlich ferner Mittelpunktsachse. Im Falle (4) kommt die Gleichung der Kurve auf:

$$(28)\quad g(x, y) = 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$
$$f(x, y, t) = (2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}t)t = 0$$

zurück, wo nach § 23, (28):

$$(29)\quad a_{13}^2 + a_{23}^2 = -A' \neq 0.$$

Die Kurve besteht aus einer endlichen und der unendlich fernen Geraden.

Wählt man die erstere als ξ-Achse des übrigens beliebigen Systems $\Omega\xi\eta$, setzt man also (I § 14, (16)):

$$(30) \qquad \eta = \frac{a_{13}x + a_{23}y + \frac{1}{2}a_{33}}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2}},$$

so geht die Gleichung der Kurve über in:

$$(31) \qquad g(x, y) = 2\sqrt{-A'}\cdot\eta = 0.$$

§ 26. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

1. Kanonische Gleichungen. Das *Gesamtergebnis* der vorstehenden Entwicklungen ist dies, daß die auf ein *rechtwinkliges Koordinatensystem* Oxy bezogene Gleichung der Kurve zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Systems $\Omega\xi\eta$ auf eine *kanonische Form* gebracht werden kann. Indem nämlich einerseits die neuen *Achsen* ξ, η die stets (eindeutig oder mehrdeutig) vorhandenen *Hauptachsenrichtungen* erhalten, verschwindet jedesmal das Produkt $\xi\eta$ aus der Gleichung der Kurve, bisweilen auch noch eins der Quadrate ξ^2, η^2 oder beide; indem anderseits der neue *Anfangspunkt* Ω in einen (endlichen) *Mittelpunkt* oder, falls solcher fehlt, in einen *Scheitelpunkt* verlegt wird, verschwinden die beiden linearen Glieder oder eines von ihnen mit dem konstanten Glied.

Nach ihrem *eigenen Range* (§ 18, **1**) und dem *Range des Schnittpunktepaares mit der unendlich fernen Geraden* (§ 21, **14**) *gehört jede Kurve* (1) *in ein Feld der folgenden Tabelle*, und hat dann die dort angegebene *kanonische Gleichungsform* (§ 24, (24)—(26); § 25, (27); (31)):

(2)	I. $A \neq 0$ Eigentl. Kegelschn.	II. $A = 0$, $A' \neq 0$ Getrennt. Linienp.	III. $A = 0$, $A' = 0$ Doppell.
1. $A_{33} \neq 0$. Getrennt. Punktep.	$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0$	$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 = 0$	*
2. $A_{33} = 0$, $A'_{33} \neq 0$ Doppelpunkt.	$\lambda_2\eta^2 - 2\frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'_{33}}\xi = 0$	$\lambda_2\eta^2 + \frac{A'}{A'_{33}} = 0$	$\lambda_2\eta^2 = 0$
3. $A_{33} = 0$, $A'_{33} = 0$ Unbestimmt.	**	$2\sqrt{-A'}\cdot\eta\tau = 0$	$\tau^2 = 0$

In den frei bleibenden Feldern * und ** widersprechen sich nach § 19, (8) und § 23, (26) die Bedingungen der Kolonnen und der Zeilen.

Die weitere Unterscheidung beruht auf den *Vorzeichen* der Koeffizienten.

2. Die Arten der eigentlichen Kurven. Die Gleichung:

(3) $$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0, \quad A \neq 0, \quad A_{33} \neq 0$$

nimmt mit

(4) $$\alpha = \frac{A}{A_{33}\lambda_1}, \quad \beta = \frac{A}{A_{33}\lambda_2}$$

die Form an:

(5) $$\frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + 1 = 0.$$

Dabei ist nach § 21, (24):

(6) $$\alpha + \beta = \frac{A}{A_{33}} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{AA'_{33}}{A_{33}^2}, \qquad \alpha\beta = \frac{A^2}{A_{33}^2 \lambda_1 \lambda_2} = \frac{A^2}{A_{33}^2 A_{33}}.$$

Für die Vorzeichen von α, β folgt hieraus:

(7) $$\begin{cases} \text{wenn } A_{33} > 0,\ AA'_{33} > 0 : + + \\ \quad \text{„} \quad A_{33} > 0,\ AA'_{33} < 0 : - - \\ \quad \text{„} \quad A_{33} < 0 \qquad\qquad\quad : - + \end{cases}$$

Die Bedingungen zweiter Zeile (7) sind aber ersetzbar durch die Bedingungen:

(8) $$A_{33} > 0; \quad AA'_{33} \text{ und } A_{33} \text{ nicht beide } > 0.$$

Denn diese lassen nur die Möglichkeiten $AA'_{33} < 0$ oder $AA'_{33} = 0$ zu, von denen die letztere nach § 23, (25) mit $A \neq 0$ und $A_{33} > 0$ nicht verträglich ist.

Bezeichnet man daher in den drei Fällen (7) die Koeffizienten α, β mit α^2, β^2; $-\alpha^2$, $-\beta^2$; $-\alpha^2$, β^2, so erhält man die Tabelle:

(9)

		$A \neq 0$	
		$AA'_{33} > 0$, $A_{33} > 0$	AA'_{33}, A_{33} nicht beide > 0
$A_{33} \neq 0$	$A_{33} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$
	$A_{33} < 0$		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$

In dem freien Felde widersprechen sich Zeilen- und Kolonnenbedingungen.

Da nun nach § 25, (3) für die Kurve § 25, (27), nämlich:

(10) $$\lambda_2 \eta^2 - 2\frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'_{33}} \xi = 0, \quad \frac{\sqrt{-AA'_{33}}}{A'^2_{33}} = p \text{ oder } = \beta^2,$$

stets $A A'_{33} < 0$, so reiht sich die Kurve an die zweite Kolonne der Tabelle (9) an:

(11)

$A_{33} = 0,\ A'_{33} \neq 0$		$\eta^2 - 2p\xi = 0$

3. Die Arten der Linienpaare. Das Linienpaar:

(12) $$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$$

ist nach § 21, (24) *imaginär* oder *reell*, je nachdem:

(13) $$A_{33} > 0 \quad \text{oder} \quad A_{33} < 0.$$

Da für $A = 0$, $A_{33} \neq 0$ nach § 19, (6) stets $A_{33} A' > 0$, so könnte man für (13) auch sagen:

(14) $$A' > 0 \quad \text{oder} \quad A' < 0.$$

Wir fassen die Bedingungen (13) in die Tabelle:

(15)

		$A = 0,\ A' \neq 0$	
		$A_{33} > 0$	$A_{33} < 0$
$A_{33} \neq 0$	$A_{33} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$	
	$A_{33} < 0$		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$

Das Parallellinienpaar:

(16) $$\eta^2 + \frac{A'}{A'^2_{33}} = 0$$

ist den Bedingungen (14) entsprechend imaginär oder reell. Für das Paar:

(17) $$2\sqrt{-A'} \cdot \eta = 0$$

ist nach § 23, (28) $A' < 0$. Man erhält daher die Tabelle:

(18)

	$A' > 0$	$A' < 0$
$A_{33} = 0,\ A'_{33} \neq 0$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$
$A_{33} = 0,\ A'_{33} = 0$		$\eta = 0$

4. Arten der Kurven zweiter Ordnung. Durch Einreihung der Tabellen (9), (11), (15) und (18) in die Haupttabelle (2) ergibt sich (§ 21, (38)):

Die auf ein rechtwinkliges System Oxy bezogene Gleichung (1) *stellt unter den folgenden Bedingungen die folgende Art von Kurven zweiter Ordnung dar* (vgl. § 7, (28)) [95]):

(19)

		$A \neq 0$: Eigentliche Kegelschnitte		$A = 0,\ A' \neq 0$: Linienpaare		$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$:
		$A_{33} > 0,\ A A'_{33} > 0$: I. Imag. Kegelschn.	$A_{33},\ A A'_{33}$ nicht beide > 0: II. Reelle Kegelschn.	$A_{33}(A') > 0$ III. Imag. Linp.	$A_{33}(A') < 0$ IV. Reelle Linp.	V. Doppellinien.
$A_{33} \neq 0$: Eigentl. Punktepaar.	$A_{33} > 0$: 1. Imag. Pp.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Ellipse	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ Imag. Linienp.		
	$A_{33} < 0$: 2. Reell. Pp.		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Hyperbel		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ Reell. Linienp.	
$A_{33} = 0,\ A'_{33} \neq 0$: 3. Doppelpunkt.			$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 2\xi = 0$ Parabel	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ Im. Parallellinienp.	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ Reell. Parallellp.	$\eta^2 = 0$ Endl. Doppell.
$A_{33} = 0,\ A'_{33} = 0$: 4. Unbestimmt.					$\eta \cdot (\tau) = 0$ Endl. + u. f. Linie	$(\tau^2) = 0$ Un. f. Doppell.

Hier ist A die *Determinante* § 9, (15) *der Kurve* (1) und bedeuten A_{kl} deren *Unterdeterminanten* § 9, (16). Ferner ist:

(20) $$A' = A_{11} + A_{22} + A_{33}, \qquad A'_{33} = a_{11} + a_{22}.$$

In der Überschrift der III. und IV. Kolonne soll in $A_{33}(A') \gtrless 0$ nur A_{33} gelten, solange $A_{33} \neq 0$ (1. und 2. Zeile (19)), dagegen A' eintreten, wenn $A_{33} = 0$ (3. und 4. Zeile). Zwar könnte nach (13) und (14) auch überall A' gelten, aber wir ziehen mit Rücksicht auf die in (21) und (22) zu erwähnenden Eigenschaften die Teilung in A_{33} und A' vor.

5. Invarianten und Bedingungen der Art im schiefwinkligen System. *Die Bedingungen des Ranges:* $A \neq 0$; $A = 0$, $A' \neq 0$; $A = 0$, $A' = 0$ in der obersten Zeile der Tabelle (19), die auch in der Form § 19, (27) geschrieben werden können, *sind*, wie dort bemerkt, *in jedem recht- und schiefwinkligen System dieselben.*

Die übrigen in der Tabelle (19) vorkommenden Ausdrücke:

(21) $$A, \quad A_{33}, \quad A'_{33} = a_{11} + a_{22}, \quad (A' = A_{11} + A_{22}),$$

der letzte jedoch nur unter der Voraussetzung $A = 0$, $A_{33} = 0$ (oder nach § 23, (5); (22′) $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$, $A_{33} = 0$), sind nach § 22, (16); (22) *sämtlich Invarianten der Kurve* (1) *im rechtwinkligen System.*

Bezieht sich die Gleichung (1) auf ein *schiefwinkliges* System Oxy vom Achsenwinkel ω, so sind sie nach § 22, (16); (22) durch die *gleichwertigen* und *im schiefwinkligen System invarianten* Ausdrücke:

(22) $$\frac{A}{\sin^2\omega}, \quad \frac{A_{33}}{\sin^2\omega}, \quad \frac{a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}, \quad \left(\frac{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}\right)$$

zu ersetzen.

6. Unterarten der Kurve zweiter Ordnung. Nach § 21, (39) *geht die Kurve* (1) bei rechtwinkligem System Oxy *durch die imaginären Kreispunkte*, ist ein *Kreis* im allgemeinen Sinne § 12, (23), wenn:

(23) $$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

Damit wird:

(24) $$A_{33} = a_{11}^2, \quad A'_{33} = 2a_{11}, \quad A = a_{11}(a_{11}a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2).$$

Die Kurve (1) ist dann ein *imaginärer* oder *reeller Kreis* oder ein *Kreisstrahlenpaar* (in (19) Zeile 1 mit $\alpha^2 = \beta^2$), je nachdem (vgl. § 12, (22)):

(25) $$a_{11}a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2 > 0, < 0 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

oder sie enthält die *unendlich ferne Gerade ganz* (in (19) Zeile 4), wenn in (23) $a_{11} = a_{22} = 0$ (vgl. § 12, (24)).

Nach § 21, (40) geht die Kurve (1) *durch zwei zu den Kreispunkten harmonische Punkte* der unendlich fernen Geraden, wenn:

$$(26) \qquad A'_{33} = 0 \quad (A_{33} = -a_{11}^2 - a_{12}^2 < 0).$$

Sie ist dann eine *gleichseitige Hyperbel* oder ein *rechtwinkliges Linienpaar* (in (19) Zeile 2 mit $\alpha^2 = \beta^2$), je nachdem $A \neq 0$ oder $A = 0$.

Bei *schiefwinkligem* System Oxy gehen die Bedingungen (23) nach § 22, (41) über in:

$$(27) \qquad a_{11} \cos \omega = a_{22} \cos \omega = a_{12}$$

und die Bedingung (26) nach § 22, (15) in:

$$(28) \qquad a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \omega = 0.$$

II. Kapitel.

Die Arten der Kurven zweiter Klasse.

§ 27. Einteilung der Kurven zweiter Klasse nach dem Mittelpunkt.

1. Einteilung nach dem Rang. Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy bezogen, sei die Gleichung der *Kurve zweiter Klasse:*

$$(1) \quad F(u, v, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}us + 2b_{23}vs + b_{33}s^2 = 0.$$

Die Determinante der Kurve ist:

$$(2) \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

und zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(3) \quad \begin{cases} B' = B_{11} + B_{22} + B_{33}, \\ B'' = b_{11} + b_{22} + b_{33}, \end{cases} \qquad \begin{cases} B_0 = B_{11} + B_{22}, \\ B'_{33} = b_{11} + b_{22}. \end{cases}$$

Nach der Anzahl der Doppelgeraden (Doppeltangenten) zerfallen die Kurven (1) *nach* § 19, 9 *in folgende Gruppen:*

$$(4) \quad \begin{cases} \text{I. } B \neq 0\text{: Eigentliche Kurve zweiter Klasse;} \\ \text{II. } B = 0,\ B' \neq 0\ (B = 0,\ B_{kl} \neq 0!)\text{: Punktepaare;} \\ \text{III. } B = 0,\ B' = 0,\ B'' \neq 0\ (B_{kl} = 0!,\ b_{kl} \neq 0!)\text{: Doppelpunkte.} \end{cases}$$

2. Einteilung in bezug auf die unendlich ferne Gerade. Die unendlich ferne Gerade $u = 0$, $v = 0$, $s = 1$ genügt der Gleichung (1) immer dann und nur dann, wenn $b_{33} = 0$. Sie genügt ferner den drei Bedingungen der Doppeltangente § 16, (16) immer dann und nur dann, wenn $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{33} = 0$.

In bezug auf die unendlich ferne Gerade g_∞ zerfallen die Kurven (1) *in die drei Gruppen:*

$$(5)\quad \begin{cases} 1.\ b_{33} \neq 0:\ g_\infty \text{ ist keine Tangente der Kurve;} \\ 2.\ b_{33} = 0,\ b_{13},\ b_{23} \text{ nicht beide } 0:\ g_\infty \text{ ist einfache Tangente;} \\ 3.\ b_{33} = 0,\ b_{13} = 0,\ b_{23} = 0:\ g_\infty \text{ ist Doppeltangente.} \end{cases}$$

Für $b_{33} = 0$ ist $B_{11} = -b_{23}^2$, $B_{22} = -b_{31}^2$, also nach (3):

$$(6)\qquad B_0 = -(b_{13}^2 + b_{23}^2).$$

Daher sind die Bedingungen (5) auch ersetzbar durch:

$$(7)\qquad 1.\ b_{33} \neq 0;\quad 2.\ b_{33} = 0,\ B_0 \neq 0;\quad 3.\ b_{33} = 0,\ B_0 = 0.$$

3. Der Mittelpunkt der Kurve zweiter Klasse. Transformiert man die Gleichung (1) auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem $O'x'y'$, so werden nach § 15, (19); (16) die in u', v' linearen Glieder immer dann und nur dann fehlen, wenn:

$$(8)\qquad \begin{cases} b_{13}' = F_3(\alpha_1, \beta_1, x_0') = b_{13}\alpha_1 + b_{23}\beta_1 + b_{33}x_0' = 0, \\ b_{23}' = F_3(\alpha_2, \beta_2, y_0') = b_{13}\alpha_2 + b_{23}\beta_2 + b_{33}y_0' = 0 \end{cases}$$

oder mit Benutzung von § 15, (12); (16):

$$(9)\qquad \begin{cases} b_{33}(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0) = b_{13}\alpha_1 + b_{23}\beta_1, \\ b_{33}(\alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0) = b_{13}\alpha_2 + b_{23}\beta_2. \end{cases}$$

Hieraus folgt aber durch Multiplikation mit α_1, α_2 oder β_1, β_2 und Addition:

$$(10)\qquad b_{33}x_0 = b_{13},\quad b_{33}y_0 = b_{23},$$

woraus auch umgekehrt wieder die Gleichungen (9) oder (8) hervorgehen.

Die auf das neue System $O'x'y'$ transformierte Gleichung (1) *erhält, unabhängig von der Richtung der Achsen x', y', immer dann und nur dann die Form:*

$$(11)\qquad F(u, v, s) = b_{11}'u'^2 + 2b_{12}'u'v' + b_{22}'v'^2 + b_{33}'s'^2 = 0,$$

wenn der Anfangspunkt $O' = x_0, y_0$ den Bedingungen (10) *genügt.*

Er ist dann nach § 17, (8) der *Pol der unendlich fernen Geraden*, der *Mittelpunkt der Kurve.*

4. Einteilung nach dem Mittelpunkt. Ist nun $b_{33} \neq 0$, so gibt es nach (10) *einen bestimmten endlichen Mittelpunkt:*

$$(12)\qquad x_0 = \frac{b_{13}}{b_{33}},\quad y_0 = \frac{b_{23}}{b_{33}}.$$

Die Kurve (1) ist eine *Mittelpunktskurve* und die Gleichung (11) ihre *Mittelpunktsgleichung.* Die unendlich ferne Gerade ist, da sie nicht mit ihrem Pol vereinigt liegt, keine Tangente.

Ist $b_{33} = 0$, aber b_{13} und b_{23} nicht beide 0, so gibt es nach (12) *einen unendlich fernen Mittelpunkt.* Die unendlich ferne Gerade liegt mit ihrem Pol vereinigt und ist Tangente wie in (5).

Ist endlich $b_{33} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$, so ist nach (10) der Mittelpunkt *unbestimmt,* die unendlich ferne Gerade Doppellinie und nach (8) stets auch $b'_{13} = 0$, $b'_{23} = 0$, sowie (§ 15, (20)) $b'_{33} = b_{33} = 0$. Die Kurve hat in jedem Koordinatensystem eine Gleichung von der Form:

(13) $$F(u, v, s) = b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 = 0.$$

Sie ist *ein in der unendlich fernen Geraden liegendes Punktepaar* (§ 21, (43)).

In den Fällen (5) 1., 2. und 3. hat daher die Kurve einen bestimmten endlichen, einen bestimmten unendlich fernen oder einen unbestimmten Mittelpunkt.

5. Einteilung nach Rang und Mittelpunkt. Hiernach zerfallen die Kurven zweiter Klasse nach ihrem Range einerseits und nach ihrem Mittelpunkt oder ihrer Beziehung zur unendlich fernen Geraden andererseits in folgende Gruppen[96]):

(14)

		$B \neq 0$: Eigentl. Kurven 2. Kl.	$B = 0$, $B' \neq 0$: Punktepaare	$B = 0$, $B' = 0$: Doppelpunkte
$b_{33} \neq 0$	best. endl. Mittelp. / g_∞ keine Tang.	I, 1	II, 1	III, 1
$b_{33} = 0$, $B_0 \neq 0$	best. ∞ f. Mittelp. / g_∞ einf. Tang.	I, 2	II, 2	0
$b_{33} = 0$, $B_0 = 0$	unbest. Mittelp. / g_∞ Doppeltang.	0	II, 3	III, 3

Der Fall I, 3 ist unmöglich, da mit $b_{33} = 0$, $B_0 = 0$ oder $b_{33} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$ stets $B = 0$; der Fall III, 2 ist unmöglich, da mit allen $B_{kl} = 0$ nach (3) stets $B_0 = 0$.

§ 28. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten der Mittelpunktskurven.

1. Die Hauptachsen der Mittelpunktskurven. Hat die Kurve zweiter Klasse § 27, (1) einen bestimmten Mittelpunkt x_0, y_0 in § 27, (12), so hat ihre Gleichung in jedem von diesem ausgehenden Koor-

dinatensystem $O'x'y'$ die Form § 27, (11). Die neuen Koeffizienten sind dann nach § 15, (18); (16) infolge der Bedingungen § 27, (8):

$$(1)\qquad \begin{cases} b'_{11} = F_1(\alpha_1\beta_1 x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1\beta_1 x_0')\beta_1, \\ b'_{22} = F_1(\alpha_2\beta_2 y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2\beta_2 y_0')\beta_2. \end{cases}$$

$$(2)\quad b'_{12} = F_1(\alpha_1\beta_1 x_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_1\beta_1 x_0')\beta_2 = F_1(\alpha_2\beta_2 y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2\beta_2 y_0')\beta_1.$$

Wir nennen die vom Mittelpunkt O' ausgehenden Achsen x', y' die *Hauptachsen* der Kurve, wenn:

$$(3)\qquad b'_{12} = 0.$$

Die Koeffizienten b'_{11}, b'_{22} heißen alsdann *Hauptachsenkoeffizienten.*

Es handelt sich nunmehr um die Bestimmung der sechs Unbekannten b'_{11}, b'_{22}; α_1, β_1; α_2, β_2 aus den drei Gleichungen (1) und (3) und den drei Gleichungen:

$$(4)\quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \qquad (5)\quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0,$$

aus denen außerdem die drei Gleichungen:

$$(6)\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1, \qquad (7)\quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0$$

folgen. Wir fügen dazu unter Bezugnahme auf § 27, (8) noch zwei weitere Unbekannte x_0', y_0' mit zwei weiteren Gleichungen:

$$(8)\qquad F_3(\alpha_1\beta_1 x_0') = 0, \qquad F_3(\alpha_2\beta_2 y_0') = 0,$$

so daß wir *acht Unbekannte* mit *acht Gleichungen* haben.

2. Notwendige Bedingungen. Entnimmt man aus (1) und (2) die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} F_1(\alpha_1\beta_1 x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1\beta_1 x_0')\beta_1 = b'_{11}, \\ F_1(\alpha_1\beta_1 x_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_1\beta_1 x_0')\beta_2 = 0, \end{cases}$$

multipliziert mit α_1, α_2 oder β_1, β_2 und addiert mit Hinblick auf (6) und (7), so folgt:

$$(10)\qquad F_1(\alpha_1\beta_1 x_0') = b'_{11}\alpha_1, \qquad F_2(\alpha_1\beta_1 x_0') = b'_{11}\beta_1.$$

Man hat daher für die zweimal vier Unbekannten b'_{11}, α_1, β_1, x_0' *und* b'_{22}, α_2, β_2, y_0' *die Gleichungen:*

$$(11)\quad \begin{cases} F_1(\alpha_1\beta_1 x_0') = b'_{11}\alpha_1, \\ F_2(\alpha_1\beta_1 x_0') = b'_{11}\beta_1, \\ F_3(\alpha_1\beta_1 x_0') = 0, \\ \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1. \end{cases} \qquad (11')\quad \begin{cases} F_1(\alpha_2\beta_2 y_0') = b'_{22}\alpha_2, \\ F_2(\alpha_2\beta_2 y_0') = b'_{22}\beta_2, \\ F_3(\alpha_2\beta_2 y_0') = 0, \\ \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1. \end{cases}$$

3. Hinreichende Bedingungen. Umgekehrt folgt aus den beiden ersten Gleichungen (11) durch Multiplikation mit α_1, β_1 und Addition mit Rücksicht auf die vierte wieder die erste (1) und ebenso aus (11′) die zweite (1). Multipliziert man ferner die beiden ersten Glei-

chungen (11) mit α_2, β_2 und (11') mit α_1, β_1 und addiert, so ergibt sich mit Rücksicht auf (2):

$$(12) \qquad b'_{12} = b'_{11}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2), \qquad b'_{12} = b'_{22}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2).$$

Hieraus folgt unter der Voraussetzung $b'_{11} \neq b'_{22}$, daß:

$$(13) \qquad b'_{12} = 0$$

und:

$$(14) \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$$

Ist dagegen $b'_{11} = b'_{22}$, so folgt aus (12) erst unter Hinzunahme der Gleichung (14) wieder (13).

Die acht Gleichungen (11) *und* (11') *sind an sich hinreichende Bedingungen für die beiden Gruppen der Unbekannten* b'_{11}, α_1, β_1, x_0' *und* b'_{22}, α_2, β_2, y_0', *falls* $b'_{11} \neq b'_{22}$, *dagegen erst unter Hinzufügung von* (5) *falls* $b'_{11} = b'_{22}$.

4. Die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten. Die Gleichungen (11) lauten ausführlich geschrieben:

$$(15) \qquad \begin{cases} (b_{11} - b'_{11})\alpha_1 + b_{12}\beta_1 + b_{13}x_0' = 0, \\ b_{21}\alpha_1 + (b_{22} - b'_{11})\beta_1 + b_{23}x_0' = 0, \\ b_{31}\alpha_1 + b_{32}\beta_1 \qquad + b_{33}x_0' = 0, \\ \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1 \end{cases}$$

und entsprechend die Gleichungen (11'). Damit folgt, wie in § 21, 8:

Jeder der beiden Hauptachsenkoeffizienten b'_{11}, b'_{22} *muß der in* μ *quadratischen Gleichung genügen:*

$$(16) \qquad E(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \mu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

der quadratischen Gleichung des Hauptachsenproblems der Kurve zweiter Klasse.

5. Andere Form der quadratischen Gleichung. Die Elimination von α_1, β_1, x_0', die von (15) zu (16) führt, kann noch auf andere Weise ausgeführt werden. Eliminiert man nämlich mit Rücksicht auf die Voraussetzung:

$$(17) \qquad b_{33} \neq 0$$

x_0' aus der ersten und dritten Gleichung (15), so ergibt sich:

$$(18) \qquad \{(b_{11} - b'_{11})b_{33} - b_{13}^2\}\alpha_1 + \{b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32}\}\beta_1 = 0$$

oder mit Hinzufügung der entsprechenden Gleichung:

$$(19)\qquad \begin{aligned} (B_{22}-b_{33}b_{11}')\alpha_1 - B_{12}\beta_1 &= 0,\\ -B_{21}\alpha_1 + (B_{11}-b_{33}b_{11}')\beta_1 &= 0,\\ \alpha_1^2+\beta_1^2 &= 1. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus der Gleichung (18) und der dritten Gleichung (15) unter der Voraussetzung (17) auch wieder die erste Gleichung (15). Die Gleichungen (15) sind daher ersetzbar durch die Gleichungen (19), wenn man zu diesen noch die vorletzte Gleichung (15) hinzubehält.

Die Bestimmung der sechs Unbekannten b_{11}', α_1, β_1 *und* b_{22}', α_2, β_2 *kann daher auch mittels der Gleichungen* (19) *und der drei entsprechenden mit* b_{22}', α_2, β_2 *geschehen.*

Die quadratische Gleichung für b_{11}', b_{22}' ergibt sich aber dann in der Form:

$$(20)\qquad b_{33}E(\mu) = \begin{vmatrix} B_{22}-b_{33}\mu & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11}-b_{33}\mu \end{vmatrix} = 0.$$

Sie unterscheidet sich nur um den Faktor b_{33} von der Gleichung (16).

Die Gleichungen (19) und (20) haben aber dieselbe Form wie die Gleichungen § 21, (16); (17), nur daß B_{22}, $-B_{12}$, B_{11}, $b_{33}\mu$ an Stelle von a_{11}, a_{12}, a_{22}, λ getreten sind.

Die quadratische Gleichung $E(\mu)=0$ *in* (16) *oder* (20) *hat daher stets zwei reelle Wurzeln* μ_1 *und* μ_2; und weiter wie in § 21, **12**:

Die Kurve zweiter Klasse $b_{33}\neq 0$ *hat stets zwei vom Mittelpunkt ausgehende Hauptachsen, in bezug auf welche die Gleichung der Kurve die Form erhält:*

$$(21)\qquad F(u, v, s) = \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + b_{33} s'^2.$$

Die Hauptachsen sind eindeutig bestimmt, wenn die Wurzeln μ_1, μ_2 *beide verschieden, dagegen einfach unbestimmt, wenn die Wurzeln gleich sind.*

6. Entwicklung der quadratischen Gleichung. Die Differentialquotienten der Determinante (16) sind:

$$E'(\mu) = -\begin{vmatrix} b_{22}-\mu & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix};\quad \tfrac{1}{2}E''(\mu) = b_{33}.$$

Daher ist:

$$(22)\qquad E(\mu) = E(0) + E'(0)\cdot\mu + \frac{1}{2}E''(0)\cdot\mu^2 = B - (B_{11}+B_{22})\mu + b_{33}\mu^2$$

oder mit der Abkürzung § 27, (3):

$$(23)\qquad E(\mu) = b_{33}\mu^2 - B_0\mu + B.$$

Dasselbe folgt aus (20), da (I Anm. 1, II, (5)):

$$\begin{vmatrix} B_{22} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{vmatrix} = Bb_{33}.$$

7. Die Hauptachsengleichungen. Da für die Wurzeln μ_1, μ_2 nach (23):

(24) $$\mu_1 + \mu_2 = \frac{B_0}{b_{33}}, \quad \mu_1 \mu_2 = \frac{B}{b_{33}},$$

so ergibt sich:

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse mit einem Mittelpunkt ($b_{33} \neq 0$) *kann stets auf eine der folgenden Formen gebracht werden:*

(25) $$\begin{cases} B \neq 0: & \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + b_{33} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B_0 \neq 0: & \mu_2 v'^2 + b_{33} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B_0 = 0: & b_{33} s'^2 = 0. \end{cases}$$

Sie ist daher entsprechend eine *Ellipse oder Hyperbel* (§ 20, (1')); oder ein *endliches Punktepaar* (auf der y'-Achse, § 13, (59')) oder ein *endlicher Doppelpunkt* (I § 22, (9)).

8. Andere Form der Bedingungen. Wenn $B = 0$ und $B' = 0$, so verschwinden (§ 27, (4)) alle Unterdeterminanten B_{kl} und damit auch B_0 in (23).

Ist umgekehrt $B = 0$ und $B_0 = 0$, so ist zunächst nach § 27, (3):

$$B' = B_{33}.$$

Nach § 19, (5) ist aber für $B = 0$:

$$B_0 B_{33} = B_{13}^2 + B_{23}^2$$

und daher für $B_0 = 0$ auch $B_{13} = 0$, $B_{23} = 0$ und damit infolge der für $B = 0$ gültigen Gleichungen ($k = 1, 2, 3$):

$$b_{1k} B_{13} + b_{2k} B_{23} + b_{3k} B_{33} = 0$$

auch $b_{3k} B_{33} = 0$, also, wenn nicht alle b_{3k} verschwinden, $B_{33} = 0$ oder $B' = 0$.

Falls b_{13}, b_{23}, b_{33} *nicht alle verschwinden, sind die Bedingungen:*

(26) $$B = 0, \quad B_0 = 0$$

ersetzbar durch:

(27) $$B = 0, \quad B' = 0.$$

Nach (26), (27) können die Bedingungen der Tafel (25) auch durch folgende ersetzt werden:

(28) $$\begin{cases} B \neq 0: & \mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + b_{33} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' \neq 0: & \mu_2 v'^2 + b_{33} s'^2 = 0; \\ B = 0,\ B' = 0: & b_{33} s'^2 = 0. \end{cases}$$

§ 29. Die Kurven ohne Mittelpunkt.

1. Bestimmung der Hauptachsenrichtungen. Die Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt § 27, (14); (6) sind durch die Voraussetzungen:

$$b_{33} = 0, \quad B_0 = -(b_{13}^2 + b_{23}^2) \neq 0 \tag{1}$$

bezeichnet. Bei der Transformation der Gleichung § 27, (1) auf ein neues System $O'x'y'$ werden die Koeffizienten § 27, (8) nach (1):

$$\begin{cases} b'_{13} = F_3(\alpha_1 \beta_1 x_0') = b_{13}\alpha_1 + b_{23}\beta_1, \\ b'_{23} = F_3(\alpha_2 \beta_2 y_0') = b_{13}\alpha_2 + b_{23}\beta_2. \end{cases} \tag{2}$$

Sie können nach (1) *nicht beide* verschwinden. Soll jedoch *einer* von ihnen verschwinden, etwa:

$$b'_{23} = F_3(\alpha_2 \beta_2 y_0') = b_{13}\alpha_2 + b_{23}\beta_2 = 0, \tag{3}$$

so folgt mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$\varrho\alpha_2 = -b_{23}, \quad \varrho\beta_2 = b_{13}, \tag{4}$$

wo mit willkürlicher Verfügung über die Quadratwurzel sei:

$$\varrho = \sqrt{b_{13}^2 + b_{23}^2} = \sqrt{-B_0}. \tag{5}$$

Infolge von § 28, (5) wird dann:

$$\varrho\alpha_1 = b_{13}, \quad \varrho\beta_1 = b_{23} \tag{6}$$

und damit nach (2):

$$b'_{13} = \frac{b_{13}^2 + b_{23}^2}{\varrho} = \varrho. \tag{7}$$

Der Bedingung (3) *wird durch die Bestimmung* (4), (6) *der Richtung der Achsen x' und y' genügt, worauf der Koeffizient b'_{13} den Wert* (7) *hat.*

Wir nennen die so bestimmten Richtungen (6) und (4) die *Hauptachsenrichtungen der Kurve.*

2. Bestimmung des Anfangspunktes O'. Infolge von (1), (3) und (7) wird nach § 15, (18); (16):

$$\begin{cases} b'_{11} = F_1(\alpha_1, \beta_1, x_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_1, \beta_1, x_0')\beta_1 + \varrho x_0' \\ \quad = H_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_1 + H_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_1 + 2\varrho x_0' = H(\alpha_1, \beta_1) + 2\varrho x_0'; \\ b'_{22} = F_1(\alpha_2, \beta_2, y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2, \beta_2, y_0')\beta_2 = H_1(\alpha_2, \beta_2)\alpha_2 + H_2(\alpha_2, \beta_2)\beta_2; \\ b'_{12} = F_1(\alpha_2, \beta_2, y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2, \beta_2, y_0')\beta_1 \\ \quad = H_1(\alpha_2, \beta_2)\alpha_1 + H_2(\alpha_2, \beta_2)\beta_1 + \varrho y_0' = H_1(\alpha_1, \beta_1)\alpha_2 + H_2(\alpha_1, \beta_1)\beta_2 + \varrho y_0'. \end{cases} \tag{8}$$

Wir bestimmen nunmehr den Punkt $O' = x_0, y_0$, für den nach § 15, (13):

$$\begin{cases} x_0 = -\alpha_1 x_0' - \alpha_2 y_0', \\ y_0 = -\beta_1 x_0' - \beta_2 y_0' \end{cases} \tag{9}$$

ist, aus den beiden Bedingungen:

$$(10) \qquad b'_{11} = 0, \quad b'_{12} = 0,$$

die nach (8) auch geschrieben werden können:

$$- \varrho x_0' = H_1(\alpha_1 \beta_1)\alpha_1 + H_2(\alpha_1 \beta_1)\beta_1 - \tfrac{1}{2} H(\alpha_1 \beta_1),$$
$$- \varrho y_0' = H_1(\alpha_1 \beta_1)\alpha_2 + H_2(\alpha_1 \beta_1)\beta_2.$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit α_1, α_2 oder β_1, β_2 und addiert, so folgt nach (9):

$$(11) \qquad \begin{cases} \varrho x_0 = H_1(\alpha_1 \beta_1) - \tfrac{1}{2} H(\alpha_1 \beta_1)\alpha_1, \\ \varrho y_0 = H_2(\alpha_1 \beta_1) - \tfrac{1}{2} H(\alpha_1 \beta_1)\beta_1, \end{cases}$$

wo ϱ den nicht verschwindenden Wert (5) und α_1, β_1 die Werte (6) haben.

Der hierdurch bestimmte Punkt $O' = x_0, y_0$ soll der *Scheitelpunkt der Kurve* genannt werden.

3. Bestimmung des Koeffizienten b'_{22}. Die zweiten Gleichungen (10) und (8) können auch geschrieben werden:

$$F_1(\alpha_2 \beta_2 y_0')\alpha_1 + F_2(\alpha_2 \beta_2 y_0')\beta_1 = 0;$$
$$F_1(\alpha_2 \beta_2 y_0')\alpha_2 + F_2(\alpha_2 \beta_2 y_0')\beta_2 = b'_{22}.$$

Hieraus folgt aber durch Multiplikation mit α_1, α_2 oder β_1, β_2 und Addition:

$$F_1(\alpha_2 \beta_2 y_0') = b'_{22}\alpha_2,$$
$$F_2(\alpha_2 \beta_2 y_0') = b'_{22}\beta_2$$

wozu nach (3):

$$F_3(\alpha_2 \beta_2 y_0') = 0$$

oder ausführlich:

$$(b_{11} - b'_{22})\alpha_2 + b_{12}\beta_2 + b_{13} y_0' = 0;$$
$$b_{21}\alpha_2 + (b_{22} - b'_{22})\beta_2 + b_{23} y_0' = 0;$$
$$b_{31}\alpha_2 + b_{32}\beta_2 \qquad = 0.$$

Danach genügt b'_{22} der Gleichung:

$$(12) \qquad E(\mu) = \begin{vmatrix} b_{11} - \mu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \mu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

die aus § 28, (16) mit $b_{33} = 0$ entsteht. Daher ist hier nach § 28, (23):

$$(13) \qquad E(\mu) = -B_0 \mu + B.$$

Der Koeffizient b'_{22} hat also den Wert:

$$(14) \qquad b'_{22} = \frac{B}{B_0}.$$

4. Kanonische Gleichungen der Kurven mit unendlich fernem Mittelpunkt. Aus (10), (14), (7), (3) geht nun hervor: *Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse mit unendlich fernem Mittelpunkt* ($b_{33}=0$, $B_0 \neq 0$) *kann stets auf eine der beiden Formen gebracht werden:*

$$(15)\qquad \begin{cases} B \neq 0: & \mu_2 v'^2 + 2\sqrt{-B_0}\cdot u's' = 0, \quad \mu_2 = \frac{B}{B_0}, \\ B = 0: & 2\sqrt{-B_0}\cdot u's' = 0. \end{cases}$$

Sie ist daher (§ 13, (43)) eine *Parabel* oder ein *Punktepaar aus einem endlichen* ($s'=0$) *und einem unendlich fernen* ($u'=0$) *Punkt.*

In den beiden Fällen ist nach § 28, (26), (27) auch bezüglich:

$$(16)\qquad B \neq 0; \quad B = 0, \quad B' \neq 0.$$

Hierbei liegt der Anfangspunkt O' *des Koordinatensystems im Scheitelpunkt* (11) *und sind die Richtungen der Achsen* x' *und* y' *durch* (6), (4) *und* (5) *bestimmt.*

5. Punktepaare in der unendlich fernen Geraden. Der noch übrige Fall § 27, (14) dritte Zeile ist durch die Voraussetzungen:

$$(17)\qquad b_{13}=0, \quad b_{23}=0, \quad b_{33}=0 \quad (b_{33}=0, \quad B_0=0)$$

bezeichnet. Er ist schon in § 21, **16** erledigt. Danach ergibt sich:

Die Kurve zweiter Klasse:

$$(18)\qquad F(u, v, s) = b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + b_{22}v^2 = 0$$

kann bei unveränderlichem Anfangspunkt O des Systems Oxy durch Einführung neuer Achsen x', y' *stets auf eine der beiden Formen gebracht werden:*

$$(19)\qquad \begin{cases} B_{33} \neq 0: & \nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 = 0; \\ B_{33} = 0, \quad B'_{33} \neq 0: & \nu_2 v'^2 = 0. \end{cases}$$

Hier ist:

$$(20)\qquad B'_{33} = b_{11} + b_{22}$$

und sind ν_1, ν_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung[89]):

$$(21)\qquad \begin{vmatrix} b_{11}-\nu & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\nu \end{vmatrix} = \nu^2 - B'_{33}\nu + B_{33} = 0,$$

also:

$$(22)\qquad \nu_1 + \nu_2 = B'_{33}, \quad \nu_1\nu_2 = B_{33}.$$

Mit (17) ist auch $B_{11}=0$, $B_{22}=0$, also:

$$(23)\qquad B' = B_{33},$$

sowie:

$$(24)\qquad B'' = B'_{33}.$$

Daher können die Bedingungen der beiden Zeilen (19) auch in der Form gegeben werden:

(25) $$B' \neq 0; \quad B' = 0, \quad B'' \neq 0.$$

§ 30. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

1. Kanonische Gleichungen. Das Ergebnis der vorstehenden Entwicklungen ist dies, daß die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxy bezogene Gleichung der Kurve zweiter Klasse:

(1) $$F(u, v, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}us + 2b_{23}vs + b_{33}s^2 = 0$$

durch Einführung eines neuen Systems $O'x'y'$ auf eine kanonische Form gebracht werden kann.

Nach ihrem *Range* einerseits und nach ihrer *Beziehung zur unendlich fernen Geraden* g_∞ andererseits gehört jede Kurve (1) wie § 27, (14) in ein (ausgefülltes) Feld der folgenden Tabelle und hat die dort angegebene Gleichungsform. Die Tabelle muß also alle Kurven zweiter Klasse enthalten:

(2)	I. $B \neq 0$ Eigentl. Kurven 2. Kl.	II. $B = 0$, $B' \neq 0$ Eigentl. Punktpaare	III. $B = 0$, $B' = 0$ Doppelpunkte
1. $b_{33} \neq 0$ g_∞ keine Tang.	$\mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + b_{33}s'^2 = 0$	$\mu_2 v'^2 + b_{33}s'^2 = 0$	$b_{33}s'^2 = 0$
2. $b_{33} = 0$, $B_0 \neq 0$ g_∞ einf. Tang.	$\mu_2 v'^2 + 2\sqrt{-B_0}\,u's' = 0$	$2\sqrt{-B_0}\,u's' = 0$	0
3. $b_{33} = 0$, $B_0 = 0$ g_∞ Doppeltang.	0	$\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 = 0$	$\nu_2 v'^2 = 0$

Innerhalb eines Teils der kanonischen Gleichungen sind nun weiter die Vorzeichen der Koeffizienten zu unterscheiden.

2. Die eigentlichen Kurven zweiter Klasse. Die Gleichung I, 1 der Tafel (2) kann mit den Abkürzungen:

(3) $$\alpha = \frac{\mu_1}{b_{33}}, \quad \beta = \frac{\mu_2}{b_{33}}$$

in der Form:

(4) $$\alpha u'^2 + \beta v'^2 + 1 = 0$$

geschrieben werden, wo nunmehr nach § 28, (24):

(5) $$\alpha + \beta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{b_{33}} = \frac{B_0}{b_{33}^2}, \quad \alpha\beta = \frac{\mu_1\mu_2}{b_{33}^2} = \frac{B}{b_{33}^3}.$$

Die beiden Koeffizienten α, β haben daher die folgenden Vorzeichen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \text{für } Bb_{33} > 0, & B_0 > 0: \quad + + \\ \phantom{\text{für }} Bb_{33} > 0, & B_0 < 0: \quad - - \\ \phantom{\text{für }} Bb_{33} < 0 & \phantom{B_0 < 0:} \quad - + \end{cases}$$

Die Kurve ist in diesen drei Fällen bezüglich eine *imaginäre* oder *reelle Ellipse* oder *Hyperbel.*

Die Bedingungen zweiter Zeile (6) sind aber gleichwertig mit:

$$(7) \qquad Bb_{33} > 0, \quad Bb_{33} \text{ und } B_0 \text{ nicht beide } > 0.$$

Denn die Bedingungen (7) lassen nur zu, daß $B_0 < 0$ oder $B_0 = 0$. Wäre aber $B_0 = B_{11} + B_{22} = 0$, so wäre $Bb_{33} = B_{11}B_{22} - B_{12}^2 = -B_{11}^2 - B_{12}^2$ nicht > 0; es bleibt also nur die Möglichkeit $B_0 < 0$ wie in (6).

Die Kurve I, 2, deren Gleichung nach § 29, (15) so geschrieben werden kann:

$$(8) \qquad pv'^2 + 2u' = 0, \quad p = \frac{B}{B_0\sqrt{-B_0}}$$

ist eine *Parabel.* Hier ist $B_0 < 0$ und $Bb_{33} = 0$, also Bb_{33} und B_0 nicht beide > 0. Es genügen aber nach (2) schon die Bedingungen $B \neq 0$, $b_{33} = 0$, $B_0 \neq 0$.

Die *eigentlichen* Kurven zweiter Klasse können also in die Tabelle eingeordnet werden:

(9)

		$B \neq 0$: $Bb_{33} > 0$, $B_0 > 0$	$B \neq 0$: Bb_{33}, B_0 nicht beide > 0
$b_{33} \neq 0$	$Bb_{33} > 0$	$\alpha^2u'^2 + \beta^2v'^2 + 1 = 0$ Imag. Ellipse	$\alpha^2u'^2 + \beta^2v'^2 - 1 = 0$ Ellipse
	$Bb_{33} < 0$		$\alpha^2u'^2 - \beta^2v'^2 - 1 = 0$ Hyperbel
$b_{33} = 0$, $B_0 \neq 0$			$pv'^2 + 2u' = 0$ Parabel

3. Die Punktepaare. Die Gleichung:

$$(10) \qquad \mu_2 v'^2 + b_{33}s'^2 = 0; \quad b_{33} \neq 0, \quad B = 0, \quad B' \neq 0; \quad \mu_2 = \frac{B_0}{b_{33}}$$

stellt ein imaginäres oder reelles Punktepaar auf der y'-Achse dar, je nachdem:

$$(11) \qquad B_0 > 0 \quad \text{oder} \quad B_0 < 0.$$

Da aber nach § 19, (6) für $B = 0$ stets B' und B_0, soweit sie nicht

0 sind, dasselbe Vorzeichen haben, kann man dafür auch sagen: je nachdem:

(12) $$B' > 0 \quad \text{oder} \quad B' < 0.$$

Für die Gleichung:

(13) $$2\sqrt{-B_0}\,u's' = 0,$$

die einen endlichen ($s' = 0$) und einen unendlich fernen Punkt $u' = 0$ darstellt, ist nach § 29, (1) B_0 und daher $B' < 0$.

Die Gleichung (§ 29, (19)):

(14) $$\nu_1 u'^2 + \nu_2 v'^2 = 0, \quad \nu_1\nu_2 = B_{33}, \quad \nu_1 + \nu_2 = B'_{33}$$

stellt ein imaginäres oder reelles Punktepaar dar, je nachdem

(15) $$B_{33} > 0 \quad \text{oder} \quad B_{33} < 0.$$

Man erhält daher für die Punktepaare die Tabelle:

(16)

	$B = 0 \quad B' \neq 0$	
	$B_0(B_{33}) > 0$	$B_0(B_{33}) < 0$
$b_{33} \neq 0$	$\beta^2 v'^2 + 1 = 0$ Imag. endl. Punktepaar	$\beta^2 v'^2 - 1 = 0$ Reell. endl. Punktepaar
$b_{33} = 0,\ B_0 \neq 0$		$u's' = 0$ endl. u. ∞ f. Punkt
$b_{33} = 0,\ B_0 = 0$	$\alpha^2 u'^2 + \beta^2 v'^2 = 0$ Imag. ∞ f. Punktepaar	$\alpha^2 u'^2 - \beta^2 v'^2 = 0$ Reell. ∞ f. Punktepaar

Hier soll in $B_0(B_{33}) \gtrless 0$, wie § 26, 4, B_0 gelten, solange $B_0 \neq 0$, jedoch B_{33} eintreten, wenn $B_0 = 0$.

4. Übereinstimmung bei den Kurven zweiter Ordnung und Klasse. Ist die Kurve (1) eine eigentliche und mit der Kurve § 26, (1) identisch, also nach § 18, 8:

(17) $$b_{kl} = A_{kl}, \quad B_{kl} = A a_{kl}, \quad B = A^2,$$

so müssen die Bedingungen der Tabelle (9) mit denen der Tabelle § 26, (19) übereinstimmen. In der Tat ist infolge von (17):

(18) $$B b_{33} = A^2 A_{33}, \quad B_0 = A(a_{11} + a_{22}) = A A'_{33}.$$

Zugleich wird für die Koeffizienten in (4) und (8):

(19) $$\alpha + \beta = \frac{A A'_{33}}{A_{33}^2}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{A_{33}}\left(\frac{A}{A_{33}}\right)^2; \quad p = \frac{A}{A'_{33}\sqrt{-A A_{33}}},$$

übereinstimmend mit § 26, (6); (10).

5. Invarianten und Bedingungen der Art im schiefwinkligen System. Die *Bedingungen des Ranges* $B \neq 0$; $B = 0, B' \neq 0$; $B = 0$,

$B' = 0$ sind wie § 26, 5 *in jedem recht- und schiefwinkligen System dieselben.*

Die übrigen in den Tabellen (9) und (16) vorkommenden Ausdrücke:

$$(20) \qquad B, \quad B_0 = B_{11} + B_{22}, \quad b_{33}, \quad (B_{33}),$$

der letzte jedoch unter der Voraussetzung $b_{13} = b_{23} = b_{33} = 0$ $(B_0 = 0, b_{33} = 0)$, sind nach § 31, (13); (20) *sämtlich Invarianten der Kurve* (1) *im rechtwinkligen System.*

Bezieht sich die Gleichung (1) auf ein *schiefwinkliges* System Oxy mit dem Achsenwinkel ω, so sind sie nach § 31, (13); (20) durch die *gleichwertigen* und *im schiefwinkligen System invarianten* Ausdrücke:

$$(21) \qquad \frac{B}{\sin^4 \omega}, \quad \frac{B_{11} + B_{22} - 2 B_{12} \cos \omega}{\sin^4 \omega}, \quad \frac{b_{33}}{\sin^2 \omega}, \quad \left(\frac{B_{33}}{\sin^2 \omega}\right)$$

zu ersetzen.

§ 31. Invarianten der Kurve zweiter Klasse.

1. Die Determinante als Invariante. Erhält die auf ein rechtwinkliges System Oxy bezogene Gleichung der Kurve zweiter Klasse:

$$(1) \quad F(u, v, s) = b_{11} u^2 + b_{22} v^2 + 2 b_{12} uv + 2 b_{13} us + 2 b_{23} vs + b_{33} s^2 = 0$$

durch die Substitution § 15, (11) in bezug auf ein schiefwinkliges System $O'x'y'$ die Form:

$$(2) \; S^2 F(u, v, s) = b'_{11} u'^2 + b'_{22} v'^2 + 2 b'_{12} u' v' + 2 b'_{13} u' s' + 2 b'_{23} v' s' + b_{33} s'^2 = 0,$$

so haben die neuen Koeffizienten die Werte § 15, (18)—(20). Zugleich ist neben § 15, (14):

$$(3) \qquad \gamma = \cos \omega = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2$$

und (I Anm. 1, II, (4)):

$$(4) \qquad S^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & S x_0' \\ A_2 & B_2 & S y_0' \\ 0 & 0 & S \end{vmatrix}.$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten wird nun mit dem Werte (4) mit Rücksicht auf § 15, (18)—(20):

$$S^2 \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1(A_1 B_1 S x_0') & F_1(A_2 B_2 S y_0') & b_{13} S \\ F_2(A_1 B_1 S x_0') & F_2(A_2 B_2 S y_0') & b_{23} S \\ F_3(A_1 B_1 S x_0') & F_3(A_2 B_2 S y_0') & b_{33} S \end{vmatrix}$$

und wiederum nach dem Multiplikationstheorem:

$$(5)\qquad S^4\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13}\\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{23}\\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33}\end{vmatrix}.$$

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System Oxy zu einem schiefwinkligen $O'x'y'$ besteht zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen (1) *und* (2) *die Beziehung* (5).

2. Das Kreispunktepaar im recht- und schiefwinkligen System. Durch die Substitution § 15, (11) verwandelt sich die Gleichung des Kreispunktpaares § 20, (60′) in der Weise:

$$(6)\qquad S^2(u^2+v^2) = u'^2+v'^2-2\gamma u'v' = 0$$

und insbesondere für $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$(7)\qquad u^2+v^2 = u'^2+v'^2 = 0.$$

Das imaginäre Kreispunktpaar hat in jedem rechtwinkligen System dieselbe Gleichung (bleibt bei jeder euklidischen Bewegung der Ebene fest).[91])

3. Kreispunktepaar und Kurve zweiter Klasse. Da vermöge der Substitution § 15, (11) nach (2) und (6) die Gleichung:

$$(8)\qquad F(u,v,s)-\lambda(u^2+v^2) = 0$$

übergeht in:

$$(9)\qquad S^2(F(u,v,s)-\lambda(u^2+v^2)) = b'_{11}u'^2+\cdots+b'_{33}s'^2 \\ -\lambda(u'^2+v'^2-2\gamma u'v') = 0,$$

so gibt die Anwendung des Satzes (5) identisch in λ:

$$(10)\qquad S^4\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_{11}-\lambda & b'_{12}+\gamma\lambda & b'_{13}\\ b'_{21}+\gamma\lambda & b'_{22}-\lambda & b'_{23}\\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33}\end{vmatrix}.$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der beiderseitigen Potenzen von λ ergibt sich alsdann neben (5):

$$(11)\qquad S^4(B_{11}+B_{22}) = B'_{11}+B'_{22}-2B'_{12}\gamma \\ S^4 b_{33} = (1-\gamma^2)b'_{33}$$

oder:

$$(12)\qquad S^2 b_{33} = b'_{33}.$$

Aus (10) folgt zugleich die Form der *quadratischen Gleichung des Hauptachsenproblems in schiefwinkligen Koordinaten* (§ 28, (16)).

4. Invarianten im gemeinen Koordinatensystem. Unter Weglassung der Akzente in (2) kann man die Sätze (5); (11); (12) auch so aussprechen (§ 22, 4):

Die Koeffizientenverbindungen[90]:

$$(13)\qquad \frac{1}{\sin^4\omega}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \frac{B_{11}+B_{22}-2B_{12}\cos\omega}{\sin^4\omega}, \quad \frac{b_{33}}{\sin^2\omega}$$

der Gleichung der Kurve zweiter Klasse:

$$(14)\qquad b_{11}u^2+b_{22}v^2+2b_{12}uv+2b_{13}us+2b_{23}vs+b_{33}s^2=0$$

haben in jedem Koordinatensystem Oxy denselben Wert, falls ω den jedesmaligen Achsenwinkel $\left(\textit{beim rechtwinkligen System } \omega=\frac{\pi}{2}\right)$ *bedeutet.*

5. Invarianten des unendlich fernen Punktepaares. Ist in (1) $b_{13}=b_{23}=b_{33}=0$, so wird auch in (2) nach § 15, (19); (20) $b'_{13}=b'_{23}=b'_{33}=0$. Danach folgt aber mit den reduzierten Werten § 15, (18) durch zweimalige Multiplikation mit der Determinante:

$$(15)\qquad S=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

aus (4), ebenso wie § 22, (8):

$$(16)\qquad S^2\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \end{vmatrix}.$$

Durch Anwendung dieses Satzes auf das Punktepaar:

$$(17)\qquad b_{11}u^2+b_{22}v^2+2b_{12}uv-\lambda(u^2+v^2)=0$$

ergibt sich dann wie in (10):

$$(18)\qquad S^2\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b'_{11}-\lambda & b'_{12}+\gamma\lambda \\ b'_{21}+\gamma\lambda & b'_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

und durch Gleichsetzen der Koeffizienten der Potenzen von λ neben (16):

$$(19)\qquad S^2(b_{11}+b_{22})=b'_{11}+b'_{22}+2b'_{12}\gamma.$$

Unter Weglassung der Akzente in der mit $b'_{13}=b'_{23}=b'_{33}=0$ reduzierten Gleichung (2) folgt daher:

Die Koeffizientenverbindungen:

$$(20)\qquad \frac{1}{\sin^2\omega}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \frac{b_{11}+b_{22}+2b_{12}\cos\omega}{\sin^2\omega}$$

der Gleichung des unendlich fernen Punktepaares:

$$(21)\qquad b_{11}u^2+2b_{12}uv+b_{22}v^2=0$$

haben in jedem Koordinatensystem Oxy je denselben Wert, falls ω den Achsenwinkel bedeutet.

6. Die Brennpunkte des Kegelschnittes. Für den Übergang von dem rechtwinkligen System Oxy zu einem parallelen $O'x'y'$ mit dem Anfangspunkt $O' = x_0, y_0$ wird aus § 15, (11) wie in § 15, 5:

(22) $$u = u', \quad v = v', \quad s = -x_0 u' - y_0 v' + s'.$$

Dadurch wird allgemein:

(23) $$Au + Bv + Cs = (A - Cx_0)u' + (B - Cy_0)v' + Cs'.$$

Sind nun:

(24) $$U_1 = A_1 u + B_1 v + C_1 s = 0, \quad U_2 = A_2 u + B_2 v + C_2 s = 0$$

die Gleichungen zweier Punkte, von denen wenigstens der erste endlich ist ($C_1 \neq 0$), und nimmt man für O' diesen ersten Punkt:

(25) $$x_0 = A_1 : C_1, \quad y_0 = B_1 : C_1,$$

so wird nach (23):

(26) $$U_1 = C_1 s', \quad C_1 U_2 = 2au' + 2bv' - es',$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

(27) $$2a = C_1 A_2 - C_2 A_1, \quad 2b = C_1 B_2 - C_2 B_1, \quad -e = C_1 C_2.$$

Die Kurve zweiter Klasse[97]):

(28) $$F(u, v, s) = u^2 + v^2 - U_1 U_2 = 0$$

wird dabei transformiert in:

(29) $$F(u, v, s) = u'^2 + v'^2 - (2au' + 2bv' - es')s' = 0$$

oder mit:

(30) $$r^2 = a^2 + b^2 - e:$$

(31) $$F(u, v, s) = (u' - as')^2 + (v' - bs')^2 - r^2 s'^2 = 0.$$

Dies ist aber nach § 20, (31) ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkt $O' = x_0, y_0$ oder $U_1 = 0$. In der Tat zeigt die Form der Gleichung (28), daß jede durch einen der beiden Kreispunkte (7) an die Kurve $F = 0$ gelegte Tangente auch durch einen der Punkte (24) geht (§ 20, 23).

Die Gleichung (28) *stellt also einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten* (24) *dar.*

So haben die Gleichungen § 13, (18); (43) die Form (28):

(32) $$b^2(u^2 + v^2) + \{(a^2 - b^2)u^2 - 1\} = 0 \text{ oder}$$
$$a^2(u^2 + v^2) + \{(b^2 - a^2)v^2 - 1\} = 0; \quad p(u^2 + v^2) - (pu + 2s)u = 0;$$

ebenso § 12, (27).

IV. Abschnitt.

Konfokale Kegelschnitte.

§ 32. Das System konfokaler Ellipsen und Hyperbeln.

1. Begriff des konfokalen Systems. Die Gleichung:

$$(1') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

stellt nach § 1, (7) eine Ellipse ($a^2 > e^2$) oder Hyperbel ($a^2 < e^2$) dar, deren Brennpunkte $x = \pm e$ und deren Scheitelpunkte $x = \pm a$ sind. Sie stellt daher bei festem e^2 und veränderlichem a^2 ein *System* von Ellipsen und Hyperbeln dar, die bei *wechselnden Scheitelpunkten dieselben Brennpunkte* haben. Man nennt es ein *System konfokaler* (und konfokal gelegener) *Ellipsen und Hyperbeln.*[98])

2. Gleichung und Elemente des konfokalen Systems. Der Symmetrie wegen setzen wir mit $\alpha > \beta$:

$$(2') \qquad a^2 = \alpha - \tau, \quad e^2 = \alpha - \beta.$$

Die *Gleichung des konfokalen Systems*[99]) lautet dann:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} = 1, \quad \alpha > \beta,$$

wo bei festem α und β der *Parameter* τ sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt:

$$(2) \qquad -\infty < \tau < +\infty.$$

Die gemeinsamen *Brennpunkte* sind (§ 13, (26)):

$$(3) \qquad B, B' = \pm\sqrt{\alpha - \beta}, 0 \quad \text{und} \quad 0, \pm i\sqrt{\alpha - \beta}$$

und die *Scheitelpunkte* der einzelnen Kurve:

$$(4) \qquad A, A' = \pm\sqrt{\alpha - \tau}, 0.$$

3. Unterscheidung der Arten. Je nachdem $-\infty < \tau < \beta$ oder $\beta < \tau < \alpha$ oder $\alpha < \tau < +\infty$, ist die Kurve (1) eine Ellipse oder Hyperbel oder imaginäre Ellipse. Um die beiden reellen Arten auch in der Bezeichnung auseinander zu halten, nennen wir ihre Parameter bezüglich $\tau = \lambda$ und $\tau = \mu$. Danach *zerfällt das System* (1) *in die beiden Reihen:*

$$(5)\qquad \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} = 1, \quad -\infty < \lambda < \beta,$$

$$(6)\qquad \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} = 1, \quad \beta < \mu < \alpha,$$

von denen die erste alle Ellipsen, die zweite alle Hyperbeln des Systems enthält.

4. Eigentliche und Grenzformen des konfokalen Systems. Während λ sich von $-\infty$ bis β bewegt (über λ_1, λ_2, λ_3 in Fig. 85), zieht sich die Ellipse (5) aus einem unendlich großen Kreise gegen die Brennpunkte, die sie beständig einschließt, zusammen, bis sie für $\lambda = \beta$ in das zwischen den Brennpunkten B und B' liegende Stück der x-Achse hineinfällt. Die beiden außerhalb B und B' liegenden Stücke der x-Achse stellen die Hyperbel $\mu = \beta$ dar. Diese flacht sich dann mit wachsendem μ (über μ_1, μ_2, μ_3 in Fig. 85) gegen die y-Achse hin ab, in die sie für $\mu = \alpha$ von beiden Seiten her hineinfällt.

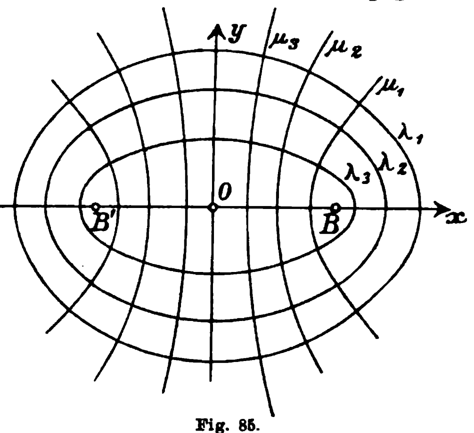


Fig. 85.

5. Die durch einen Punkt der Ebene bestimmten Kurven. Um diejenigen Kurven des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Punkt x, y der Ebene gehen, hat man die in τ *quadratische* Gleichung (1) oder:

$$(7)\qquad f(\tau) = (\beta - \tau)x^2 + (\alpha - \tau)y^2 - (\alpha - \tau)(\beta - \tau) = 0$$

nach τ aufzulösen.

Da nun:

$$(8)\qquad f(-\infty) = -\infty, \; f(\beta) = (\alpha - \beta)y^2 > 0, \; f(\alpha) = (\beta - \alpha)x^2 < 0,$$

so hat die Gleichung (7) stets *zwei reelle Wurzeln*, die zwischen den Grenzen $-\infty$ und β, β und α liegen und daher nach den Ungleichungen bei (5) und (6) mit λ und μ zu bezeichnen sind.

I. *Durch jeden Punkt der Ebene gehen stets zwei Kurven des konfokalen Systems, und zwar eine Ellipse und eine Hyperbel.*

6. Die durch zwei ungleichnamige Kurven bestimmten Punkte. Zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes und den Parametern

λ, μ der durch ihn gehenden Kurven besteht nach (7) die in τ identische Gleichung:

$$(9)\quad (\beta-\tau)x^2+(\alpha-\tau)y^2-(\alpha-\tau)(\beta-\tau)=-(\tau-\lambda)(\tau-\mu).$$

Aus ihr folgt mit $\tau=\alpha, \beta$:

$$(10)\qquad x^2=\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}{\alpha-\beta},\quad y^2=\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}{\beta-\alpha}.$$

Wenn daher λ, μ den Ungleichungen bei (5), (6) entsprechend gegeben werden, so folgen aus (10) vier nur in den Vorzeichen verschiedene *reelle* Wertsysteme x, y (I § 10, 5):

II. *Irgend zwei ungleichnamige Kurven* (5) *und* (6) *des konfokalen Systems schneiden sich stets in vier symmetrisch gegen die Koordinatenachsen gelegenen Punkten.*

Da nach 5, I durch einen Punkt stets zwei und nur zwei ungleichnamige Kurven gehen, so folgt:

III. *Zwei gleichnamige Kurven des konfokalen Systems haben keinen (reellen) Punkt gemein.*

7. Senkrechter Durchschnitt ungleichnamiger Kurven. Ein gemeinsamer Punkt x, y der beiden Kurven λ und μ genügt den beiden Gleichungen (5) und (6), also auch der durch Subtraktion folgenden:

$$(\lambda-\mu)\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}+\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}\right\}=0.$$

Diese bedeutet aber nach § 13, (3), daß die Tangenten der beiden Kurven im Punkte x, y zueinander senkrecht sind, oder, wie auch aus § 13, 4 folgt:

IV. *Zwei ungleichnamige Kurven des konfokalen Systems schneiden sich in jedem ihrer vier Schnittpunkte senkrecht.*

8. Das konfokale System als Kurvenschar. Sind:

$$(11)\qquad F(u,v)=0,\quad G(u,v)=0$$

die Gleichungen zweier Kurven zweiter Klasse (§ 15, (1) mit $s=1$), so heißt die Gesamtheit aller durch die Gleichung:

$$(12)\qquad F(u,v)-\tau\, G(u,v)=0$$

mit dem Parameter τ dargestellten Kurven eine *Kegelschnittschar*. Die Kurven (11) werden als *Grundkurven* der Schar bezeichnet.

Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 13, (18) in Linienkoordinaten:

$$(13)\qquad (\alpha-\tau)u^2+(\beta-\tau)v^2=1$$

oder:

$$(14)\qquad (\alpha u^2+\beta v^2-1)-\tau(u^2+v^2)=0.$$

V. *Das System der konfokalen Kegelschnitte* (1) *ist eine Kegelschnittschar*[100]), *von deren beiden Grundkurven:*

(15) $\alpha u^2 + \beta v^2 - 1 = 0$, (16) $u^2 + v^2 = 0$

die eine das imaginäre Kreispunktepaar (§ 20, (60')) *ist.*

Da die Gleichung (14) in τ vom ersten Grade ist, so folgt (wie auch allgemein für (12)):

VI. *Jede gegebene Gerade der Ebene wird von einer bestimmten Kurve der Schar berührt.*

9. Die vier gemeinsamen Tangenten. *Ausgenommen* von dem Satze VI sind *die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Grundkurven* (15) und (16), die nach (14) gemeinsame Tangenten *aller* Kurven der Schar sind und daher nach VI zusammen mit einer fünften gegebenen Tangente die einzelne Kurve der Schar bestimmen (§ 15, 6).

Die Koordinaten dieser vier imaginären Tangenten sind nach (15) und (16):

(17) $$u = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha - \beta}}, \quad v = \pm \frac{i}{\sqrt{\alpha - \beta}},$$

ihre Gleichungen demnach:

(18) $$x \pm iy \pm \sqrt{\alpha - \beta} = 0.$$

Die einzigen reellen Punkte dieser vier Tangenten sind die Brennpunkte B, B' in (3), in denen sich je zwei konjugiert imaginäre Linien schneiden (§ 20, 23).

10. Die Enveloppe der Schar. Betrachtet man die Kurvenschar in der homogen geschriebenen Form (7):

(19) $$f(x, y, t, \tau) = (\beta - \tau)x^2 + (\alpha - \tau)y^2 - (\alpha - \tau)(\beta - \tau)t^2$$
$$= P\tau^2 + Q\tau + R = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

(20) $$P = -t^2, \quad Q = -x^2 - y^2 + (\alpha + \beta)t^2, \quad R = \beta x^2 + \alpha y^2 - \alpha\beta t^2,$$

so erhält man die *Enveloppe* der Schar durch Elimination von τ aus (19) und:

(21) $$\frac{\partial f(x, y, t, \tau)}{\partial \tau} = 2P\tau + Q = 0,$$

also durch Nullsetzen der *Diskriminante* der quadratischen Gleichung (19):

(22) $$Q^2 - 4PR = 0$$

oder mit Einsetzen der Werte (20) und in Faktoren zerlegt:

(23) $$(x + iy + \sqrt{\alpha - \beta}\,t)(x + iy - \sqrt{\alpha - \beta}\,t)$$
$$(x - iy + \sqrt{\alpha - \beta}\,t)(x - iy - \sqrt{\alpha - \beta}\,t) = 0.$$

Die Enveloppe der Kurvenschar (19) *ist daher eine Kurve vierter Ordnung* (22), *die in die vier gemeinsamen Tangenten* (18) *der beiden Kurven* (15) *und* (16) *zerfällt.*

Diese Enveloppe ist zugleich der Ort der Punkte $x, y, (t)$, für welche die quadratische Gleichung (7) zwei gleiche Wurzeln hat. Die einzigen reellen Punkte, für welche dies eintritt, sind die Brennpunkte B, B' in (3), für die auch in Übereinstimmung mit den Ungleichungen bei (5) und (6): $\lambda = \mu = \beta$ ist.

11. Punktepaare der Schar. Unter den Kurven zweiter Klasse (13) befinden sich außer dem Kreispunktepaar (16), das dem Werte $\tau = \infty$ entspricht, noch zwei weitere Punktepaare, entsprechend den Werten $\tau = \alpha, \beta$ (§ 19, **3**, I'):

$$(24) \qquad (\beta - \alpha)v^2 = 1, \quad (\alpha - \beta)u^2 = 1,$$

die imaginären und reellen Brennpunktepaare (3).

Die beiden Brennpunktepaare sind hiernach die neben dem Kreispunktepaar in der Schar (13) *enthaltenen Punktepaare.*

Bei der Darstellung des konfokalen Systems in *Linienkoordinaten* (13) treten also *die Brennpunktepaare* und das *Kreispunktepaar* selbst als Grenzformen auf, während sich nach **4.** bei der Darstellung in *Punktkoordinaten* (1) die *Hauptachsen*, bezüglich Stücke derselben, und die *unendlich ferne Gerade* als Grenzformen ergeben.

12. Der Ort der Pole einer Geraden. Der Pol einer gegebenen Geraden $g = u, v$:

$$(25) \qquad ux + vy + 1 = 0$$

in bezug auf die Kurve (13) hat nach § 20, (5') die Koordinaten:

$$(26) \qquad x = -(\alpha - \tau)u, \quad y = -(\beta - \tau)v.$$

Diese Gleichungen stellen aber bei veränderlichem τ eine gerade Linie g' dar, als deren Gleichung man durch Elimination von τ erhält:

$$(27) \qquad vx - uy + (\alpha - \beta)uv = 0.$$

Sie steht auf der Geraden $g = u, v$ senkrecht und enthält deren Pole in bezug auf die verschiedenen Kurven τ, also auch den Berührungspunkt der Geraden g mit der nach **8**, VI sie berührenden Kurve τ_0 der Schar (13).

I. *Der Ort der Pole einer Geraden g in bezug auf die Kurven der Schar* (13) *ist eine Gerade g', die Normale der Geraden g in ihrem Berührungspunkt mit der von ihr berührten Kurve der Schar.*[101])

Ausgenommen sind die beiden Hauptachsen und die unendlich ferne Gerade, die in bezug auf alle Kurven (13) je denselben Pol haben (§ 20, **3**).

13. Senkrechte harmonische Polaren. Da die Gerade (27) den Pol der Geraden (25) in bezug auf jede Kurve der Schar (13) enthält und auf (25) senkrecht steht, ist sie in Übereinstimmung mit § 20, (12) die senkrechte harmonische Polare von (25) in bezug auf alle Kurven (13).

II. *Eine beliebige Gerade g hat also in bezug auf alle Kurven der Schar dieselbe senkrechte harmonische Polare g'.*

Durch jeden Punkt P der Ebene gehen nach § 20, 4, II zwei senkrechte harmonische Polaren in bezug auf jede einzelne Kurve τ, die Hauptachsen des von P an τ gelegten Tangentenpaares. Diese zwei sind aber nach 12, I die nach 7. zueinander senkrechten Tangenten und wechselweise zugleich Normalen der beiden durch P gehenden Kurven der Schar (13) (Fig. 86).

III. *Die Normalen der beiden durch einen Punkt P der Ebene gehenden Kurven der Schar* (13) *sind daher die gemeinsamen Halbierungslinien aller Tangentenpaare, die von dem Punkte P an die verschiedenen Kurven der Schar laufen, darunter auch der Brennstrahlen, der Tangenten an die Punktepaare* (24).[102])

§ 33. Das Hauptachsenproblem des Tangentenpaares der Ellipse und Hyperbel.

1. Begriff der elliptischen Koordinaten. Die Parameter λ, μ der beiden nach § 32, 5 durch einen Punkt x, y gehenden Kurven des konfokalen Systems heißen die *elliptischen Koordinaten des Punktes.*[103])

Sie sind bei gegebenen Koordinaten x, y des Punktes als Wurzeln der quadratischen Gleichung § 32, (7) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach § 32, (10) den Punkt x, y vierdeutig.

2. Elliptische Koordinaten besonderer Punkte. Für die Punkte einer Hauptachse hat nach § 32, 4 im allgemeinen eine elliptische Koordinate einen der Grenzwerte α, β: auf der x-Achse ist innerhalb der Brennpunkte $\lambda = \beta$, außerhalb $\mu = \beta$; auf der y-Achse überall $\mu = \alpha$.

Für den Mittelpunkt O ist $\lambda = \beta$, $\mu = \alpha$.

Für die Brennpunkte sind beide elliptischen Koordinaten gleich: $\lambda = \mu = \beta$, und es gibt keine anderen reellen Punkte mit gleichen λ und μ.

3. Identische Gleichungen zwischen gemeinen und elliptischen Koordinaten. Bezeichnen wir mit T die linke Seite der Gleichung

§ 32, (1), so ist nach der Definition der elliptischen Koordinaten § 32, (9):

$$(1)\qquad T = \frac{x^2}{\alpha - \tau} + \frac{y^2}{\beta - \tau} - 1 = -\frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)}.$$

Diese Gleichung besteht zwischen gemeinen x, y und elliptischen Koordinaten λ, μ des laufenden Punktes der Ebene identisch in τ.

Mit $\tau = \lambda, \mu$ ergibt sich:

$$(2)\qquad \frac{x^2}{\alpha - \lambda} + \frac{y^2}{\beta - \lambda} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha - \mu} + \frac{y^2}{\beta - \mu} - 1 = 0.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) folgt nach Division mit den nicht identisch verschwindenden Faktoren $\tau - \lambda, \tau - \mu$:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)} = \dfrac{T}{\tau - \lambda} = \dfrac{\mu - \tau}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} = \dfrac{T}{\tau - \mu} = \dfrac{\lambda - \tau}{(\alpha - \tau)(\beta - \tau)}, \end{cases}$$

und aus dem ersten und dritten Gliede dieser Identitäten bezüglich mit $\tau = \lambda, \mu$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \lambda)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \lambda)^2} = \dfrac{\mu - \lambda}{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)} = \dfrac{1}{l^2}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \mu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \mu)^2} = \dfrac{\lambda - \mu}{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)} = \dfrac{1}{m^2}, \end{cases}$$

wo $1 : l^2$, $1 : m^2$ als Abkürzungen je für die beiden gleichen Ausdrücke dienen. Ebenso geht aus der ersten Gleichung (3) mit $\tau = \mu$ oder zweiten mit $\tau = \lambda$ hervor:

$$(5)\qquad \frac{x^2}{(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)} + \frac{y^2}{(\beta - \lambda)(\beta - \mu)} = 0.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (3) erhält man:

$$(6)\qquad \frac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)(\alpha - \mu)} + \frac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)(\beta - \mu)} = \frac{T}{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)},$$

und durch Subtraktion je einer Gleichung (4) von der entsprechenden (3):

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \lambda)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)^2} = \dfrac{T}{(\tau - \lambda)^2} - \dfrac{1}{(\tau - \lambda) l^2}, \\ \dfrac{x^2}{(\alpha - \tau)(\alpha - \mu)^2} + \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)^2} = \dfrac{T}{(\tau - \mu)^2} - \dfrac{1}{(\tau - \mu) m^2}. \end{cases}$$

Endlich folgt durch Vergleichung der Koeffizienten von τ^1 und τ^0 in der Identität § 32, (9):

$$(8)\quad \lambda + \mu = (\alpha + \beta) - (x^2 + y^2), \qquad (9)\quad \lambda\mu = \alpha\beta - (\beta x^2 + \alpha y^2).$$

4. Elliptische Koordinaten und Brennstrahlen. Da nach § 32, (4) $2\sqrt{\alpha - \lambda}$ und $2\sqrt{\alpha - \mu}$ die Hauptachsenlängen der Ellipse λ und der

Hyperbel μ sind, die durch den Punkt λ, μ gehen, so ist für die Entfernungen dieses Punktes von den Brennpunkten (§ 1, (9); (10)):

$$(9) \qquad r + r' = 2\sqrt{\alpha - \lambda}, \quad r' - r = \varepsilon 2\sqrt{\alpha - \mu},$$

wo $\varepsilon = +1$ für den rechten und $= -1$ für den linken Zweig der Hyperbel.

Die Fokaldistanzen r und r' eines durch seine elliptischen Koordinaten λ, μ gegebenen Punktes sind:

$$(10) \qquad r = \sqrt{\alpha - \lambda} - \varepsilon\sqrt{\alpha - \mu}, \quad r' = \sqrt{\alpha - \lambda} + \varepsilon\sqrt{\alpha - \mu}.$$

5. Das Achsensystem der Normalen. Die Gleichungen der Tangenten der beiden durch einen bestimmten Punkt $P = x, y$ der Ebene gehenden Kurven λ, μ § 32, (5); (6) sind nach § 13, (3) in laufenden Koordinaten X, Y in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem $Oxy = OXY$:

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{xX}{\alpha - \lambda} + \dfrac{yY}{\beta - \lambda} - 1 = 0, \\[2mm] \dfrac{xX}{\alpha - \mu} + \dfrac{yY}{\beta - \mu} - 1 = 0. \end{cases}$$

Die Normalen ξ, η dieser beiden Tangenten im Punkte P haben die Richtungskosinus:

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{lx}{\alpha - \lambda}, & \beta_1 = \dfrac{ly}{\beta - \lambda}, \\[2mm] \alpha_2 = \dfrac{mx}{\alpha - \mu}, & \beta_2 = \dfrac{my}{\beta - \mu}, \end{cases}$$

wo l^2, m^2 die unter (4) eingeführten Werte haben und die positiven Wurzeln l, m die Längen der von O auf die Tangenten (11) gefällten Perpendikel bedeuten (§ 13, (5); (6)).

Das neue Achsensystem (Figur 86) ist nach § 32, 7 ebenso wie das alte OXY rechtwinklig.

Zwischen den alten X, Y und den neuen Koordinaten ξ, η des laufenden Punktes bestehen die Gleichungen (I § 14, (15)):

$$(13) \qquad \begin{cases} X - x = x\left(\dfrac{l\xi}{\alpha - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\alpha - \mu}\right), \\[2mm] Y - y = y\left(\dfrac{l\xi}{\beta - \lambda} + \dfrac{m\eta}{\beta - \mu}\right). \end{cases}$$

Fig. 86.

6. Tangentenpaar an eine Kurve des Systems Das von einem Punkte $P = x, y$ an die Kurve:

$$(14) \qquad \frac{X^2}{\alpha-\tau}+\frac{Y^2}{\beta-\tau}=1$$

gelegte Tangentenpaar hat nach § 13, (19) in laufenden Koordinaten X, Y die Gleichung:

$$(15) \qquad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(16) \qquad R=\frac{(X-x)^2}{\alpha-\tau}+\frac{(Y-y)^2}{\beta-\tau}, \quad S=\frac{x(X-x)}{\alpha-\tau}+\frac{y(Y-y)}{\beta-\tau},$$

während T die Bedeutung (1) hat.

7. Darstellung von R und S in den neuen Koordinaten. Durch die Substitution (13) wird:

$$R=\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)^2}+\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2}\right\}l^2\xi^2+\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)^2}+\cdots\right\}m^2\eta^2$$
$$+2\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)}+\cdots\right\}lm\,\xi\eta$$

oder nach (7) und (6):

$$R=\left\{\frac{T}{(\tau-\lambda)^2}-\frac{1}{(\tau-\lambda)l^2}\right\}l^2\xi^2+\left\{\frac{T}{(\tau-\mu)^2}-\frac{1}{(\tau-\mu)m^2}\right\}m^2\eta^2$$
$$+2\frac{T}{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)}lm\,\xi\eta$$

oder:

$$(17) \qquad R=T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda}+\frac{m\eta}{\tau-\mu}\right\}^2-\left\{\frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}\right\}.$$

Ebenso wird:

$$S=\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\lambda)}+\cdots\right\}l\xi+\left\{\frac{x^2}{(\alpha-\tau)(\alpha-\mu)}+\cdots\right\}m\eta,$$

oder nach (3):

$$(18) \qquad S=T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda}+\frac{m\eta}{\tau-\mu}\right\}.$$

8. Die Hauptachsengleichung des Tangentenpaares. Mit den Werten (17) und (18) nimmt die Gleichung (15) die Form an:

$$(19) \qquad \frac{\xi^2}{\tau-\lambda}+\frac{\eta^2}{\tau-\mu}=0.$$

Dies ist die Gleichung des vom Punkte $P=\lambda,\mu$ an die Kurve τ des konfokalen Systems (14) *gelegten Tangentenpaares in bezug auf das neue Koordinatensystem $P\xi\eta$* (Fig. 86).[102])

Die Form der Gleichung bestätigt den bereits § 32, **13**, III gefundenen Satz:

Das von einem Punkte P der Ebene an die Kurve τ des konfokalen Systems gelegte Tangentenpaar hat als Hauptachsen die Normalen ξ, η der beiden durch den Punkt P gehenden Kurven λ, μ des Systems.

Da die Kurve τ in (14) als *beliebige* Ellipse oder Hyperbel gelten kann, durch die das konfokale System bestimmt wird, so ist damit das Hauptachsenproblem des Tangentenpaares allgemein gelöst.

9. Verschiedene Formen des Tangentenpaares in demselben Punkte. Das Tangentenpaar (19) ist reell für $\lambda < \tau < \mu$. Es geht daher von P ein reelles Tangentenpaar an jede Ellipse λ und jede Hyperbel μ, außerhalb deren P liegt (§ 32, 4). Für $\tau = \lambda$ oder $\tau = \mu$ fällt das Tangentenpaar in die doppelt zählende Tangente der Kurve λ oder μ zusammen.

Für $\tau = \beta$ geht es in das *stets reelle Fokalstrahlenpaar:*

$$\frac{\xi^2}{\beta - \lambda} + \frac{\eta^2}{\beta - \mu} = 0 \tag{20}$$

über.

10. Verschiedene Formen des Tangentenpaares an dieselbe Kurve. Das Tangentenpaar (19) ist nach § 7, (40) rechtwinklig, wenn der Scheitelpunkt $\lambda, \mu = x, y$ der Bedingung genügt:

$$\tau - \lambda + \tau - \mu = 0 \tag{21}$$

oder nach (8):

$$x^2 + y^2 = (\alpha - \tau) + (\beta - \tau). \tag{22}$$

Der Ort der Scheitelpunkte aller rechtwinkligen Tangentenpaare der Kurve (14) *ist also der Kreis* (22) (§ 13, (25)).

Das Tangentenpaar (19) ist nach § 7, (39) ein *Kreisstrahlenpaar,* wenn:

$$\tau - \lambda = \tau - \mu \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu, \tag{23}$$

also nach 2., wenn sein Scheitelpunkt in einen Brennpunkt fällt (§ 13, (26)).

Sollen die beiden Tangenten des Paares (19) bei festem τ mit der ξ-Achse oder der η-Achse den Winkel ω, also untereinander den Winkel 2ω bilden, so muß der Scheitelpunkt λ, μ der Bedingung:

$$\{(\tau - \lambda)\sin^2\omega + (\tau - \mu)\cos^2\omega\}\{(\tau - \mu)\sin^2\omega + (\tau - \lambda)\cos^2\omega\} = 0 \tag{24}$$

genügen.

Diese stellt also den Ort der Scheitel aller Tangentenpaare der Kurve (14) *von gegebenem Winkel* 2ω *dar.*

Da sie in λ und μ symmetrisch ist, wird sie nach (8) und (9) in x, y rational und vom vierten Grade.

§ 34. Das System konfokaler Parabeln.

1. Begriff des konfokalen Systems. Die Gleichung:

$$\frac{y^2}{p} + 2(x+q) = 0 \tag{1'}$$

stellt nach § 2, (17) eine *Parabel* dar, für deren *Brennpunkt, Scheitelpunkt* und *Direktrix:*

$$x = -q - \frac{p}{2},\ y = 0;\quad x = -q,\ y = 0;\quad x = -q + \frac{p}{2}. \tag{2'}$$

Die Parabel ist eine *linke* oder *rechte*, je nachdem $p > 0$ oder $p < 0$.

Setzt man:

$$p = \beta - \tau,\quad q = \frac{\tau}{2}, \tag{3'}$$

so nimmt die Gleichung (1') die Form an:

$$\frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau = 0, \tag{1}$$

während die Koordinaten von *Brennpunkt* B und *Scheitelpunkt* S und die Gleichung der *Direktrix* werden:

$$x = -\frac{\beta}{2},\ y = 0;\quad x = -\frac{\tau}{2},\ y = 0;\quad x = \frac{\beta}{2} - \tau. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) stellt daher bei festem β und veränderlichem Parameter τ:

$$-\infty < \tau < +\infty \tag{3}$$

ein *System konfokaler (und koachsialer) Parabeln* dar.[98])

2. Unterscheidung linker und rechter Parabeln. Je nachdem $-\infty < \tau < \beta$ oder $\beta < \tau < +\infty$ ist die Parabel (1) eine linke oder rechte Parabel. Wir nennen ihren Parameter beziehungsweise $\tau = \lambda$ und $\tau = \mu$. Danach *zerfällt das System* (1) *in die beiden Reihen:*

$$\frac{y^2}{\beta - \lambda} + 2x + \lambda = 0,\quad -\infty < \lambda < \beta, \tag{4}$$

$$\frac{y^2}{\beta - \mu} + 2x + \mu = 0,\qquad \beta < \mu < +\infty, \tag{5}$$

von denen die erste alle linken, die zweite alle rechten Parabeln des Systems enthält.

3. Eigentliche und Grenzformen. Während λ sich von $-\infty$ bis β bewegt (über $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ in Fig. 87), bewegt sich der Scheitel der linken Parabel λ auf der x-Achse von rechts nach links gegen den Brennpunkt B, während die Parabel selbst sich gegen das von B nach links laufende Stück der x-Achse zusammenzieht, welches die

letzte linke Parabel $\lambda = \beta$ bildet. Mit dem von B nach rechts laufenden Stück der x-Achse $\mu = \beta$ beginnen die rechten Parabeln, die sich, während μ von β bis $+\infty$ geht (über μ_1, μ_2, μ_3 in Fig. 87), aus diesem Stück herausheben, indem ihr Scheitel sich von B nach links bewegt.

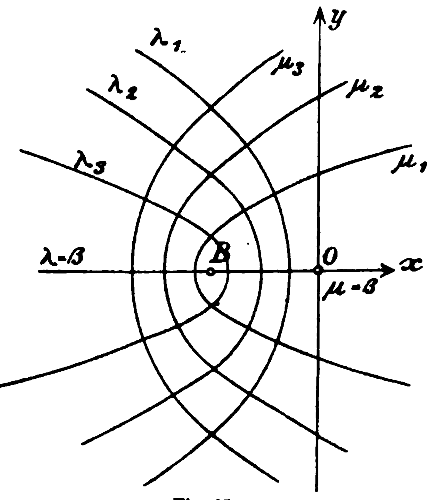


Fig. 87.

4. Die durch einen Punkt bestimmten Parabeln. Um diejenigen Parabeln des konfokalen Systems (1) zu finden, die durch einen gegebenen Punkt x, y der Ebene gehen, hat man die in τ *quadratische* Gleichung (1) oder:

(6) $f(\tau) = y^2 + (\beta - \tau)(2x + \tau) = 0$

nach τ aufzulösen.

Da nun:

$$(7) \qquad f(-\infty) = -\infty, \quad f(\beta) = y^2 > 0, \quad f(+\infty) = -\infty,$$

so hat die Gleichung (6) stets *zwei reelle Wurzeln*, die zwischen den Grenzen $-\infty$ und β, β und $+\infty$ liegen und daher nach den Ungleichungen bei (4) und (5) mit λ und μ zu bezeichnen sind.

I. *Durch jeden Punkt der Ebene gehen stets zwei Parabeln des konfokalen Systems, und zwar eine linke und eine rechte.*

5. Die durch zwei ungleichnamige Parabeln bestimmten Punkte. Zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes und den Parametern λ, μ der durch ihn gehenden Kurven besteht nach (6) die in τ identische Gleichung:

$$(8) \qquad y^2 + (\beta - \tau)(2x + \tau) = -(\tau - \lambda)(\tau - \mu).$$

Aus ihr folgt, indem man einmal die Koeffizienten von τ beiderseits gleich setzt und einmal $\tau = \beta$ nimmt:

$$(9) \qquad x = \frac{\beta - \lambda - \mu}{2}, \quad y^2 = -(\beta - \lambda)(\beta - \mu).$$

II. *Irgend zwei ungleichnamige Parabeln* (4) *und* (5) *schneiden sich daher stets in zwei symmetrisch gegen die x-Achse gelegenen reellen Punkten.*

III. *Zwei gleichnamige Parabeln schneiden sich nicht in reellen Punkten.*

Gleichzeitig folgt aus (8) mit $\tau = 0$:

$$(10) \qquad -\lambda\mu = y^2 + 2\beta x.$$

6. Senkrechter Schnitt ungleichnamiger Parabeln. Ein gemeinsamer Punkt x, y der beiden Parabeln λ und μ genügt den beiden Gleichungen (4) und (5), also auch der durch Subtraktion folgenden (vgl. (9)):

$$(11)\qquad (\lambda-\mu)\left\{\frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+1\right\}=0.$$

Diese bedeutet aber nach § 13, (35), daß die Tangenten beider Parabeln in x, y senkrecht sind oder:

IV. *Zwei ungleichnamige Parabeln des konfokalen Systems schneiden sich in jedem ihrer beiden Schnittpunkte senkrecht.*

7. Das konfokale System als Kurvenschar. Die Gleichung des konfokalen Systems (1) lautet nach § 13, (42) in Linienkoordinaten u, v, s:

$$(12)\qquad (\beta-\tau)v^2-\tau u^2+2us=0$$

oder:

$$(13)\qquad (\beta v^2+2us)-\tau(u^2+v^2)=0.$$

V. *Das System der konfokalen Parabeln* (1) *ist eine Kegelschnittschar*[100]), *von deren beiden Grundkurven zweiter Klasse:*

$$(14)\qquad \beta v^2+2us=0, \qquad\qquad (15)\qquad u^2+v^2=0$$

die eine das imaginäre Kreispunktepaar ist.

VI. *Jede Gerade der Ebene wird von einer Kurve der Schar berührt* (§ 32, 8).

8. Die vier gemeinsamen Tangenten. Ausgenommen von Satz VI sind die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Grundparabeln (14) und (15), die nach (13) gemeinsame Tangenten aller Parabeln der Schar sind.

Die Koordinaten dieser vier Tangenten sind nach (14) und (15):

$$u, v, s=1, \pm i, \frac{\beta}{2};\quad u, v, s=0, 0, 1;\quad u, v, s=0, 0, 1,$$

worunter die unendlich ferne Gerade doppelt vorkommt; ihre Gleichungen lauten:

$$(16)\qquad x\pm iy+\frac{\beta}{2}t=0;\quad t=0;\quad t=0.$$

9. Die Enveloppe der Schar. Betrachtet man die Kurvenschar in der homogen geschriebenen Form (6):

$$(17)\qquad f(x, y, t, \tau)=y^2+(\beta-\tau)(2xt+\tau t^2)=P\tau^2+Q\tau+R=0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(18)\qquad P=-t^2,\quad Q=\beta t^2-2xt,\quad R=y^2+2\beta xt,$$

so erhält man die Enveloppe der Schar durch Elimination von τ aus (17) und:

(19) $$\frac{\partial f(x, y, t, \tau)}{\partial \tau} = 2P\tau + Q = 0,$$

also durch Nullsetzen der Diskriminante der quadratischen Gleichung (17):

(20) $$Q^2 - 4PR = 0$$

oder mit Einsetzung der Werte (18):

(21) $$4(x + iy + \tfrac{1}{2}\beta t)(x - iy + \tfrac{1}{2}\beta t)t^2 = 0.$$

Die Enveloppe der Kurvenschar (17) *ist daher eine Kurve vierter Ordnung* (21), *die in die vier gemeinsamen Tangenten* (16) *der beiden Kurven* (14) *und* (15) *zerfällt.*

Diese Enveloppe ist zugleich der Ort der Punkte $x, y, (t)$, für welche die quadratische Gleichung (6) zwei gleiche Wurzeln hat. Der einzige endliche reelle Punkt, für welchen dies eintritt, ist der Brennpunkt (2), für den auch in Übereinstimmung mit den Ungleichungen bei (4) und (5): $\lambda = \mu = \beta$ ist.

10. Punktepaare der Schar. Unter den Kurven zweiter Klasse (12) befindet sich außer dem *Kreispunktepaar* (15), das doppelt zählend dem Werte $\tau = \infty$ entspricht, noch *ein Punktepaar* für $\tau = \beta$ (§ 19, 3, I′):

(22) $$2u\left(-\frac{\beta}{2}u + s\right) = 0,$$

welches aus dem Brennpunkt $x : y : t = -\frac{\beta}{2} : 0 : 1$ und dem unendlich fernen Punkte $x : y : t = 1 : 0 : 0$ besteht.

11. Der Ort der Pole einer Geraden. Der Pol einer gegebenen Geraden $g = u, v$:

(23) $$ux + vy + 1 = 0$$

in bezug auf die Kurve (12) hat nach § 20, (40′) die Koordinaten:

(24) $$x = -\tau + \frac{1}{u}, \quad y = (\beta - \tau)\frac{v}{u}.$$

Diese Gleichungen stellen aber bei veränderlichem τ eine gerade Linie dar, als deren Gleichung man durch Elimination von τ erhält:

(25) $$uvx - u^2y + \beta uv - v = 0.$$

Sie steht auf der Geraden $g = u, v$ senkrecht und enthält deren Pole in bezug auf die verschiedenen Kurven τ, also auch den Berührungspunkt der Geraden g mit der sie berührenden Kurve τ_0 der Schar (12).

Der Ort der Pole einer Geraden g in bezug auf die Kurven der Schar (12) ist eine Gerade g', die Normale der Geraden g in ihrem Berührungspunkt mit der von ihr berührten Kurve der Schar.

Ausgenommen ist die Hauptachse $y = 0$ und die unendlich ferne Gerade, die in bezug auf alle Kurven der Schar denselben Pol haben.

In Übereinstimmung mit § 20, (46) ist die Gerade (25) die senkrechte harmonische Polare der Geraden (23) in bezug auf alle Parabeln der Schar (12). Danach gelten auch hier die Sätze § 32, **13**, II; III (Fig. 88).

§ 35. Das Hauptachsenproblem des Tangentenpaares der Parabel.

1. Begriff der parabolischen Koordinaten. Die Parameter λ, μ der beiden nach § 34, **4** durch einen Punkt x, y gehenden Parabeln des konfokalen Systems heißen die *parabolischen Koordinaten des Punktes.*

Sie sind bei gegebenen Koordinaten x, y des Punktes als Wurzeln der quadratischen Gleichung § 34, (6) bestimmt. Sie bestimmen ihrerseits nach 34, (9) den Punkt zweideutig.

Für die Punkte der x-Achse links vom Brennpunkt B ist $\lambda = \beta$, für die rechts $\mu = \beta$; für den Brennpunkt selbst $\lambda = \mu = \beta$.

2. Identische Gleichungen zwischen gemeinen und parabolischen Koordinaten. Bezeichnen wir mit T die linke Seite der Gleichung § 34, (1), so ist nach der Definition der parabolischen Koordinaten § 34, (8):

$$T = \frac{y^2}{\beta - \tau} + 2x + \tau = -\frac{(\tau - \lambda)(\tau - \mu)}{\beta - \tau}. \tag{1}$$

Diese Gleichung besteht zwischen gemeinen x, y und parabolischen Koordinaten λ, μ des laufenden Punktes der Ebene identisch in τ.

Mit $\tau = \lambda, \mu$ ergibt sich:

$$\frac{y^2}{\beta - \lambda} + 2x + \lambda = 0, \quad \frac{y^2}{\beta - \mu} + 2x + \mu = 0. \tag{2}$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) folgt nach Division mit den nicht identisch verschwindenden Faktoren $\tau - \lambda$, $\tau - \mu$:

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \lambda)} + 1 = \dfrac{T}{\tau - \lambda} = -\dfrac{\tau - \mu}{\beta - \tau}, \\[2ex] \dfrac{y^2}{(\beta - \tau)(\beta - \mu)} + 1 = \dfrac{T}{\tau - \mu} = -\dfrac{\tau - \lambda}{\beta - \tau}, \end{cases} \tag{3}$$

und hieraus mit $\tau = \lambda$ und $\tau = \mu$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta-\lambda)^2}+1=\dfrac{\mu-\lambda}{\beta-\lambda}=\dfrac{1}{l^2}, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\mu)^2}+1=\dfrac{\lambda-\mu}{\beta-\mu}=\dfrac{1}{m^2}, \end{cases}$$

wo $1:l^2$ und $1:m^2$ Abkürzungen je für die beiden gleichen Ausdrücke sind. Ebenso geht aus (3) mit $\tau=\mu$ oder $\tau=\lambda$ hervor:

$$(5)\qquad \frac{y^2}{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}+1=0.$$

Durch Subtraktion der Gleichungen (3) erhält man:

$$(6)\qquad \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)(\beta-\mu)}=\frac{T}{(\tau-\lambda)(\tau-\mu)}$$

und durch Subtraktion je einer Gleichung (4) von der entsprechenden (3):

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2}=\dfrac{T}{(\tau-\lambda)^2}-\dfrac{1}{(\tau-\lambda)l^2}, \\ \dfrac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)^2}=\dfrac{T}{(\tau-\mu)^2}-\dfrac{1}{(\tau-\mu)m^2}. \end{cases}$$

3. Parabolische Koordinaten und Brennstrahlen. Bei der linken oder rechten Parabel besteht nach § 2, (15) und § 34, (3′) zwischen der Fokaldistanz r und der x-Koordinate eines Punktes bezüglich die Beziehung:

$$r=-x+\frac{\beta}{2}-\lambda, \qquad r=x-\frac{\beta}{2}+\mu$$

oder nach § 34, (9) in beiden Fällen:

$$(8)\qquad r=\frac{\mu-\lambda}{2}.$$

Die Fokaldistanz r eines durch seine parabolischen Koordinaten λ, μ gegebenen Punktes hat den Wert (8).

4. Das Achsensystem der Normalen. Die Gleichungen der Tangenten der beiden durch einen bestimmten Punkt $P=x, y$ gehenden Parabeln λ, μ, § 34, (4); (5) sind nach § 13, (35) in laufenden Koordinaten X, Y in bezug auf das zugrunde gelegte Achsensystem $Oxy=OXY$:

$$(9)\qquad X+\frac{yY}{\beta-\lambda}+x+\lambda=0, \quad X+\frac{yY}{\beta-\mu}+x+\mu=0.$$

Die Normalen ξ, η dieser beiden Tangenten im Punkte x, y haben die Richtungskosinus:

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha_1=l, & \beta_1=\dfrac{ly}{\beta-\lambda}, \\ \alpha_2=m, & \beta_2=\dfrac{my}{\beta-\mu}, \end{cases}$$

wo l und m die positiven Wurzeln aus den in (4) eingeführten Größen l^2 und m^2 sind. Das neue Achsensystem $P\xi\eta$ (Fig. 88) ist wie das alte OXY rechtwinklig.

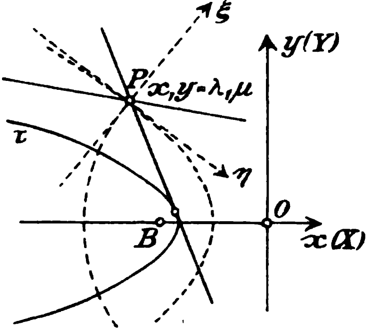


Fig. 88.

Zwischen den alten X, Y und den neuen Koordinaten ξ, η des laufenden Punktes bestehen die Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} X - x = l\xi + m\eta \\ Y - y = y\left(\frac{l\xi}{\beta-\lambda} + \frac{m\eta}{\beta-\mu}\right). \end{cases}$$

5. Tangentenpaar an eine Parabel. Das vom Punkte $P = x, y$ an die Parabel:

$$(12)\quad \frac{Y^2}{\beta-\tau} + 2X + \tau = 0$$

gelegte Tangentenpaar hat nach § 13, (44) in laufenden Koordinaten X, Y die Gleichung:

$$(13)\quad TR - S^2 = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(14)\quad R = \frac{(Y-y)^2}{\beta-\tau},\quad S = \frac{y(Y-y)}{\beta-\tau} + (X-x),$$

während T die Bedeutung (1) hat.

Durch die Substitution (11) wird aber:

$$R = \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)^2} l^2\xi^2 + \frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)^2} m^2\eta^2$$
$$+ 2\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)(\beta-\mu)} lm\,\xi\eta$$

oder nach (6) und (7):

$$(15)\quad R = T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu}\right\}^2 - \left\{\frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu}\right\}.$$

Ebenso wird:

$$S = \left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\lambda)} + 1\right\} l\xi + \left\{\frac{y^2}{(\beta-\tau)(\beta-\mu)} + 1\right\} m\eta$$

oder nach (3):

$$(16)\quad S = T\left\{\frac{l\xi}{\tau-\lambda} + \frac{m\eta}{\tau-\mu}\right\}.$$

6. Die Hauptachsengleichung des Tangentenpaares. Mit (15) und (16) wird aus (13):

$$(17)\quad \frac{\xi^2}{\tau-\lambda} + \frac{\eta^2}{\tau-\mu} = 0.$$

Dies ist die Gleichung des vom Punkte $P = \lambda, \mu$ an die Parabel τ des konfokalen Systems gelegten Tangentenpaares in bezug auf das neue Koordinatensystem $P\xi\eta$ (Fig. 88).

Die Form der Gleichung zeigt:

Das von einem Punkte P der Ebene an die Parabel τ des konfokalen Systems gelegte Tangentenpaar hat als Hauptachsen die Normalen ξ, η der beiden durch den Punkt P gehenden Parabeln des Systems.

7. Verschiedene Formen des Tangentenpaares in demselben Punkt. Das Tangentenpaar (17) ist reell für $\lambda < \tau < \mu$, so daß von P ein reelles Tangentenpaar geht an jede Parabel, außerhalb deren P liegt. Für $\tau = \lambda$ oder $\tau = \mu$ fällt das Tangentenpaar in die doppelt zählende Tangente der Kurve λ oder μ selbst zusammen.

Für $\tau = \beta$ geht es in das stets reelle *Fokalstrahlenpaar:*

(18) $$\frac{\xi^2}{\beta - \lambda} + \frac{\eta^2}{\beta - \mu} = 0$$

oder nach (4):

(19) $$\left(\frac{\xi}{l} - \frac{\eta}{m}\right)\left(\frac{\xi}{l} + \frac{\eta}{m}\right) = 0$$

über, dessen erster Strahl $\xi : \eta = l : m$ nach (10) der x-Achse parallel läuft, während der andere der eigentliche Fokalstrahl PB ist.

8. Verschiedene Formen des Tangentenpaares an dieselbe Parabel. Das Tangentenpaar (17) ist nach § 7, (40) rechtwinklig, wenn:

(20) $$\tau - \lambda + \tau - \mu = 0$$

oder nach § 34, (9):

(21) $$x = \frac{\beta}{2} - \tau.$$

Der Ort der Scheitel des an die Parabel § 34, (1) *gelegten rechtwinkligen Tangentenpaares ist die Direktrix* (§ 13, **16**, I).

Das Tangentenpaar (17) ist nach § 7, (39) ein *Kreisstrahlenpaar,* wenn:

(22) $$\tau - \lambda = \tau - \mu \quad \text{oder} \quad \lambda = \mu = \beta,$$

also nach **1**, wenn sein Scheitelpunkt in den Brennpunkt fällt (§ 13, **16**, II).

Der Ort der Scheitel aller Tangentenpaare der Parabel (12) *von gegebenem Winkel* 2ω wird wieder durch die Gleichung § 33, (24) dargestellt.

§ 36. Das Ivorysche Theorem und die Jacobische Form der Fokaleigenschaften.

1. Die Identität des Ivoryschen Theorems für Ellipse und Hyperbel. Die beiden Kegelschnitte:

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a^2 > b^2),$ (2) $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 \quad (a'^2 > b'^2)$

sollen konfokal sein (§ 32, 1), also daß:

(3) $$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = h^2,$$

wo h^2 den gemeinsamen Wert der Differenzen der Halbachsenquadrate bedeutet.

Sind nun x, y und x_0', y_0' irgend zwei Punkte der Ebene, so ist:

$$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} - 1\right)\right\}$$
$$= (a^2 - a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0'^2}{a'^2}\right) + (b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0'^2}{b'^2}\right).$$

Da aber:

$$(a^2 - a'^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_0'^2}{a'^2}\right) = (x - x_0')^2 - \left(\frac{a'}{a}x - \frac{a}{a'}x_0'\right)^2,$$

so *besteht identisch in x, y und x_0', y_0' die Gleichung:*

(4) $$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} - 1\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2\} - \left\{\left(\frac{a'}{a}x - \frac{a}{a'}x_0'\right)^2 + \left(\frac{b'}{b}y - \frac{b}{b'}y_0'\right)^2\right\}.$$

Wird b^2 durch $-b^2$ ersetzt, also b durch bi, so ändert sich auf der rechten Seite das Vorzeichen des zweiten Quadrats in der zweiten Klammer. Wird aber *gleichzeitig* b^2 durch $-b^2$ und b'^2 durch $-b'^2$ ersetzt, so ändert sich die rechte Seite von (4) gar nicht.

Wir setzen jetzt voraus, daß die beiden Kegelschnitte (1) und (2) *gleichartige*, also beide Ellipsen oder, mit Umkehr der Vorzeichen von b^2 und b'^2, beide Hyperbeln seien. Alsdann nehmen wir zwischen den Punkten der Ebene die *affine Verwandtschaft:*

(5) $$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}$$

an, vermöge welcher jedem reellen Punkt $P = x, y$ ein reeller Punkt $P' = x', y'$ entspricht. Hiernach kann der Inhalt der Gleichung (4) in folgender Weise gefaßt werden:

I. *Sind $P = x, y$, $P' = x', y'$ und $P_0 = x_0, y_0$, $P_0' = x_0', y_0'$ zwei Paare entsprechender Punkte in der Affinität* (5), *so besteht identisch in x, y und x_0', y_0' die Gleichung:*

(6) $$h^2\left\{\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0'^2}{a'^2} + \frac{y_0'^2}{b'^2} - 1\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2\} - \{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2\}.$$

2. Das Ivorysche Theorem für Ellipsen oder Hyperbeln. Für zwei entsprechende Punkte P und P' folgt aus (5):

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - 1.$$

Liegt daher P auf der Kurve (1), so liegt P' auf (2) und umgekehrt.

II. *Vermöge der Affinität* (5) *entspricht jedem Punkte der einen der beiden Kurven* (1) *und* (2) *ein Punkt der andern.*

Ist nun $P = x, y$ irgendein Punkt der Kurve (1) und $P_0' = x_0', y_0'$ irgendein Punkt der Kurve (2), so daß auf der linken Seite von (6) die beiden runden Klammern verschwinden, so bleibt:

(8) $$0 = \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2\} - \{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2\}$$

oder:

(9) $$\overline{PP_0'} = \overline{P'P_0}.$$

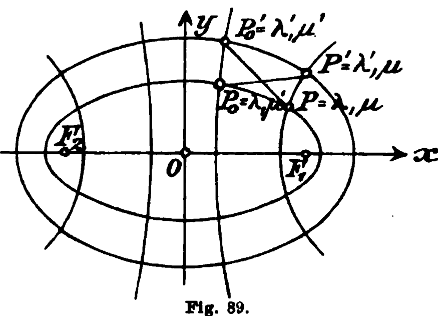


Fig. 89.

III. *Die Entfernung irgend zweier Punkte P und P_0' der beiden gleichartigen konfokalen Kegelschnitte* (1) *und* (2) *ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte P' und P_0 des jedesmal andern Kegelschnittes.*[104])

3. Die Identität des Ivoryschen Theorems für die Parabel. Die beiden Parabeln:

(10) $$\frac{y^2}{b^2} + 2x - b^2 = 0 \qquad (11) \quad \frac{y^2}{b'^2} + 2x - b'^2 = 0$$

sind konfokal (§ 34, **1**), da beide den Brennpunkt 0 haben. Wir setzen zur Abkürzung:

(12) $$b^2 - b'^2 = h^2.$$

Sind nun x, y und x_0', y_0' irgend zwei Punkte der Ebene, so ist:

$$h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2} + 2x - b^2\right) - \left(\frac{y_0'^2}{b'^2} + 2x_0' - b'^2\right)\right\}$$
$$= 2h^2(x - x_0') - h^4 + (b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0'^2}{b'^2}\right)$$

Da aber:

$$(b^2 - b'^2)\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y_0'^2}{b'^2}\right) = (y - y_0')^2 - \left(\frac{b'}{b}y - \frac{b}{b'}y_0'\right)^2,$$

so *besteht identisch in x, y und x_0', y_0' die Gleichung:*

(13) $$h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2} + 2x - b^2\right) - \left(\frac{y_0'^2}{b'^2} + 2x_0' - b'^2\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2\} - \left\{(x - x_0' - h^2)^2 + \left(\frac{b'}{b}y - \frac{b}{b'}y_0'\right)^2\right\}.$$

Wir nehmen nun zwischen den Punkten der Ebene die *affine Verwandtschaft:*

(14) $$x = x' + \frac{h^2}{2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}$$

an, vermöge welcher jedem Punkte $P = x, y$ ein Punkt $P' = x', y'$ entspricht. Dann ergibt sich aus (13):

I. *Sind $P = x, y$, $P' = x', y'$ und $P_0 = x_0, y_0$, $P_0' = x_0', y_0'$ zwei Paare entsprechender Punkte in der Affinität* (14), *so besteht identisch in x, y und x_0', y_0' die Gleichung:*

$$(15)\quad h^2\left\{\left(\frac{y^2}{b^2} + 2x - b^2\right) - \left(\frac{y_0'^2}{b'^2} + 2x_0' - b'^2\right)\right\}$$
$$= \{(x - x_0')^2 + (y - y_0')^2\} - \{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2\}.$$

4. Das Ivorysche Theorem für die Parabel. Für zwei entsprechende Punkte P und P' folgt aus (12) und (14):

$$(16)\qquad \frac{y^2}{b^2} + 2x - b^2 = \frac{y'^2}{b'^2} + 2x' - b'^2.$$

II. *Vermöge der Affinität* (14) *entspricht jedem Punkte der einen der beiden Parabeln* (10) *und* (11) *ein Punkt der andern.*

Aus (15) folgt danach wie unter 2:

III. *Die Entfernung irgend zweier Punkte P und P_0' der beiden konfokalen Parabeln* (10) *und* (11) *ist gleich der Entfernung der beiden entsprechenden Punkte P' und P_0 der jedesmal andern.*

5. Lage entsprechender Punkte im konfokalen System. Geht man für die Kurven (1) und (2) zur Bezeichnung von § 32, 1 über und setzt unter Annahme zweier Ellipsen:

$$(17)\qquad a^2 = \alpha - \lambda,\quad b^2 = \beta - \lambda;\quad a'^2 = \alpha - \lambda',\quad b'^2 = \beta - \lambda',$$

so lauten die quadrierten Gleichungen (5) in den elliptischen Koordinaten λ, μ und λ', μ' der beiden Punkte P und P' nach § 32, (10):

$$(18)\qquad \alpha - \mu = \alpha - \mu',\quad \beta - \mu = \beta - \mu',\quad \text{also: } \mu = \mu'.$$

Setzt man ebenso für zwei linke Parabeln (10) und (11) nach § 34, 1:

$$(19)\qquad b^2 = \beta - \lambda,\quad x = x + \frac{\beta}{2};\quad b'^2 = \beta - \lambda',\quad x = x + \frac{\beta}{2},$$

so geben die Gleichungen (14), nach § 34, (9) in den parabolischen Koordinaten λ, μ und λ', μ' der beiden Punkte P und P' dargestellt, da nach (12) und (19) $h^2 = \lambda' - \lambda$ wird:

$$(20)\quad \frac{\beta - \lambda - \mu}{2} = \frac{\beta - \lambda' - \mu'}{2} + \frac{\lambda' - \lambda}{2},\quad \beta - \mu = \beta - \mu',\ \text{also } \mu = \mu'.$$

Entsprechende Punkte zweier konfokalen Ellipsen (oder linken Parabeln) λ und λ' haben also gleiche elliptische (oder parabolische) Koordinaten μ; oder:

Entsprechende Punkte zweier konfokalen Ellipsen (linken Parabeln) liegen (Fig. 89) *auf derselben konfokalen Hyperbel (rechten Parabel).*

Das Analoge gilt für entsprechende Punkte zweier konfokalen Hyperbeln oder rechten Parabeln.

6. Die Jacobische Form der Fokaleigenschaften. Wählt man als Kurve (1) eine beliebige Ellipse λ des konfokalen Systems und als Kurve (2) das Linienstück $\lambda = \beta$ zwischen den Brennpunkten F_1 und F_2 (Fig. 90), so entspricht, in elliptischen Koordinaten angegeben, einem beliebigen Punkte $P = \lambda, \mu$ der ersteren ein bestimmter Punkt $P' = \beta, \mu$ der letzteren, ferner entsprechen den Schnittpunkten $A_1, A_2 = \lambda, \beta$ der Ellipse λ die Brennpunkte $F_1, F_2 = \beta, \beta$ selbst. Nach (9) ist dann:

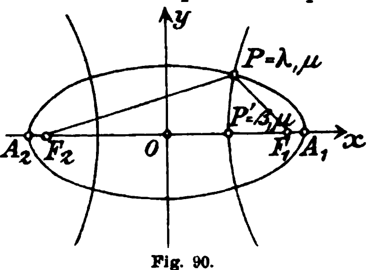


Fig. 90.

$$(21) \qquad \overline{PF_1} = \overline{P'A_1}, \quad \overline{PF_2} = \overline{P'A_2}.$$

I. *Die Abstände eines Punktes P der Ellipse von den Brennpunkten F_1 und F_2 sind gleich den Abständen des entsprechenden Punktes P' von den Scheitelpunkten A_1 und A_2.*

Da nun zwischen den Entfernungen der drei in gerader Linie liegenden Punkte A_1, A_2, P' die Beziehung:

$$(22) \qquad \overline{P'A_1} + \overline{P'A_2} = \overline{A_1A_2}$$

besteht, so ist nach (21) auch, wie § 1, (9):

$$(23) \qquad \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{A_1A_2}.$$

II. *Die Ellipse ist der Ort eines Punktes P, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten F_1, F_2 durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen eines Punktes P' der x-Achse von den zwei Scheitelpunkten A_1, A_2 der Ellipse verbindet.*[105])

7. Allgemeinere Darstellung der Jacobischen Form der Fokaleigenschaften. Der Flächeninhalt F eines Dreiecks drückt sich durch die Längen e_{23}, e_{31}, e_{12} der drei Seiten in der Weise aus:

$$(24) \qquad -16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & e_{12}^2 & e_{13}^2 \\ 1 & e_{21}^2 & 0 & e_{23}^2 \\ 1 & e_{31}^2 & e_{32}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Indem man die eine Ecke in die gegenüberliegende Seite fallen läßt, gehen die drei Seiten des Dreiecks in die drei Entfernungen dreier Punkte einer Geraden über. Die Bedingung $F = 0$ ist daher die zwischen diesen Entfernungen bestehende Relation. Sie lautet, wenn man in Anlehnung an die Bezeichnung (21) setzt:

$$(25) \qquad e_{23} = \overline{A_1A_2} = a, \quad e_{31} = \overline{A_1P'} = r_1, \quad e_{12} = \overline{A_2P'} = r_2$$

und entwickelt (vgl. § 1, (4)):

$$(26) \qquad (r_1^2 - r_2^2)^2 - 2a^2(r_1^2 + r_2^2) + a^4 = 0$$

oder auch (I § 1, (3)):

$$(27) \qquad (r_1 + r_2 + a)(r_1 + r_2 - a)(r_1 - r_2 + a)(r_1 - r_2 - a) = 0.$$

I. *Die Relation* (26) *verbindet also die Entfernungen* r_1 *und* r_2 *eines Punktes* P' *einer Geraden von zwei festen Punkten* A_1, A_2 *dieser Geraden.*

Unterwirft man nun die Entfernungen eines Punktes $P = x, y$ der Ebene von zwei festen Punkten $F_1 = x_1, y_1$ und $F_2 = x_2, y_2$ dieser Relation, setzt also:

$$(28) \qquad \begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 - 2x_1x - 2y_1y + x_1^2 + y_1^2 \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 - 2x_2x - 2y_2y + x_2^2 + y_2^2, \end{aligned}$$

so erhält man in (26) eine Gleichung zweiten Grades in x, y. Somit folgt:

II. *Der Ort eines Punktes* P *der Ebene, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten* F_1, F_2 *durch dieselbe Relation verbunden sind, welche die Entfernungen zweier Punkte* A_1, A_2 *von einem Punkte* P' *ihrer Geraden verbindet, ist eine Kurve zweiter Ordnung.*

V. Abschnitt.

Bestimmung der Kegelschnitte durch fünf Punkte.

§ 37. Das Pascalsche Sechseck und Brianchonsche Sechsseit.

1. Begriff des Pascalschen Sechsecks und Brianchonschen Sechsseits.

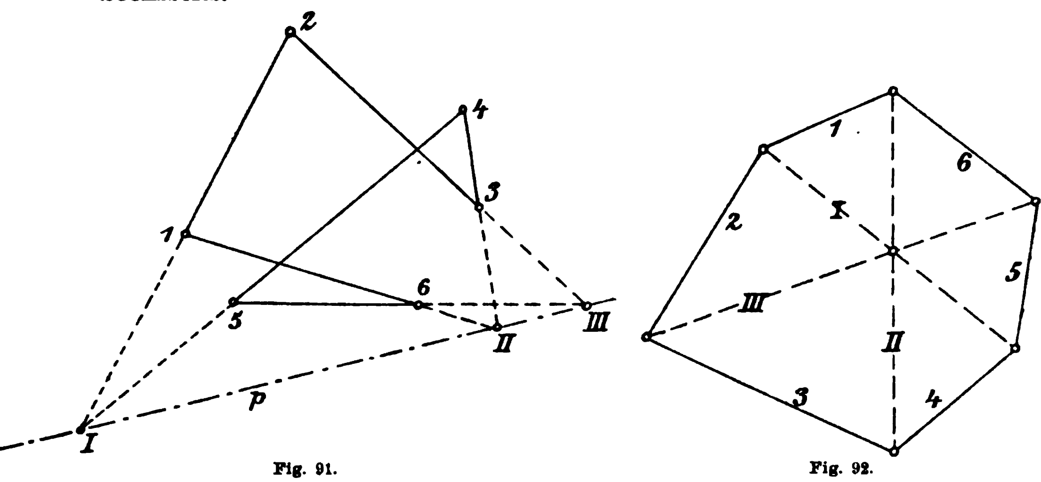


Fig. 91. Fig. 92.

Ein *Sechseck* mit den sechs Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 hat drei Paare von *Gegenseiten:*

$$(1)\quad \begin{cases} 12 \text{ und } 45 \\ 34 \text{ und } 61 \\ 56 \text{ und } 23. \end{cases}$$

Es heißt ein *Pascalsches* Sechseck, wenn die drei Schnittpunkte:

$$(2)\quad \begin{cases} 12 \times 45 = \mathrm{I} \\ 34 \times 61 = \mathrm{II} \\ 56 \times 23 = \mathrm{III} \end{cases}$$

je zweier Gegenseiten auf einer Geraden (der Pascalschen Geraden) liegen (Fig. 91).

Ein *Sechsseit* mit den sechs Seiten 1, 2, 3, 4, 5, 6 hat drei Paare von *Gegenecken:*

$$(1')\quad \begin{cases} 1 \times 2 \text{ und } 4 \times 5 \\ 3 \times 4 \text{ und } 6 \times 1 \\ 5 \times 6 \text{ und } 2 \times 3\,. \end{cases}$$

Es heißt ein *Brianchonsches* Sechsseit, wenn die drei Verbindungslinien:

$$(2')\quad \begin{cases} (1 \times 2)(4 \times 5) = \mathrm{I} \\ (3 \times 4)(6 \times 1) = \mathrm{II} \\ (5 \times 6)(2 \times 3) = \mathrm{III} \end{cases}$$

je zweier Gegenecken durch einen Punkt (den Brianchonschen Punkt) gehen (Fig. 92).

2. Konstruktion des Pascalschen Sechsecks aus fünf Ecken. Um ein Pascalsches Sechseck zu konstruieren, nimmt man fünf Ecken 1, 2, 3, 4, 5 (Fig. 91 und dual Fig. 92) beliebig an. Damit sind auch die vier Seiten 12, 45, 34, 23 und der Punkt $I = 12 \times 45$ gegeben. Nun legt man durch I eine *beliebige* Gerade p und bestimmt auf ihr die Punkte $II = 34 \times p$ und $III = 23 \times p$. Dann ist $6 = II\,1 \times III\,5$ die fehlende Ecke.

Da die Gerade p durch I beliebig ist, bleibt die sechste Ecke noch einfach unbestimmt.

Zu fünf gegebenen Punkten kann man ∞^1 sechste Punkte konstruieren, die mit jenen ein Pascalsches Sechseck bilden.

Zu fünf gegebenen Geraden kann man ∞^1 sechste Gerade konstruieren, die mit jenen ein Brianchonsches Sechsseit bilden.

3. Ableitung einer Identität. Mit drei Koeffizienten A, B, C und sechs Parametern λ_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ bilden wir die Ausdrücke:

$$(3)\begin{cases} U_1 = A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1\lambda_2, & U_1' = A + B(\lambda_4 + \lambda_5) + C\lambda_4\lambda_5, \\ U_2 = A + B(\lambda_3 + \lambda_4) + C\lambda_3\lambda_4, & U_2' = A + B(\lambda_6 + \lambda_1) + C\lambda_6\lambda_1, \\ U_3 = A + B(\lambda_5 + \lambda_6) + C\lambda_5\lambda_6, & U_3' = A + B(\lambda_2 + \lambda_3) + C\lambda_2\lambda_3 \end{cases}$$

und setzen ferner:

$$(4)\begin{cases} \varrho_1 = (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6), & \varrho_1' = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2), \\ \varrho_2 = (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2), & \varrho_2' = (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_4), \\ \varrho_3 = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4), & \varrho_3' = (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_6). \end{cases}$$

Alsdann ergibt sich:

$$(5)\quad \begin{aligned} \varrho_1 U_1 - \varrho_1' U_1' = A\{(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6) - (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2)\} \\ + B\{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6) - (\lambda_4 + \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2)\} \\ + C\{\lambda_1\lambda_2(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6) - \lambda_4\lambda_5(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_2)\} = U, \end{aligned}$$

wo:

$$(6)\quad U = AL + BM + CN,$$

und:

$$(7)\begin{cases} L = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_5\lambda_6) - (\lambda_4\lambda_5 + \lambda_6\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3), \\ M = \lambda_1\lambda_2(\lambda_4 + \lambda_5) + \lambda_3\lambda_4(\lambda_6 + \lambda_1) + \lambda_5\lambda_6(\lambda_2 + \lambda_3) \\ \quad - \lambda_4\lambda_5(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_6\lambda_1(\lambda_3 + \lambda_4) - \lambda_2\lambda_3(\lambda_5 + \lambda_6), \\ N = \lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 - \lambda_6\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 - \lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_1. \end{cases}$$

Die Ausdrücke L, M, N und damit U haben nun die Eigenschaft ungeändert zu bleiben, wenn man die Parameter λ_i zweimal zyklisch vertauscht, weil dadurch:

$$\lambda_1\lambda_2 \text{ in } \lambda_3\lambda_4, \quad \lambda_3\lambda_4 \text{ in } \lambda_5\lambda_6, \quad \lambda_5\lambda_6 \text{ in } \lambda_1\lambda_2,$$
$$\lambda_4\lambda_5 \text{ in } \lambda_6\lambda_1, \quad \lambda_6\lambda_1 \text{ in } \lambda_2\lambda_3, \quad \lambda_2\lambda_3 \text{ in } \lambda_4\lambda_5, \ldots$$

übergeht. Dagegen vertauschen sich dabei die Ausdrücke U_1, U_2, U_3 und U_1', U_2', U_3' sowie ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3' je zyklisch untereinander.

Zwischen den Ausdrücken (3), (4) *und* (6) *bestehen daher ohne Rücksicht auf die Bedeutung der* A, B, C *und der* λ_i *die identischen Gleichungen:*

$$(8)\qquad \begin{cases} \varrho_1 U_1 - \varrho_1' U_1' = U, \\ \varrho_2 U_2 - \varrho_2' U_2' = U, \\ \varrho_3 U_3 - \varrho_3' U_3' = U. \end{cases}$$

4. Das einem Kegelschnitt einbeschriebene Sechseck. Versteht man nun unter A, B, C die Ausdrücke:

$$(9)\qquad A = \frac{x}{a} - 1, \qquad B = \frac{y}{b}, \qquad C = -\left(\frac{x}{a} + 1\right)$$

oder:

$$(9')\qquad A = 2px, \qquad B = -y, \qquad C = 1,$$

so sind nach § 6, (15), (15'):

$$(10)\qquad U_1 = 0,\ U_1' = 0; \quad U_2 = 0,\ U_2' = 0; \quad U_3 = 0,\ U_3' = 0$$

die Gleichungen der Seiten:

(11) 12, 45; 34, 61; 56, 23

eines Sechsecks, dessen Eckpunkte auf der Ellipse, Hyperbel oder Parabel liegen und im Sinne von § 6, (10); (12); (14) die Parameter λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6 haben.

Die Identitäten (8) aber sagen (I § 24, (6)) aus, daß die drei Schnittpunkte der Seitenpaare (10) alle drei auf der Geraden:

$$(12)\qquad U = 0$$

liegen. Das duale Resultat folgt ebenso auf Grund von § 13, (51); (52), also:[106])

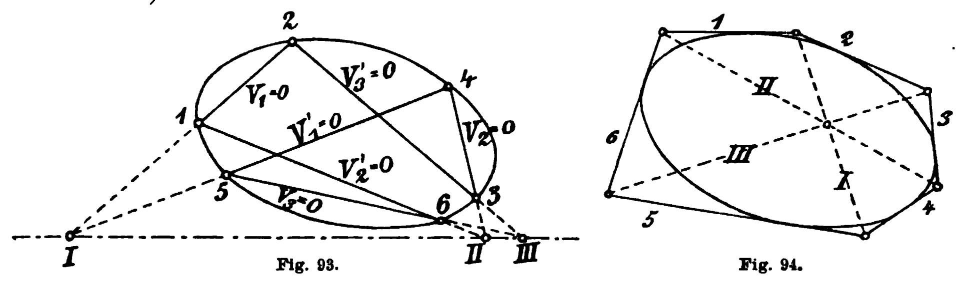


Fig. 93. Fig. 94.

Jedes einem (eigentlichen) Kegelschnitt einbeschriebene Sechseck ist ein Pascalsches (Fig. 93).

Jedes einem (eigentlichen) Kegelschnitt umbeschriebene Sechsseit ist ein Brianchonsches (Fig. 94).

5. Die analytischen Bedingungen des Pascalschen Sechsecks. Hat man in (10) die Gleichungen der Seiten (11) *irgendeines Pascalschen Sechseckes* in laufenden Koordinaten x, y und ist (12) die Gleichung der zugehörigen Pascalschen Linie, so liegt die Eigenschaft des Pascalschen Sechseckes in den Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} \mu_1 U_1 + \mu_1' U_1' + \mu U = 0, \\ \mu_2 U_2 + \mu_2' U_2' + \mu U = 0, \\ \mu_3 U_3 + \mu_3' U_3' + \mu U = 0 \end{cases}$$

ausgesprochen (I § 24, (6)). Setzt man zur Vereinfachung:

$$\mu_i U_i = V_i, \quad \mu_i' U_i' = V_i', \quad \mu U = -V,$$

so lauten die Gleichungen der Geraden (10) und (12):

$$(14) \quad V_1 = 0, \ V_1' = 0; \quad V_2 = 0, \ V_2' = 0; \quad V_3 = 0, \ V_3' = 0; \quad V = 0$$

und die Bedingungen (13):

$$(15) \qquad V_1 + V_1' = V, \quad V_2 + V_2' = V, \quad V_3 + V_3' = V.$$

6. Kegelschnitt durch die sechs Ecken. Die Gleichung:

$$(16) \qquad V^2 - (V_1 + V_2 + V_3) V + (V_2 V_3 + V_3 V_1 + V_1 V_2) = 0$$

stellt als Gleichung zweiten Grades in x, y einen Kegelschnitt dar. Sie kann in der Form:

$$V_1 (V_2 + V_3 - V) + (V - V_2)(V - V_3) = 0$$

geschrieben werden oder nach (15) und mit zyklischer Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 in jeder der drei Formen:

$$(17) \qquad \begin{cases} V_1 (V_2 + V_3 - V) + V_2' V_3' = 0, \\ V_2 (V_3 + V_1 - V) + V_3' V_1' = 0, \\ V_3 (V_1 + V_2 - V) + V_1' V_2' = 0. \end{cases}$$

Der ersten Gleichung (17) genügt der Eckpunkt 1 als Schnittpunkt der Seiten $V_1 = 0$ und $V_2' = 0$ (Fig. 93) und der Eckpunkt 2 als Schnittpunkt der Seiten $V_1 = 0$ und $V_3' = 0$. Ebenso genügen der zweiten Gleichung (17) die Punkte 3 und 4, der dritten die Punkte 5 und 6, alle sechs Punkte also auch der Gleichung (16).

Da aber nach § 9, 9 schon fünf Punkte den Kegelschnitt bestimmen, so folgt unter Hinzufügung des dualen Satzes:

Die sechs Ecken eines Pascalschen Sechsecks liegen stets auf dem durch fünf von ihnen bestimmten Kegelschnitt.

Die sechs Seiten eines Brianchonschen Sechsseits berühren stets den durch fünf von ihnen bestimmten Kegelschnitt.

7. Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf Punkten oder Tangenten. Da man nach 2 zu fünf Punkten durch Veränderung

der dort durch den Punkt I gelegten Geraden p in $p', p'', p''', \ldots$ (Fig. 95) beliebig viele sechste Punkte 6, 6′, 6″, 6‴, . . . konstruieren kann, die mit jenen ein Pascalsches Seckseck bilden, so ergibt sich jetzt aus **6**:

Der durch fünf gegebene Punkte bestimmte Kegelschnitt ist der Ort des Punktes, der mit ihnen ein Pascalsches Sechseck bildet.

Der durch fünf gegebene Gerade bestimmte Kegelschnitt ist der Ort der Geraden, die mit ihnen ein Brianchonsches Sechsseit bildet.

Man kann daher nach **2** beliebig viele Punkte des Kegelschnittes mit dem Lineal konstruieren.[107])

Vorausgesetzt wird, daß nicht drei von den gegebenen Punkten in gerader Linie liegen, da sie dann einem eigentlichen Kegelschnitt nicht angehören können (§ 9, 8).

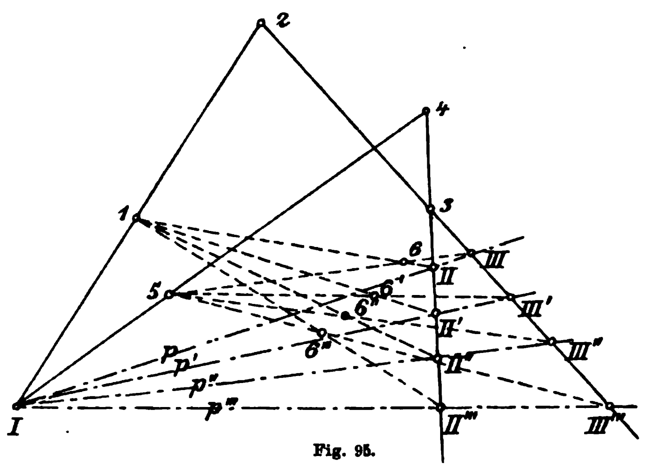


Fig. 95.

8. Das einbeschriebene Fünfeck. Fallen die beiden Ecken 6 und 1 eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks zusammen, so wird die Seite 6 1 die Tangente in der Ecke 1. Der Satz **4** gibt daher[108]):

In jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Fünfeck 1 2 3 4 5 liegen die Schnittpunkte von zwei Paaren nicht benachbarter Seiten:

$12 \times 45 = \mathrm{I}$ und $56 \times 23 = \mathrm{III}$

in einer Geraden mit dem Punkte II, in dem die fünfte Seite 3 4 und die Tangente 6 1 (vgl. (2)) des gegenüberliegenden Eckpunktes sich schneiden (Fig. 96).

Fig. 96.

9. Das einbeschriebene Viereck. Fallen die Ecken 6 und 1 sowie 3 und 4 zusammen, so werden die Seiten 1 6 und 3 4 Tangenten und folgt:

In jedem einem Kegelschnitt einbeschriebenen Viereck 1 2 4 5 *liegen die Schnittpunkte zweier Paare von Gegenseiten:*

$$12 \times 45 = \mathrm{I}$$

und

$$56 \times 23 = \mathrm{III}$$

mit dem Schnittpunkte II *der Tangenten der gegenüberliegenden Ecken* 1 *und* 4 *in einer Geraden* (Fig. 97).

In jedem einem Kegelschnitt umbeschriebenen Vierseit 1 2 4 5 *schneiden sich die Verbindungslinien zweier Paare von Gegenecken:*

$$(1 \times 2)(4 \times 5) = \mathrm{I}$$

und

$$(5 \times 6)(2 \times 3) = \mathrm{III}$$

und die Verbindungslinie der Berührungspunkte zweier gegenüberliegender Seiten 1 *und* 4 *in einem Punkte* (Fig. 98).

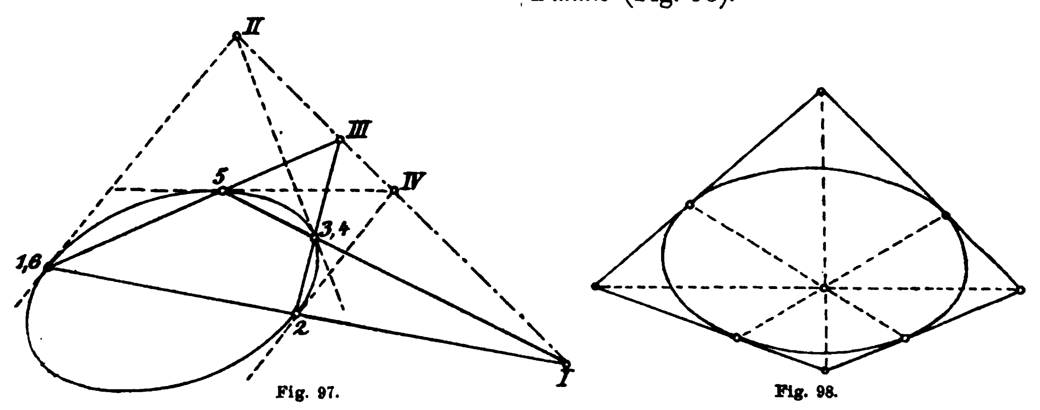


Fig. 97. Fig. 98.

Aus der Gleichberechtigung folgt dies auch für die Tangenten in den Ecken 2 und 5 mit dem Schnittpunkt IV.

10. Das einbeschriebene Dreieck. Fallen endlich 2 und 3, 4 und 5, 6 und 1 zusammen, so erhält man den Satz:

Die drei Punkte, in denen die Seiten eines einem Kegelschnitt einbeschriebenen Dreiecks 1 3 5 *von den Tangenten der gegenüberliegenden Ecken geschnitten werden, liegen auf einer Geraden* (Fig. 99).

Die drei Geraden, die die Eckpunkte eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Dreiecks 1 3 5 *mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte* (Fig. 100).

§ 38. Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Gebilde.

1. Projektive Gebilde an einem gegebenen Kegelschnitt. In § 6, 8 und § 13, 18 wurden für die drei Kegelschnitte Ellipse, Hyperbel und Parabel die dualen Sätze abgeleitet:

Verbindet man zwei feste Punkte der Kurve mit dem laufenden Punkte der Kurve, so erhält man zwei projektive Strahlbüschel (Fig. 35).

Schneidet man zwei feste Tangenten der Kurve mit der laufenden Tangente, so erhält man zwei projektive Punktreihen.

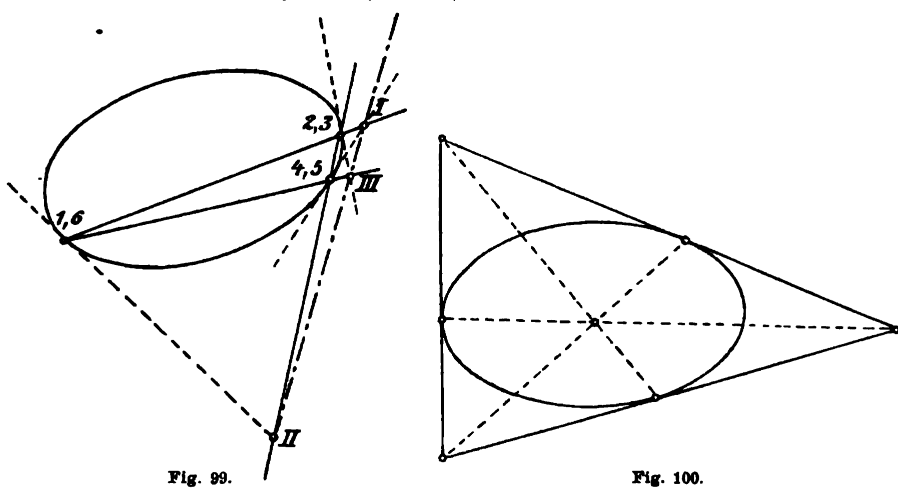


Fig. 99. Fig. 100.

Beim Kreis waren die Büschel kongruent (§ 6, **9**), bei der Parabel die Punktreihen ähnlich (§ 13, **19**).

2. Erzeugnisse gegebener projektiver Gebilde. Sind mit $i = 1, 2$:

$$(1) \begin{cases} X_i = a_i x + b_i y + c_i t = 0, \\ X_i' = a_i' x + b_i' y + c_i' t = 0 \end{cases} \qquad (1') \begin{cases} U_i = a_i u + b_i v + c_i s = 0, \\ U_i' = a_i' u + b_i' v + c_i' s = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen von zweimal zwei Geraden, bezüglich Punkten, so stellen die beiden Gleichungen:

$$(2) \quad X_1 - \mu X_2 = 0, \quad X_1' - \mu X_2' = 0 \qquad (2') \quad U_1 - \mu U_2 = 0, \quad U_1' - \mu U_2' = 0$$

zwei *projektive Strahlbüschel*, bezüglich *Punktreihen* dar (I § 66, (10); (11)). Zwei zu demselben Werte μ gehörige Strahlen, bezüglich Punkte, sind *entsprechende* Elemente der beiden Grundgebilde (2), bezüglich (2').

Der Schnittpunkt zweier entsprechender Strahlen genügt beiden Gleichungen (2). Für den Ort dieser Schnittpunkte ergibt sich durch Elimination von μ die Gleichung:

$$(3) \quad X_1 X_2' - X_2 X_1' = 0, \qquad (3') \quad U_1 U_2' - U_2 U_1' = 0,$$

die in x, y, t, bezüglich u, v, s, vom zweiten Grade ist (§ 9, (3); § 15, (1)). Die Büschelzentren $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ und $X_1' = 0$, $X_2' = 0$ genügen der Gleichung (3). Also[109]):

Der Ort der Schnittpunkte A, B, C, D, P (Fig. 101) entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel:

$$S(abcdp) \text{ und } S'(a'b'c'd'p')$$

ist eine Kurve zweiter Ordnung, die durch die Büschelzentren S und S' geht.

Der Ort der Verbindungslinien a, b, c, d, p (Fig. 102) entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen:

$$s(ABCDP) \text{ und } s'(A'B'C'D'P')$$

ist eine Kurve zweiter Klasse, welche die Punktreihen s und s' berührt.

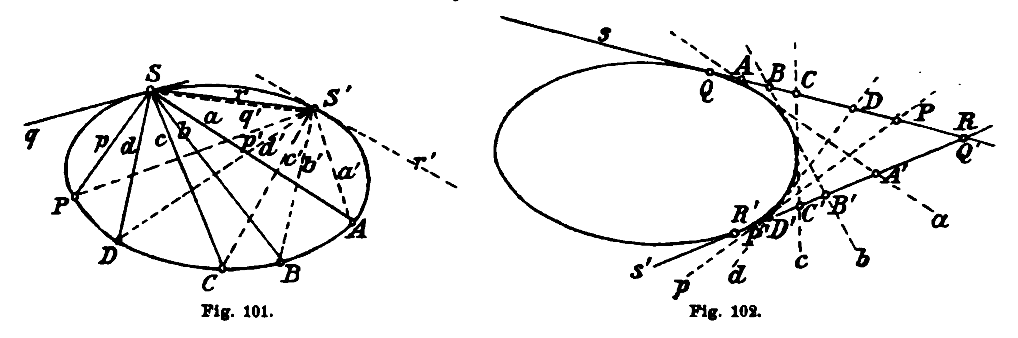


Fig. 101. Fig. 102.

3. Zerfall der Kurve bei perspektiver Lage. Bei der Darstellung (2) entsprechen sich die Grundstrahlen $X_1 = 0$ und $X_1' = 0$ ($\mu = 0$), sowie $X_2 = 0$ und $X_2' = 0$ ($\mu = \infty$). Andererseits können irgend zwei Paare entsprechender Strahlen als Grundstrahlen innerhalb jedes Büschels eingeführt werden (I § 9, 6). Wenn nun der besondere Fall eintritt, daß der gemeinsame Strahl beider Büschel, der die beiden Scheitel S und S' verbindet (Fig. 103), sich als $q = q'$ selbst entspricht, so kann man ihn in beiden Büscheln als Grundstrahl $\mu = 0$ wählen, also $X_1 = X_1'$ nehmen. Die Gleichung (3) wird dann:

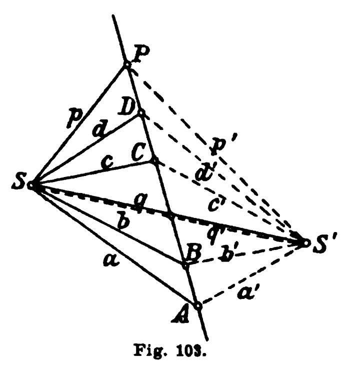


Fig. 103.

$$(4) \qquad X_1(X_2' - X_2) = 0;$$

die Kurve zweiter Ordnung zerfällt in zwei Gerade. Die eine von diesen SS' enthält die ∞^1 gemeinsamen Punkte der entsprechenden Strahlen q und q' ($\mu = 0$) beider Büschel, die andere ist der Ort der Schnittpunkte A, B, C, D, P der übrigen Paare entsprechender Strahlen. Die Büschel $abcdp$ und $a'b'c'd'p'$ liegen daher perspektiv (I § 5, 8).

Haben zwei projektive Strahlbüschel (oder Punktreihen) einen Strahl (oder Punkt) entsprechend gemein, so liegen sie perspektiv.

4. Erzeugung eines jeden Kegelschnittes durch projektive Büschel. Sei gegenwärtig (Fig. 101) ein Kegelschnitt gegeben und

auf ihm fünf Punkte S, S', A, B, C beliebig gewählt. Man nehme nun S und S' als Scheitel zweier Strahlbüschel, deren projektive Beziehung man durch Zuordnung der drei Strahlenpaare: $a = SA$ und $a' = S'A$, $b = SB$ und $b' = S'B$, $c = SC$ und $c' = S'C$ bestimmt (I § 65, 3). Diese Strahlbüschel erzeugen nach 2 einen Kegelschnitt, der nach 2 durch die Scheitel S und S', sowie ferner durch die Punkte A, B, C als Schnittpunkte entsprechender Strahlen a und a', b und b', c und c' geht, der sonach mit dem gegebenen zusammenfällt (§ 9, 9). Es folgt also, wie schon aus 1 hervorgeht:

Jeder Kegelschnitt kann als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel erzeugt werden, deren Scheitel zwei beliebige Punkte des Kegelschnittes selbst sind; und dual.

5. Besondere Lage der erzeugenden Strahlen. Fällt der Schnittpunkt P zweier entsprechender Strahlen p und p' in den Scheitel S (Fig. 101), so fällt der Strahl p in die Tangente q des Punktes S und p' in die Verbindungslinie q' der Scheitel S und S'; fällt P in S', so kommt p' in die Tangente r' von S' und p in $r = S'S$ zu liegen.

In der dualen Figur 102 entsprechen dem Schnittpunkt $Q' = R$ der beiden Träger s und s' die Berührungspunkte Q und R' der Träger s und s'.

Nimmt man die Tangente q und die Verbindungslinie $r = SS'$ (Fig. 101) als Grundstrahlen des einen, $q' = S'S$ und die Tangente r' als Grundstrahlen des andern Büschels, so daß in (2) $X_1' = X_2$ wird, so ergibt sich die Gleichung (3) in der Form:

$$X_1 X_2' - X_2^2 = 0$$

oder mit X_3 für X_2':

Für den von den beiden Strahlbüscheln:	*Für den von den beiden Punktreihen:*
$X_1 - \mu X_2 = 0,\quad X_2 - \mu X_3 = 0$	$U_1 - \mu U_2 = 0,\quad U_2 - \mu U_3 = 0$
erzeugten Kegelschnitt:	*erzeugten Kegelschnitt:*
(5) $\quad X_1 X_3 - X_2^2 = 0$	(5') $\quad U_1 U_3 - U_2^2 = 0$
sind $X_1 = 0$ *und* $X_3 = 0$ *zwei Tangenten und* $X_2 = 0$ *die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte.*	*sind* $U_1 = 0$ *und* $U_3 = 0$ *zwei Berührungspunkte und* $U_2 = 0$ *der Schnittpunkt ihrer Tangenten.*

6. Ähnliche Punktreihen. Der laufende Punkt $P = x, y$ der geraden Linie, die durch den Punkt $P_0 = x_0, y_0$ in der Richtung α, β hindurchgeht, hat (I § 16, (2)) die Koordinaten:

$$(6) \qquad x = x_0 + \alpha\lambda, \quad y = y_0 + \beta\lambda,$$

wo der Parameter λ die relative Entfernung:

$$(7) \qquad \lambda = P_0 P$$

bedeutet. Die Gleichung des Punktes P ist daher (I § 19, (9')):

$$(8) \qquad (x_0 u + y_0 v + 1) + \lambda(\alpha u + \beta v) = 0.$$

Die allgemeinere Gleichung:

$$(9) \qquad (a_1 u + b_1 v + c_1) - \mu(a_2 u + b_2 v) = 0$$

kann auf die Form (8) gebracht werden, indem sie durch c_1 dividiert und so geschrieben wird (I § 11, (14)):

$$(10) \qquad \frac{a_1 u + b_1 v + c_1}{c_1} - \mu \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{c_1} \frac{a_2 u + b_2 v}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = 0,$$

wo nun:

$$(11) \qquad -\mu \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{c_1} = \lambda.$$

Sind daher:

$$(12) \qquad U_1 = a_1 u + b_1 v + c_1 = 0, \quad U_2 = a_2 u + b_2 v = 0$$

ein endlicher und ein unendlich ferner Punkt (I § 22, (10)), *so ist die Gleichung der durch beide bestimmten Punktreihe:*

$$(13) \qquad U_1 - \mu U_2 = 0,$$

wo:

$$(14) \qquad \mu = -\frac{c_1 \lambda}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

und λ die relative Entfernung des laufenden Punktes μ der Reihe vom Punkte $U_1 = 0$ bedeutet, positiv gerechnet in der Richtung:

$$(15) \qquad \alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \quad \beta = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Alsdann stellen, wenn neben (12):

$$(16) \qquad U_1' = a_1' u + b_1' v + c_1', \quad U_2' = a_2' u + b_2' v$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen (2') *zwei projektiv ähnliche Punktreihen* P und P' dar. Denn die Entfernungen $\lambda = P_0 P$ und $\lambda' = P_0' P'$ zweier demselben μ entsprechenden Punkte P und P' von den beiderseitigen Grundpunkten $U_1 = 0$ und $U_1' = 0$ stehen nach (14) in dem konstanten Verhältnis:

$$(17) \qquad c_1' \sqrt{a_2^2 + b_2^2} : c_1 \sqrt{a_2'^2 + b_2'^2}.$$

Die Gleichung (3') wird dann wegen der Bedeutung (12) und (16) von U_2 und U_2' durch die Werte $u = 0$, $v = 0$ erfüllt, so daß die unendlich ferne Gerade eine Tangente der Kurve (3') wird (§ 30, (2)).

Der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiv ähnlicher Punktreihen ist eine Parabel (Fig. 104).

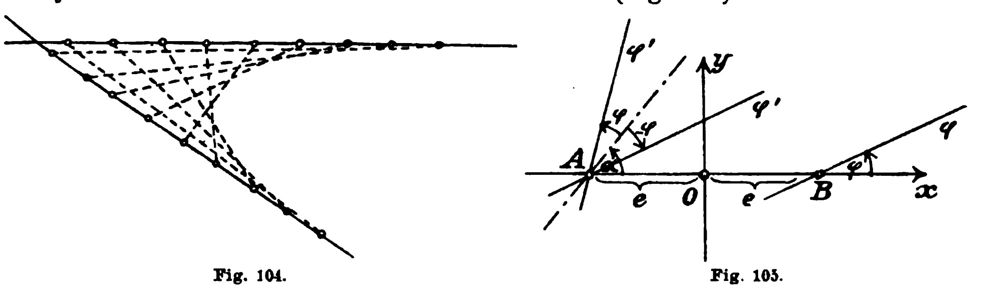


Fig. 104. Fig. 105.

7. Kongruente Strahlbüschel. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte A und B zweier Strahlbüschel (Fig. 105) sei als x-Achse, der Mittelpunkt O der Strecke $AB = 2e$ als Anfangspunkt des rechtwinkligen Systems Oxy genommen. Die x-Achse sei zugleich Anfangsstrahl für die Koordinaten φ, φ' in den beiden Büscheln (I § 2, (10)).

Die Strahlbüschel sind *projektiv kongruent*, wenn sich die Strahlen φ und $\varphi' = \alpha + \varepsilon\varphi$ entsprechen, wo α ein fester Winkel und $\varepsilon = +1$ für *gleichlaufende* und $\varepsilon = -1$ für *ungleichlaufende* Büschel ist.[110])

Die Gleichungen entsprechender Strahlen sind dann:

$$(18)\qquad (x - e)\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

$$(19)\qquad (x + e)\sin(\alpha + \varepsilon\varphi) - y\cos(\alpha + \varepsilon\varphi) = 0$$

oder, wenn man die Gleichung (19) entwickelt:

$$(20)\qquad \varepsilon\{(x + e)\cos\alpha + y\sin\alpha\}\sin\varphi + \{(x + e)\sin\alpha - y\cos\alpha\}\cos\varphi = 0.$$

Durch Elimination von φ folgt aus (18) und (20) für den *Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen:*

$$(x - e)\{(x + e)\sin\alpha - y\cos\alpha\} + \varepsilon y\{(x + e)\cos\alpha + y\sin\alpha\} = 0$$

oder:

$$(21)\qquad x^2 + \varepsilon y^2 - (1 - \varepsilon)\operatorname{ctg}\alpha \cdot xy + (1 + \varepsilon)e\operatorname{ctg}\alpha \cdot y - e^2 = 0.$$

8. Gleichlaufend kongruente Büschel. Mit $\varepsilon = 1$ wird die Gleichung (21):

$$(22)\qquad x^2 + y^2 + 2e\operatorname{ctg}\alpha \cdot y - e^2 = 0.$$

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier gleichlaufend kongruenter Strahlbüschel ist ein Kreis (Fig. 106) (vgl. § 6, 9).

Der Mittelpunkt und das Quadrat des Radius sind:

$$(23)\qquad x_0 = 0,\ y_0 = -e\operatorname{ctg}\alpha;\quad r^2 = e^2 : \sin^2\alpha.$$

Dem Werte $\varphi = 0$ entsprechen nach (18) und (19) die Strahlen:

(24) $$y = 0, \quad (x + e) \sin \alpha - y \cos \alpha = 0;$$

der letztere ist die Tangente des Kreises in A (§ 10, (18)).

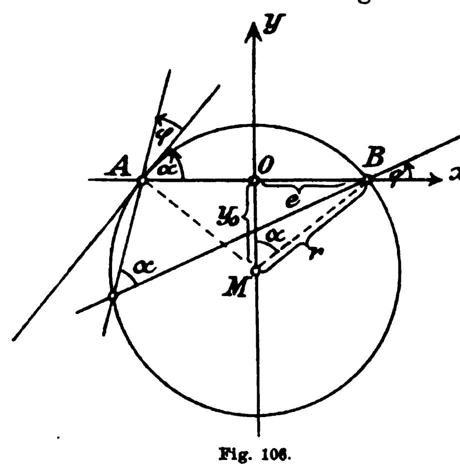


Fig. 106.

9. Ungleichlaufend kongruente Büschel. Mit $\varepsilon = -1$ wird die Gleichung (21):

(25) $$x^2 - y^2 - 2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot xy - e^2 = 0.$$

Für diese Kurve ist:

(26) $$A = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{ctg}\alpha & 0 \\ -\operatorname{ctg}\alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^2 \end{vmatrix} = \frac{e^2}{\sin^2 \alpha}, \quad A_{33} = -\frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad A'_{33} = 0;$$

sie ist also nach § 26, (26) eine gleichseitige Hyperbel.

Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier ungleichlaufender kongruenter Strahlbüschel ist eine gleichseitige Hyperbel (Fig. 107).

Die entsprechenden Strahlen (18) und (19) mit $\varepsilon = -1$ werden parallel für:

$$\sin \varphi : -\cos \varphi = \sin (\alpha - \varphi) : -\cos (\alpha - \varphi)$$

oder:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha - \varphi); \ \varphi = \alpha - \varphi \ \text{oder} \ \varphi = \alpha - \varphi + \pi; \ \varphi = \frac{\alpha}{2} \ \text{oder} \ \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

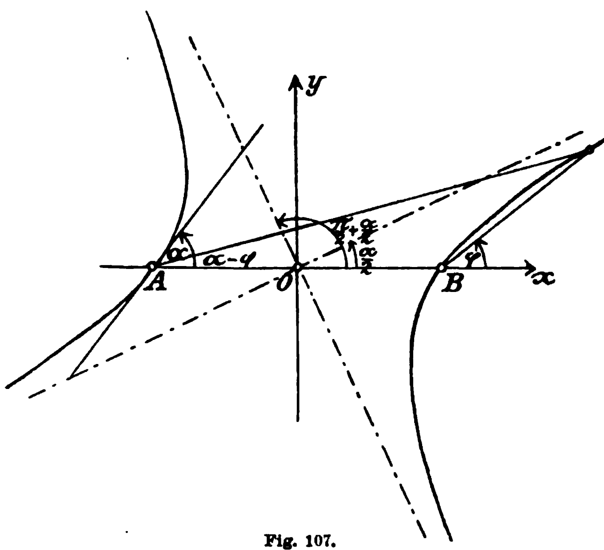


Fig. 107.

Diesen beiden Werten von φ entsprechen also die unendlich fernen Punkte der Kurve oder die Richtungen der *Asymptoten* (Fig. 107). Die *Hauptachsen* der Hyperbel ergeben sich daher für $\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}$ und

$$\varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}.$$

Der Anfangspunkt O ist der *Mittelpunkt* der Hyperbel.

10. Die Dreiteilung des Winkels. Drückt man die Bedingung $3\varphi = \alpha$ für die Dreiteilung eines Winkels α in den Koordinaten $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\alpha$ im Strahlbüschel aus, so erhält man:

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{1 + 2 \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3 \operatorname{tg}^2\varphi} = \operatorname{tg}\alpha$$

oder:

$$\operatorname{tg}^3\varphi - 3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}^2\varphi - 2 \operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha - 1 = 0. \tag{27}$$

Das Problem der Dreiteilung des Winkels führt also auf eine kubische Gleichung.[111])

Sei nun AOB (Fig. 108) der gegebene Winkel α und AB der entsprechende Bogen auf dem um O beschriebenen Einheitskreis. Man trage den *willkürlichen* Winkel $\varphi = AN$ von A gegen B hin und alsdann den Winkel $2\varphi = BN'$ von B gegen A hin ab. Dann steht über dem Bogen BN' der Peripheriewinkel $BB'N' = \varphi$, und ist der Winkel der Tangente des Kreises in B ebenfalls $QBN' = \varphi$.

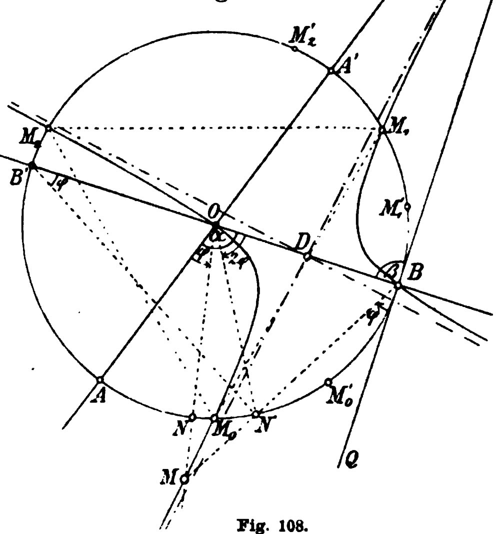


Fig. 108.

Nimmt man daher wechselnde Werte von φ, so erhält man zwei *ungleichlaufende kongruente Strahlbüschel* ON und BN', deren entsprechende Strahlen gleiche, aber entgegengesetzte Winkel φ mit OA und BQ bilden.

Der Ort der Schnittpunkte $M = ON \times BN'$ entsprechender Strahlen ist nach 9 eine *gleichseitige Hyperbel*, die durch O und B geht und ihren *Mittelpunkt* D in der Mitte von OB hat.

Schneidet sie den Kreis in M_0, so ist $AOM_0 = QBM_0 = \varphi_0$, $M_0OB = 2\varphi_0$. Der Schnittpunkt M_0 bewirkt also die Dreiteilung des Bogens AB. Es gibt aber außer B selbst drei Schnittpunkte M_0, M_1, M_2 des Kreises und der Hyperbel und ist (Fig. 108):

$$M_0B = M_0M_0' + M_0'B = 2\cdot AM_0;\; BM_1 = BM_1' + M_1'M_1 = 2\cdot M_1A';$$
$$M_2B = M_2M_2' + M_2'B = 2\cdot AM_2. \tag{28}$$

Die drei Lösungen des Problems der Dreiteilung des Winkels entsprechen den drei neben B sich ergebenden Schnittpunkten des Kreises mit der Hyperbel.

Bildet die Tangente des Kreises in B mit dem Schenkel OB des Winkels α den Winkel β und schneidet sie den Schenkel OA in C, so hat das Dreieck OBC die Winkel $\pi - \alpha$, β, $\gamma = \alpha - \beta$. Die Strahlen OM und BM werden parallel, wenn:

$$\alpha - \varphi = \beta + \varphi; \; \varphi = \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\gamma}{2}.$$

Man erhält daher eine Asymptote der Hyperbel, indem man durch D eine Parallele zu dem von OA verschiedenen Schenkel des Winkels $\varphi = \frac{\alpha - \beta}{2}$ zieht. Die andere Asymptote ist senkrecht zur ersten.

11. Pascalsches Sechseck und projektive Erzeugung. Bei der Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf gegebenen Punkten mittels des Pascalschen Sechsecks (§ 37, 7) werden durch das Strahlbüschel $\mathrm{I}(p, p', p'', p''', \ldots)$ auf den Seiten 34 und 23 perspektive Punktreihen II, II′, II″, II‴, ... und III, III′, III″, III‴, ... (Fig. 95) ausgeschnitten (I § 5, 8). Da nun die Strahlbüschel 1(II, II′, II″, II‴, ...) und 5(III, III′, III″, III‴, ...) zu perspektiven Punktreihen perspektiv liegen, sind sie projektiv (I § 65, 1), erzeugen also nach 2 in den Schnittpunkten 6, 6′, 6″, 6‴, ... entsprechender Strahlen einen Kegelschnitt.

Die Konstruktion des Pascalschen Sechsecks kommt also auf die projektive Erzeugung der Kegelschnitte zurück.[112])

VI. Abschnitt.

Kegelschnitte in Dreieckskoordinaten.

I. Kapitel.

Punktepaare in Zweieckskoordinaten.

§ 39. Gleichung des Punktepaares in Zweieckskoordinaten.

1. Allgemeine Form der Gleichung. In bezug auf ein Koordinatenzweieck $E_1 E_2$ ist die *allgemeine Gleichung eines Punktepaares* (§ 7, (1)) *in Zweieckskoordinaten* x_1, x_2 (I § 7, **6**):

$$(1)\quad f = f(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 = \sum_1^2{}^k \sum_1^2{}^l a_{kl} x_k x_l.$$

Die linke Seite der Gleichung, für die:

$$(2)\qquad a_{12} = a_{21}$$

sein soll, ist eine *quadratische Form* der beiden Koordinaten.

Entsprechend ist:

$$(1')\qquad F(u_1, u_2) = e_{11} u_1^2 + 2 e_{12} u_1 u_2 + e_{22} u_2^2 = 0$$

die Gleichung des *Strahlenpaares* oder *Ebenenpaares* in Zweiseits- (I § 7, **6**) oder Zweiflachskoordinaten (I § 56, **1**).

2. Die partiellen Ableitungen der Form. Wir bezeichnen die *halben partiellen Differentialquotienten* von f mit:

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1 = f_1(x_1, x_2) = a_{11} x_1 + a_{12} x_2, \\ f_2 = f_2(x_1, x_2) = a_{21} x_1 + a_{22} x_2. \end{cases}$$

Alsdann gilt die *Identität:*

$$(4)\qquad f_1 x_1 + f_2 x_2 = f.$$

Ist die Ableitung f_k $(k = 1, 2)$ für einen *bestimmten* Punkt $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}$ gebildet, so gebrauchen wir die Bezeichnungen:

$$(5)\qquad f_k^{(n)} = f_k(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) = \sum_1^2{}^l a_{kl} x_l^{(n)}.$$

3. Die bilinearen Formen. In bezug auf zwei bestimmte Punkte $x_k^{(m)}$ und $x_k^{(n)}$ setzen wir zur Abkürzung:

$$(6)\quad f_{mn} = f_{nm} = a_{11} x_1^{(m)} x_1^{(n)} + a_{12}(x_1^{(m)} x_2^{(n)} + x_2^{(m)} x_1^{(n)}) + a_{22} x_2^{(m)} x_2^{(n)}$$
$$= \sum_1^2{}^k f_k^{(n)} x_k^{(m)} = \sum_1^2{}^l f_l^{(m)} x_l^{(n)}.$$

Die bilineare Form geht mit $m = n$ wieder in die quadratische über:

$$(7)\qquad f_{mm} = f(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}).$$

4. Transformation der quadratischen Form. Zum Übergang von dem alten Koordinatenzweieck zu einem beliebigen neuen $J_1 J_2$, dessen Ecke J_m die Koordinaten $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}$ hat, dienen die Formeln (I § 8, (17)):

$$(8)\qquad x_k = \sum_1^2{}^m x_k^{(m)} y_m.$$

Durch die Substitution (8) wird aus der Form (1):

$$f = \sum{}^k \sum{}^l a_{kl} \sum{}^m x_k^{(m)} y_m \sum{}^n x_l^{(n)} y_n$$
$$= \sum{}^m \sum{}^n \left\{ \sum{}^k \sum{}^l a_{kl}\, x_k^{(m)} x_l^{(n)} \right\} y_m y_n,$$

also eine quadratische Form der neuen Koordinaten y_m:

$$(9)\qquad f = \sum_1^2{}^m \sum_1^2{}^n b_{mn}\, y_m y_n,$$

deren Koeffizienten nach (6) die Werte haben[113]):

$$(10)\qquad b_{mn} = f_{mn} = \sum_1^2{}^k \sum_1^2{}^l a_{kl}\, x_k^{(m)} x_l^{(n)}.$$

Sie sind *bilineare Formen der Koordinaten der beiden neuen Ecken* J_1, J_2, bezüglich nach (7) quadratische Formen der Koordinaten einer Ecke.

5. Invarianteneigenschaft der Determinante. Die Determinanten:

$$(11)\qquad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad S = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

werden als *Determinanten* bezüglich *der Form* (1), der Form (9) und der *Substitution* (8) bezeichnet. Die Determinante S ist stets von 0 verschieden.

Infolge von (6) und (5), also von:

$$b_{mn} = \sum_1^2{}^k x_k^{(m)} f_k^{(n)}, \quad f_k^{(n)} = \sum_1^2{}^l a_{kl}\, x_l^{(n)}$$

wird nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 1, (2)):

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix}$$

oder durch Verbindung beider Formeln:

$$B = S^2 A. \tag{12}$$

Die Determinante der transformierten Form ist das Produkt der Determinante der ursprünglichen Form und des Quadrats der Substitutionsdeterminante, oder:

Die Determinante der quadratischen Form ist *eine Invariante bei jeder Koordinatentransformation.*[90])

6. Darstellung der alten Koeffizienten durch die neuen. Die Auflösungen der Gleichungen (8) sind:

$$S y_m = \sum_1^2 {}^k u_k^{(m)} x_k, \tag{13}$$

falls mit:

$$u_1^{(1)} = x_2^{(2)}, \quad u_1^{(2)} = -x_2^{(1)}, \quad u_2^{(1)} = -x_1^{(2)}, \quad u_2^{(2)} = x_1^{(1)} \tag{14}$$

die Unterdeterminanten der Elemente $x_1^{(1)}$, $x_1^{(2)}$, $x_2^{(1)}$, $x_2^{(2)}$ der Determinante S in (11) bezeichnet werden. Setzt man die Werte (13) in (9) ein:

$$S^2 f = \sum^m \sum^n b_{mn} \sum^k u_k^{(m)} x_k \sum^l u_l^{(n)} x_l$$
$$= \sum^k \sum^l \left\{ \sum^m \sum^n b_{mn} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} x_k x_l,$$

so muß f wieder rückwärts in die ursprüngliche Form (1) übergehen. Die Gleichsetzung der Koeffizienten führt zu dem Satze:

Die Koeffizienten der ursprünglichen Form (1) *drücken sich durch die der transformierten Form mittels der Formeln aus:*

$$S^2 a_{kl} = \sum_1^2 {}^m \sum_1^2 {}^n b_{mn} u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \tag{15}$$

wo die $u_k^{(m)}$ die Werte (14) haben.

7. Begriff des Ranges. Infolge (12) verschwindet B immer dann und nur dann, wenn A verschwindet. Das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinante ist daher eine vom Koordinatenzweieck unabhängige Eigenschaft des Punktepaares (1), die als dessen *Rang* bezeichnet wird.

Das Punktepaar (1) *ist vom Range* 2, *wenn* $A \neq 0$, *vom Range* 1, *wenn* $A = 0$. Im letzteren Falle wird vorausgesetzt, daß die a_{kl} nicht alle verschwinden, was nach (10) und (15) ebenfalls eine invariante Eigenschaft darstellt (§ 21, **14**).

8. Eigentliche und uneigentliche Punktepaare. Die Koordinatenverhältnisse $x_1:x_2$ der beiden Punkte P_1 und P_2 des Punktepaares (1) bestimmen sich aus der in $x_1:x_2$ quadratischen Gleichung (1), deren Diskriminante A ist. Daher ergibt sich:

Das Punktepaar (1) *ist ein eigentliches oder getrenntes Punktepaar, wenn es den Rang* 2 *hat, also:*

(16) $$A \neq 0;$$

dagegen ein uneigentliches oder zusammenfallendes Punktepaar (ein Doppelpunkt), *wenn es den Rang* 1 *hat, also:*

(17) $$A = 0, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \textit{ nicht alle } 0.$$

Das Entsprechende gilt für *Strahlen-* und *Ebenenpaare.*

9. Andere Form der Bedingungen. Setzt man zur Abkürzung:

(18) $$A' = a_{11} + a_{22},$$

so ist:

(19) $$a_{11}A' = a_{11}^2 + a_{11}a_{22} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + A, \quad a_{22}A' = a_{21}^2 + a_{22}^2 + A.$$

Es besteht daher die identische Gleichung[80]):

(20) $$A'^2 = a_{11}^2 + 2a_{12}^2 + a_{22}^2 + 2A.$$

Bei reellen Koeffizienten a_{kl} verschwinden also mit A und A' stets auch a_{11}, a_{12}, a_{22}, während bei verschwindenden Elementen a_{11}, a_{12}, a_{22} auch A und A' verschwinden. Die Bedingungen (17) sind daher ersetzbar durch:

(21) $$A = 0, \quad A' \neq 0.$$

10. Bedingung für das Fehlen einer Koordinate in der Gleichung des Paares. Wir nehmen an, daß in der neuen Gleichung (9) des Punktepaares (1) die Koeffizienten der beiden Glieder verschwinden, die y_2 enthalten, also:

(22) $$f_{m2} = 0 \text{ oder: } \sum_1^2{}_k f_k^{(2)} x_k^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2.$$

Aus diesen beiden in den beiden Größen $f_k^{(2)}$ linearen und homogenen Gleichungen mit der nicht verschwindenden Determinante S folgt aber:

(23) $$f_1^{(2)} = 0, \quad f_2^{(2)} = 0.$$

Wenn umgekehrt die Ecke $J_2 = x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ den beiden Gleichungen (23) genügt, so bestehen die Gleichungen (22).

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen der Koordinate y_2 in der Gleichung (9) *ist, daß die Koordinaten $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$*

der Ecke J_2 des neuen Zweiecks den beiden Gleichungen genügen:

$$(24)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0. \end{cases}$$

Da es einen solchen Punkt im Falle (16) nicht gibt, so folgt:[76])

Die Gleichung des eigentlichen Punktepaares enthält, auf welches Koordinatenzweieck sie auch bezogen wird, stets beide Koordinaten..

Dagegen gibt es im Falle (17) stets einen Punkt:

$$(25)\qquad x_1^0 : x_2^0 = a_{22} : -a_{21} = -a_{12} : a_{11},$$

der den Gleichungen (24) genügt. Wird er als Ecke $J_2 : y_1 = 0$, $y_2 = 1$ eingeführt, so nimmt die Gleichung (9), indem y_2 ausfällt, die Form:

$$(26)\qquad f = b_{11}y_1^2 = 0$$

an. Es ergibt sich also wiederum, daß das Punktepaar (1) im Falle (17) ein Doppelpunkt ist, der in die Ecke J_2 fällt und in bezug auf E_1E_2 die Koordinaten (25) hat.

Die Gleichungen (24) *bestimmen also im Falle* (17) *den Doppelpunkt, in dem das Punktepaar zusammenfällt.*

§ 40. Polarentheorie und Quadratdarstellung des Punktepaares.

1. Harmonische Pole und Quadratdarstellung. Beim Übergang von dem Koordinatenzweieck E_1E_2 zu dem Koordinatenzweieck J_1J_2 erhielt das Punktepaar:

$$(1)\qquad f = \sum_1^2{}^k \sum_1^2{}^l a_{kl}\, x_k x_l = 0$$

nach § 39, (9) die Gleichung:

$$(2)\qquad f = b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 = 0.$$

Das Verhältnis der neuen Zweieckskoordinaten $y_1 : y_2$ eines Punktes P ist das multiplizierte Teilungsverhältnis, nach dem der Punkt P die Strecke J_1J_2 teilt (I § 7, (8)). Zwei Punkte bilden (I § 7, (21)) ein zu J_1, J_2 harmonisches Paar, wenn die Verhältnisse ihrer Zweieckskoordinaten y_1, y_2 entgegengesetzt gleich sind. Die Punkte (1), deren Koordinaten y_1, y_2 durch (2) bestimmt werden, sind daher zu J_1, J_2 harmonisch, wenn die Wurzeln $y_1 : y_2$ der Gleichung (2) entgegengesetzt gleich sind, also:

$$(3)\qquad b_{12} = f_{12} = 0.$$

Man nennt in diesem Falle J_1 und J_2 *zwei harmonische Pole* oder J_1J_2 *ein Polzweieck des Punktepaares.* Zugleich folgt (§ 8, (21)):

Immer dann und nur dann, wenn das Koordinatenzweieck $J_1 J_2$ ein Polzweieck des Punktepaares ist, hat die Gleichung des Punktepaares die Form[114]*):*

$$f = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0. \tag{4}$$

2. Harmonische Pole. *Die Bedingung für zwei harmonische Pole $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ des Punktepaares* (1) *lautet* nach (3):

$$\sum_1^2 {}_k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^2 {}_k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0. \tag{5}$$

Sie ist in $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ *symmetrisch.* Mit Unterdrückung des Index 2 kann man auch sagen:

Der harmonische Pol eines gegebenen Punktes $x_k^{(1)}$ in bezug auf das Punktepaar (1) *hat die Gleichung* (I § 7, (22)):

(6) $f_1^{(1)} x_1 + f_2^{(1)} x_2 = 0$ oder (6′) $f_1 x_1^{(1)} + f_2 x_2^{(1)} = 0$.

Der Punkt $x_k = x_k^{(1)}$ selbst genügt dieser Gleichung nach § 39, (4) immer dann und nur dann, wenn er der Gleichung (1) genügt, also:

Ein Punkt fällt mit seinem Pol zusammen, wenn er dem Punktepaar selbst angehört (§ 8, 3).

Mit Rücksicht auf § 39, (24) hat bei dem *getrennten* Punktepaar *jeder Punkt $x_k^{(1)}$ der Geraden einen einzigen bestimmten Pol.* Dagegen ist bei dem *zusammenfallenden* Punktepaar der Pol des Doppelpunktes nach (6) ganz *unbestimmt,* während nach (6′) zu jedem anderen Punkte $x_k^{(1)}$ der Doppelpunkt selbst als Pol gehört.

3. Anzahl der Polzweiecke. In jedem Falle gibt es ∞^1 (reelle) Polzweiecke $J_1 J_2$ eines gegebenen Punktepaares (1). Beim *getrennten* Punktepaar ist der eine Punkt J_1 ein beliebiger, nur nicht dem Punktepaar selbst angehöriger Punkt, J_2 aber sein harmonischer Pol. Beim *zusammenfallenden* Punktepaar ist J_1 der *Doppelpunkt* und J_2 ein beliebiger anderer Punkt.

4. Erhaltung der Spezies. In bezug auf jedes der ∞^1 Polzweiecke $J_1 J_2$ hat die Gleichung des Punktepaares die Form (4). Dabei ist nach § 39, (12):

$$b_{11} b_{22} = S^2 \cdot A. \tag{7}$$

Die Vorzeichen der Koeffizienten in irgendeiner Quadratdarstellung (4) *des Punktepaares* (1) *sind stets gleich oder ungleich, je nachdem $A > 0$ oder < 0.*

Den Vorzeichen $++$ oder $--$ entspricht die *Spezies der imaginären,* den Vorzeichen $+-$ oder $-+$ die *Spezies der reellen Punktepaare.*[115])

Für den Doppelpunkt ist einer der beiden Koeffizienten in (4) gleich 0 (§ 39, (26)).

5. Transformation auf ein besonderes Polzweieck. Unter der Voraussetzung:

$$a_{11} \neq 0 \tag{8}$$

gehört die Ecke E_1 mit den Koordinaten:

$$x_1^{(1)} = 1\,, \quad x_2^{(1)} = 0 \tag{9}$$

nicht dem Punktepaar (1) an. Man kann sie daher selbst als Ecke J_1 eines Polzweiecks nehmen. Der Pol J_2 des Punktes (9), für den:

$$f_1^{(1)} = a_{11}\,, \quad f_2^{(1)} = a_{21}\,, \tag{10}$$

hat nach (6) die Gleichung:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \tag{11}$$

und die Koordinaten:

$$x_1^{(2)} = -a_{12}\,, \quad x_2^{(2)} = a_{11}\,. \tag{12}$$

Danach wird:

$$f_1^{(2)} = 0\,, \quad f_2^{(2)} = A \tag{13}$$

und:

$$b_{11} = \sum_1^2{}^k f_k^{(1)} x_k^{(1)} = a_{11}\,, \quad b_{22} = \sum_1^2{}^k f_k^{(2)} x_k^{(2)} = a_{11}A\,. \tag{14}$$

Die Gleichung (1) *kann also unter der Voraussetzung* (8) *durch die Substitution*[114]*):*

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - a_{12}y_2 \\ x_2 = \phantom{y_1 - {}} a_{11}y_2 \end{cases} \tag{15}$$

von der Determinante $S = a_{11}$ *auf die Form gebracht werden:*

$$f = a_{11}y_1^2 + a_{11}Ay_2^2 = 0\,. \tag{16}$$

6. Orthogonale lineare Substitution. Die lineare Substitution:

$$x_k = \sum_1^2{}^m c_{km}\, z_m \tag{17}$$

heißt eine *orthogonale*, wenn durch sie identisch die Gleichung besteht:

$$x_1^2 + x_2^2 = z_1^2 + z_2^2. \tag{18}$$

Um eine solche Substitution zu erhalten, wählt man *irgendein* (reelles) *Polzweieck* $J_m = x_k^{(m)}$; $m, k = 1, 2$, des Punktepaares:

$$g = x_1^2 + x_2^2. \tag{19}$$

Durch Transformation auf dieses mittels der Substitution

$$x_k = \sum_1^2{}^m x_k^{(m)} y_m \tag{20}$$

erhält man nach (4):

(21) $$g = g_{11} y_1^2 + g_{22} y_2^2.$$

Hier sind die Koeffizienten:

(22) $$g_{mm} = x_1^{(m)2} + x_2^{(m)2}$$

positiv und von 0 verschieden. Setzt man daher:

(23) $$\sqrt{g_{mm}}\, y_m = z_m,$$

so wird:

(24) $$g = z_1^2 + z_2^2$$

und ist:

(25) $$x_k = \sum_1^2 {}_m \frac{x_k^{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}} z_m$$

eine (reelle) orthogonale Substitution. Hier hängt der Koeffizient von z_m, vom Vorzeichen der Wurzel abgesehen, nach (22) nur von dem *Verhältnis* $x_1^{(m)} : x_2^{(m)}$ der Koordinaten der Ecke J_m ab.

Den ∞^1 (reellen) Polzweiecken entsprechen daher ∞^1 (reelle) orthogonale lineare Substitutionen.

7. Quadratdarstellung durch orthogonale Substitution. Die Frage, ob ein beliebiges Punktepaar (1) durch eine dieser *orthogonalen* Substitutionen auf die *Quadratdarstellung* (4) gebracht werden kann[116]), kommt zurück auf die Frage nach einem *gemeinsamen Polzweieck* der beiden Punktepaare (1) und (19).

Ist nämlich $J_m = x_k^{(m)}$ auch Polzweieck von f, wie es in **6** als Polzweieck von g angenommen war, so wird durch die Substitution (20) nach (4):

(26) $$f = f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2$$

und nach (23):

(27) $$f = \frac{f_{11}}{g_{11}} z_1^2 + \frac{f_{22}}{g_{22}} z_2^2.$$

Hat also das Punktepaar (1) *mit dem Punktepaar* (19) *ein reelles Polzweieck $J_m = x_k^{(m)}$ gemein, so kann es durch die orthogonale Substitution* (25) *auf die Quadratdarstellung* (27) *gebracht werden.*

8. Punkte gleichen Poles. Jede der beiden Ecken J_1, J_2 eines gemeinsamen Polzweiecks der Punktepaare (1) und (19) muß die andere als harmonischen Pol in bezug auf beide Paare haben, also *ein Punkt gleichen Poles in bezug auf beide Punktepaare* sein.

Die Pole eines Punktes x_k^0 in bezug auf beide haben aber nach (6) die Gleichungen:

(28) $$f_1^0 x_1 + f_2^0 x_2 = 0 \qquad (29) \qquad x_1^0 x_1 + x_2^0 x_2 = 0.$$

Sie fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn mit einem Proportionalitätsfaktor λ:

$$f_k^0 = \lambda x_k^0, \quad k = 1, 2. \tag{30}$$

Jeder Punkt gleichen Poles genügt also den Gleichungen:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0, \end{cases} \tag{31}$$

und jeder Punkt, der diesen Gleichungen genügt, ist ein Punkt gleichen Poles.

9. Die quadratische Gleichung des Problems. Die Gleichungen (31) können nur bestehen, wenn der Faktor λ der quadratischen Gleichung genügt:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - A'\lambda + A = 0, \tag{32}$$

wo A und A' die Bedeutungen § 39, (11); (18) haben.

I. Die Gleichung hat nach § 21, **9** stets zwei *reelle* Wurzeln λ_1 und λ_2. II. Für eine einfache Wurzel können nach § 21, **10** niemals zugleich alle Elemente der Determinante $\Delta(\lambda)$ verschwinden. III. Für eine Doppelwurzel verschwinden stets alle diese Elemente.

Zugleich ist für die beiden Wurzeln λ_1, λ_2:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A', \quad \lambda_1 \lambda_2 = A. \tag{33}$$

10. Fall zweier verschiedenen Wurzeln. Sind nun λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Wurzeln von (32), so gehört zu jeder von ihnen vermöge der Gleichungen (31) ein nach **9**, II völlig bestimmter Punkt gleichen Poles. Die beiden so erhaltenen Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ genügen nach (30) bezüglich den Gleichungen:

$$f_k^{(1)} = \lambda_1 x_k^{(1)}, \quad f_k^{(2)} = \lambda_2 x_k^{(2)}, \quad k = 1, 2. \tag{34}$$

Sie können nicht zusammenfallen; denn mit $x_k^{(2)} = x_k^{(1)}$ würde aus den beiden dann in $f_k^{(1)}$ und $x_k^{(1)}$ linearen homogenen Gleichungen (34) mit der Determinante $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ folgen, daß $f_k^{(1)} = 0$ und $x_k^{(1)} = 0$; die letztere Gleichung kann aber nicht für beide Werte von k bestehen (I § 7, **5**).

Die zu zwei verschiedenen Wurzeln gehörigen Punkte gleichen Poles sind stets getrennt.

Multipliziert man die Gleichungen (34) mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k, so folgt:

$$\sum^k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \lambda_1 \sum^k x_k^{(1)} x_k^{(2)}, \quad \sum^k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = \lambda_2 \sum^k x_k^{(2)} x_k^{(1)}$$

oder nach § 39, (6):

$$f_{12} = \lambda_1 g_{12}, \quad f_{12} = \lambda_2 g_{12}.$$

Daraus aber ergibt sich, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0. \tag{35}$$

Die zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörigen Punkte gleichen Poles sind harmonische Pole in bezug auf beide Punktepaare f und g.

Die beiden Punktepaare haben also für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ stets ein und nur ein gemeinsames reelles Polzweieck.

11. Fall einer Doppelwurzel. Für eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ verschwinden nach **9**, III stets auch alle Elemente von $\Delta(\lambda)$, so daß:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = 0.$$

Daher sind die Punktepaare (1) und (19) identisch und *haben* ∞^1 *gemeinsame reelle Polzweiecke.*

12. Die Koeffizienten der Quadratdarstellung. Somit ist es stets möglich, die Gleichung (1) durch orthogonale Substitution auf die Form (27) zu bringen. Dabei ist nach (34) für $i = 1, 2$:

$$\sum_1^2{}_k f_k^{(i)} x_k^{(i)} = \lambda_i \sum_1^2{}_k x_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

oder:

$$f_{ii} = \lambda_i g_{ii}, \tag{36}$$

wonach die Gleichung (27) die Form erhält:

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0. \tag{37}$$

Die Gleichung (1) *kann stets durch eine orthogonale Substitution* (25) *auf die Form* (37) *gebracht werden, wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (32) *bedeuten und die Koordinaten $x_1^{(m)}$, $x_2^{(m)}$ für* (25) *mit $\lambda = \lambda_m$ $(m = 1, 2)$ aus* (31) *zu bestimmen sind.*

13. Invarianten der orthogonalen Substitution. Wird durch irgendeine orthogonale Substitution (17), die nicht gerade die Quadratdarstellung (26) herbeiführt, f auf die Form gebracht:

$$f = \sum_1^2{}_m \sum_1^2{}_n b_{mn} z_m z_n, \tag{38}$$

so wird durch sie nach (18) und (38) identisch in λ:

$$\begin{aligned} f - \lambda g &= (a_{11} - \lambda) x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + (a_{22} - \lambda) x_2^2 \\ &= (b_{11} - \lambda) z_1^2 + 2 b_{12} z_1 z_2 + (b_{22} - \lambda) z_2^2 \end{aligned} \tag{39}$$

und daher nach § 39, (12):

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda \end{vmatrix} = S^2 \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Da aber diese Gleichung identisch in λ gilt, so ergibt sich:

Bei einer orthogonalen Transformation des Punktepaares (1) *ist nicht nur, wie bei jeder linearen Transformation, die Determinante A, sondern auch:*

$$(41) \qquad A' = a_{11} + a_{22}$$

eine Invariante.

14. Die Spezies des Punktepaares. Die Spezies des Punktepaares $f = 0$ ergibt sich nun aus (37) mit Rücksicht auf (33) sofort, wie in **4**, und zwar:

$$(42) \qquad \begin{aligned} &A > 0: \text{ Imaginäres getrenntes Punktepaar,} \\ &A < 0: \text{ Reelles getrenntes Punktepaar,} \\ &A = 0,\ A' \neq 0: \text{ Zusammenfallendes Punktepaar.} \end{aligned}$$

15. Rückkehr zum Hauptachsenproblem der Kegelschnitte. Das Hauptachsenproblem der Kegelschnitte § 21, 2 ordnet sich der vorstehenden Entwicklung **6—12** unter, indem es sich dort darum handelt, das gemeinsame Polzweieck des unendlich fernen Punktepaares des Kegelschnittes und des imaginären Kreispunktpaares zu finden.

II. Kapitel.

Allgemeine Koordinatendreiecke.

§ 41. Die Gleichung des Kegelschnittes und ihre Transformation.

1. Allgemeine Form der Gleichung. In bezug auf ein Koordinatendreieck $E_1E_2E_3$ (I § 28, (1); (4)) ist die allgemeine Gleichung

einer Kurve zweiter Ordnung in laufenden Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3:

$$(1) \qquad f = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0.$$

einer Kurve zweiter Klasse in laufenden Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3:

$$(1') \qquad F = F(u_1, u_2, u_3) = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l e_{kl} u_k u_l = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung, für die:

$$(2) \qquad a_{kl} = a_{lk} \qquad\qquad (2') \qquad e_{kl} = e_{lk}$$

sein soll, ist eine *quadratische Form* der drei Koordinaten.[40])

2. Die partiellen Ableitungen der Form. Wir bezeichnen den *halben partiellen Differentialpotienten* von f nach x_k und von F nach u_k mit (§ 9, (5); § 15, (3)):

(3) $f_k = f_k(x_1, x_2, x_3) = \sum_1^3{}^l a_{kl} x_l.$ | (3′) $F_k = F_k(u_1, u_2, u_3) = \sum_1^3{}^l e_{kl} u_l.$

Alsdann gelten die *Identitäten:*

(4) $\sum_1^3{}^k f_k x_k = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_l x_k = f.$ | (4′) $\sum_1^3{}^k F_k u_k = F.$

Ist die Ableitung f_k für einen *bestimmten* Punkt $x_k^{(n)}$ oder F_k für eine bestimmte Gerade $u_k^{(n)}$ gebildet, so gebrauchen wir die Bezeichnungen:

(5) $f_k^{(n)} = f_k(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}) = \sum_1^3{}^l a_{kl} x_l^{(n)}.$ | (5′) $F_k^{(n)} = F_k(u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}) = \sum_1^3{}^l e_{kl} u_l^{(n)}.$

3. Die bilinearen Formen. In bezug auf zwei bestimmte Punkte $x_k^{(m)}$, $x_l^{(n)}$ oder Gerade $u_k^{(m)}$, $u_l^{(n)}$ setzen wir zur Abkürzung (§ 10, (9)):

(6) $f_{mn} = f_{nm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(n)} = \sum_1^3{}^k f_k^{(n)} x_k^{(m)} = \sum_1^3{}^l f_l^{(m)} x_l^{(n)}.$ | (6′) $F_{mn} = F_{nm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l e_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} = \sum_1^3{}^k F_k^{(n)} u_k^{(m)} = \sum_1^3{}^l F_l^{(m)} u_l^{(n)}.$

Diese *bilinearen Formen* gehen mit $m = n$ wieder in die quadratischen Formen über:

(7) $f_{mm} = f(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}).$ | (7′) $F_{mm} = F(u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, u_3^{(m)}).$

4. Die Determinante der quadratischen Form. Die Determinanten[41]) (§ 9, (15)) der quadratischen Formen (1) und (1′):

(8) $A = |a_{kl}|$ (8′) $E = |e_{kl}|$

sind infolge von (2) symmetrische Determinanten dritten Grades. Daher ist auch für ihre Unterdeterminanten zweiten Grades:

(9) $A_{kl} = A_{lk}.$ (9′) $E_{kl} = E_{lk}.$

5. Ausführung der Transformation. Zum Übergang von dem alten Koordinatendreieck $E_1 E_2 E_3$ zu einem neuen $J_1 J_2 J_3$, dessen Ecken J_m die Koordinaten $x_k^{(m)}$ haben, dienen die Formeln (I § 30, (15)):

$$(10) \qquad x_k = \sum_1^3{}^m x_k^{(m)} y_m.$$

Durch die Substitution (1) geht die *quadratische Form der alten Koordinaten* x_k:

$$(11) \qquad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l$$

über in:

$$f = \sum^k \sum^l a_{kl} \sum^m x_k^{(m)} y_m \sum^n x_l^{(n)} y_n$$
$$= \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l a_{kl}\, x_k^{(m)} x_l^{(n)} \right\} y_m y_n,$$

also in eine quadratische Form der neuen Koordinaten y_m:

$$(12) \qquad f = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} y_m y_n,$$

deren Koeffizienten nach (6) die Werte haben:

$$(13) \qquad b_{mn} = f_{mn} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(n)}.$$

Sie sind *bilineare Formen der Koordinaten je zweier Ecken* J_m und J_n des neuen Koordinatendreiecks, bezüglich (für $m = n$) quadratische Formen der Koordinaten einer Ecke J_m (vgl. § 39, 4).

6. Invarianteneigenschaft der Determinante. Nach (6) und (5) kann man den Wert (13) auch in der Form darstellen:

$$(14) \quad b_{mn} = f_{mn} = \sum_1^3{}^k x_k^{(m)} f_k^{(n)} \quad \text{mit} \quad (15) \quad f_k^{(n)} = \sum_1^3{}^l a_{kl} x_l^{(n)}.$$

Daher ist nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 2, (2)) einerseits:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} \end{vmatrix}$$

und andererseits:

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Formeln ergibt sich zwischen den drei Determinanten:

$$(16) \qquad A = |a_{kl}|, \quad B = |b_{kl}|, \quad S = |x_k^{(l)}|$$

die Beziehung:

$$(17) \qquad B = S^2 A.$$

Die Determinante der transformierten Form ist das Produkt der Determinante der ursprünglichen Form und des Quadrats der Substitutionsdeterminante, oder:

Die Determinante der quadratischen Form ist eine *Invariante*[90]) *bei jeder Koordinatentransformation* (vgl. § 22, (7)).

7. Beziehung der Unterdeterminanten. Infolge der Beziehungen (14) und (15) ist ferner (I Anm. 1, V, 2, (3)):

$$\begin{vmatrix} b_{m_1 n_1} & b_{m_1 n_2} \\ b_{m_2 n_1} & b_{m_2 n_2} \end{vmatrix} = \sum_1^3{}_{k_1 k_2} \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(m_1)} & x_{k_2}^{(m_1)} \\ x_{k_1}^{(m_2)} & x_{k_2}^{(m_2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_{k_1}^{(n_1)} & f_{k_2}^{(n_1)} \\ f_{k_1}^{(n_2)} & f_{k_2}^{(n_2)} \end{vmatrix} = \sum_1^3{}_{l_1 l_2} \begin{vmatrix} x_{l_1}^{(n_1)} & x_{l_2}^{(n_1)} \\ x_{l_1}^{(n_2)} & x_{l_2}^{(n_2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} \end{vmatrix}.$$

Durch Verbindung beider Gleichungen folgt, wenn $m \cdot m_1 m_2$, $n \cdot n_1 n_2$, $k \cdot k_1 k_2$, $l \cdot l_1 l_2$ je die Permutationen (I Anm. 1, II, 2):

$$(18) \qquad 1 \cdot 23, \quad 2 \cdot 31, \quad 3 \cdot 12$$

bedeuten:

$$(19) \qquad B_{mn} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)}.$$

Hier sind B_{mn}, A_{kl}, $u_k^{(m)}$ die Unterdeterminanten der neuen und alten Determinante B und A, sowie der Substitutionsdeterminante S in (16). Die $u_k^{(m)}$ sind zugleich die Koordinaten der Seiten i_m des neuen Koordinatendreiecks (I § 30, (19)).

8. Darstellung der neuen Koeffizienten und ihrer Determinanten durch die alten. *Die Koeffizienten b_{mn} der transformierten Form* (12) *und die aus ihnen gebildeten Determinanten zweiten und dritten Grades B_{mn} und B drücken sich also durch die Koeffizienten a_{kl} der ursprünglichen Form* (11) *und die aus ihnen gebildeten Determinanten A_{kl} und A mittels der Formeln aus*[118]*):*

$$(20) \qquad \begin{cases} b_{mn} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(n)}, \\ B_{mn} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\ B = AS^2, \end{cases}$$

wo $x_k^{(m)}$ die Koordinaten der Ecken J_m, $u_k^{(m)}$ die Koordinaten der Seiten i_m des neuen Koordinatendreiecks und S die Substitutionsdeterminante ist.

9. Kovariante Funktionen. Gleichzeitig mit der Form (11) der Koordinaten eines Punktes soll die folgende Form der Koordinaten u_k einer Geraden[117]):

$$(21) \qquad F = \sum_1^3 \sum_1^3{}_l A_{kl} u_k u_l$$

auf das neue Koordinatendreieck transformiert werden. Die Koeffizienten dieser Form sind die Unterdeterminanten aus den Koeffizienten a_{kl} der gegebenen Form (11).

Zur Transformation dienen die Formeln (I § 30, (16)):

$$(22) \qquad S u_k = \sum_1^3{}^m u_k^{(m)} v_m,$$

wo v_m die neuen Linienkoordinaten sind. Danach wird:

$$S^2 F = \sum{}^k \sum{}^l A_{kl} \sum{}^m u_k^{(m)} v_m \sum{}^n u_l^{(n)} v_n$$
$$= \sum{}^m \sum{}^n \left\{ \sum{}^k \sum{}^l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m v_n$$

oder mit Rücksicht auf (20) und Wiederholung von (12):

Beim Übergang von dem alten zu dem neuen Koordinatendreieck gelten nebeneinander die folgenden Transformationsformeln:

$$(23) \qquad \begin{cases} f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} y_m y_n, \\ S^2 F = S^2 \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl} u_k u_l = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n B_{mn} v_m v_n. \end{cases}$$

Die Funktionen f und F sind *Kovarianten*, die sich je aus den neuen Koeffizienten und Variabeln ebenso zusammensetzen wie aus den alten.

10. Darstellung der alten Koeffizienten und ihrer Determinanten durch die neuen. Die Auflösungen der Gleichungen (10) und (22) sind (I § 30, (17); (18)):

$$(24) \qquad S y_m = \sum_1^3{}^k u_k^{(m)} x_k, \qquad v_m = \sum_1^3{}^k x_k^{(m)} u_k.$$

Setzt man diese Werte in die transformierten Formen auf den rechten Seiten von (23) ein, so müssen sich rückwärts wieder die ursprünglichen Formen ergeben. Man erhält damit:

$$S^2 \sum{}^k \sum{}^l a_{kl} x_k x_l = \sum{}^m \sum{}^n b_{mn} \sum{}^k u_k^{(m)} x_k \sum{}^l u_l^{(n)} x_l$$
$$= \sum{}^k \sum{}^l \left\{ \sum{}^m \sum{}^n b_{mn} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} x_k x_l,$$
$$S^2 \sum{}^k \sum{}^l A_{kl} u_k u_l = \sum{}^m \sum{}^n B_{mn} \sum{}^k x_k^{(m)} u_k \sum{}^l x_l^{(n)} u_l$$
$$= \sum{}^k \sum{}^l \left\{ \sum{}^m \sum{}^n B_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)} \right\} u_k u_l.$$

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten auf beiden Seiten dieser Gleichungen folgt daher:

Die Koeffizienten der ursprünglichen Form und die aus ihnen gebildeten Determinanten drücken sich durch die Koeffizienten der transformierten Form und ihre Determinanten mittels der Formeln aus[113]*):*

$$(25)\quad \begin{cases} S^2 a_{kl} = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\ S^2 A_{kl} = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n B_{mn} x_k^{(m)} x_l^{(n)}, \\ S^2 A = B, \end{cases}$$

mit derselben Bedeutung von $x_k^{(m)}$ *und* $u_k^{(m)}$ *wie in* 8.

11. Transformation der Kurve zweiter Klasse. Die unabhängig von f gegebene Form:

$$(26)\quad F = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l e_{kl} u_k u_l$$

geht mittels der Substitution (22) über in:

$$S^2 F = \sum^k \sum^l e_{kl} \sum^m u_k^{(m)} v_m \sum^n u_l^{(n)} v_n$$
$$= \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l e_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m v_n$$

oder nach (6′):

$$(27)\quad S^2 F = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n F_{mn} v_m v_n.$$

12. Übergang auf gemeine Koordinaten. Für die Beziehung zwischen einem rechtwinkligen System Oxy und einem schiefwinkligen $O'x'y'$ gelten die Formeln § 22, (2); (3) und § 15, (10); (11). Daher ist dann in (10) und (22) zu setzen:

$$(28)\quad \begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha_1, & x_1^{(2)} = \alpha_2, & x_1^{(3)} = x_0, \\ x_2^{(1)} = \beta_1, & x_2^{(2)} = \beta_2, & x_2^{(3)} = y_0, \\ x_3^{(1)} = 0, & x_3^{(2)} = 0, & x_3^{(3)} = 1; \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} u_1^{(1)} = \mathsf{A}_1, & u_1^{(2)} = \mathsf{A}_2, & u_1^{(3)} = 0, \\ u_2^{(1)} = \mathsf{B}_1, & u_2^{(2)} = \mathsf{B}_2, & u_2^{(3)} = 0, \\ u_3^{(1)} = S x_0', & u_3^{(2)} = S y_0', & u_3^{(3)} = S. \end{cases}$$

Damit ergeben sich aber mit a'_{kl}, A'_{kl} für b_{kl}, B_{kl} aus (20) die Formeln § 9, (20)—(23) und aus (25) die Formeln § 22, (18). Ebenso gehen aus (26); (27) mit b_{kl} für e_{kl} die Formeln § 15, (18)—(20) hervor.

§ 42. Einteilung der Kegelschnitte nach dem Rang.

1. Begriff des Ranges. Nach § 41, (20); (25) ist jede der neuen Determinanten dritten, zweiten und ersten Grades B, B_{mn}, b_{mn} eine *lineare homogene* Funktion der bezüglich gleichgradigen alten Determinanten A, A_{kl}, a_{kl} und umgekehrt. Verschwinden daher alle alten Determinanten eines bestimmten Grades, so verschwinden auch alle neuen desselben Grades und umgekehrt. Das Verschwinden *aller* Determinanten eines *bestimmten* Grades, welches überdies das aller Determinanten *höheren* Grades nach sich zieht (I Anm. 1, II, (6); I, (4)), ist daher eine vom Koordinatendreieck unabhängige Eigenschaft der Kurve, die wir als ihren *Rang* bezeichnen. Wir nennen nämlich die *Kurve zweiter Ordnung* § 41, (1) (oder *zweiter Klasse* § 41, (1')) vom *Range 3*, wenn die Determinante $A \neq 0$ ist; vom *Range 2*, wenn $A = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten A_{kl} verschwinden; vom *Range 1*, wenn alle A_{kl}, aber nicht alle Elemente a_{kl} verschwinden (§ 18, **1**; § 19, **9**).

Der Rang der Kurve zweiter Ordnung (oder zweiter Klasse) ist vom Koordinatensystem unabhängig.[76])

2. Bedingung für das Fehlen einer Koordinate in der Gleichung der Kurve. Die Kurve:

$$(1)\qquad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

hat nach § 41, (12) in bezug auf irgendein neues Koordinatendreieck $J_1 J_2 J_3$ die Gleichung:

$$(2)\qquad f = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} y_m y_n = 0, \quad b_{mn} = f_{mn} = f_{nm}.$$

Wir nehmen an, daß in dieser Gleichung die Koeffizienten der drei Glieder verschwinden, die y_3 enthalten, also (§ 41, (6)):

$$(3)\qquad f_{m3} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^3{}^k f_k^{(3)} x_k^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2, 3.$$

Aus diesen in den drei Größen $f_k^{(3)}$ linearen homogenen Gleichungen mit der nicht verschwindenden Determinante S (§ 41, (16)) folgt aber (I Anm. 2, II, 3):

$$(4)\qquad f_k^{(3)} = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_1^3{}^l a_{kl} x_l^{(3)} = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Wenn umgekehrt die Ecke $J_3 = x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}$ den drei Gleichungen (4) genügt, so bestehen die drei Gleichungen (3) (vgl. § 39, 10). So folgt allgemein:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Fehlen der Koordinate y_m ($m = 1, 2$ oder 3) in der Gleichung (2) ist, daß die Koordinaten $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}$ der Ecke J_m des neuen Koordinatendreiecks den drei Gleichungen genügen:

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5}$$

Ausführlich lauten diese:

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ebenso fehlt die Koordinate v_m in der transformierten Gleichung der Kurve zweiter Klasse (§ 41, (27)), wenn die Koordinaten $u_1^{(m)}$, $u_2^{(m)}, u_3^{(m)}$ der Seite i_m des neuen Koordinatendreiecks den drei Gleichungen genügen:

$$F_k(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{5'}$$

3. Eigentliche und uneigentliche Kurven. Im allgemeinen gibt es keinen Punkt, der den Gleichungen (6) oder (5) genügt. Falls es aber einen solchen Punkt gibt, so ist er ein Punkt der Kurve selbst, da nach § 41, (4) identisch:

$$\sum_{1}^{3}{}_{k} f_k x_k = f. \tag{7}$$

Wir nennen daher[49])

jeden den Gleichungen (5) genügenden Punkt einen singulären Punkt der Kurve $f = 0$.

jede den Gleichungen (5′) genügende Gerade eine singuläre Gerade der Kurve $F = 0$.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Gleichungen (6) keine Lösung haben, ist aber $A \neq 0$, also:

Die Kurven zweiter Ordnung vom Range 3 haben keinen singulären Punkt (§ 18, 2).

Die Kurven zweiter Klasse vom Range 3 haben keine singuläre Linie.

Sie heißen *eigentliche* Kurven zweiter Ordnung, bezüglich Klasse.

Ihre Gleichung enthält, auf welches Koordinatendreieck sie auch bezogen wird, stets alle drei Koordinaten.

Kurven geringeren Ranges haben stets einen oder mehr *singuläre* Punkte, bezüglich Linien. Ihre Gleichungen können in *weniger als drei Koordinaten* dargestellt werden. Sie selbst gehören also niedrigeren

Mannigfaltigkeiten als der Ebene an und heißen daher *uneigentliche Kurven zweiter Ordnung*, bezüglich Klasse.

4. Kurven mit einem singulären Punkt. Ist die Kurve (1) vom Range 2, so daß $A = 0$, aber nicht alle A_{kl} Null sind, so gibt es (I Anm. 2, II, (10)) *einen singulären Punkt*, für *dessen* Koordinaten x_k^0 aus (6) hervorgeht[79]):

(8) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3},$$

$k = 1, 2$ oder 3.

Wählt man diesen Punkt als Ecke J_3 des neuen Koordinatendreiecks, also:

(9) $$x_k^{(3)} = x_k^0,$$

so verschwindet aus (2) die Koordinate y_3 und die Gleichung der Kurve wird:

(10) $$f = b_{11} y_1^2 + 2 b_{12} y_1 y_2 + b_{22} y_2^2 = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt (I § 71, (17)):

Die Kurve zweiter Ordnung vom Range 2 ist ein Strahlenpaar; ihr singulärer Punkt ist der Schnittpunkt der beiden Strahlen (§ 19, 3).

Die Kurve zweiter Klasse vom Range 2 ist ein Punktepaar; ihre singuläre Linie ist die Verbindungslinie der beiden Punkte.

5. Determinante und Unterdeterminante des Strahlenpaares. Die Determinante der Gleichung (10), insofern sie als Gleichung zwischen den drei Variablen y_1, y_2, y_3 betrachtet wird, ist:

(11) $$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = S^2 A = 0.$$

Daher verschwinden alle Unterdeterminanten B_{mn} bis auf die eine:

(12) $$B_{33} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

die nicht verschwindet, da die Kurve vom Range 2 sein soll. Infolgedessen stellt die Gleichung ein *eigentliches (getrenntes)* Strahlenpaar dar. Umgekehrt kann jedes getrennte Strahlenpaar der Ebene, indem man die Ecke J_3 in seinen Doppelpunkt legt, durch eine Gleichung von der Form (10) mit $B_{33} \neq 0$ dargestellt werden. *Daher ist auch jedes getrennte Strahlenpaar der Ebene eine Kurve zweiter Ordnung vom Range 2.*

Infolge der Werte von B_{mn} verkürzt sich die zweite Gleichung § 41, (25) auf[121]):

(13) $$S^2 A_{kl} = B_{33}\, x_k^{(3)} x_l^{(3)} = B_{33}\, x_k^0 x_l^0.$$

Ist die Kurve (1) *ein Strahlenpaar, so zerfallen die Unterdeterminanten A_{kl} je in zwei Faktoren im Sinne* (13), *wo x_k^0 die Koordinaten des Doppelpunktes sind.*

Indem man diese Werte in die Form § 41, (21) einführt, ergibt sich[118]):

$$(14) \qquad S^2 F = B_{33} \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l x_k^0\, x_l^0\, u_k\, u_l = B_{33} \left(\sum_1^3{}^k x_k^0 u_k \right)^2.$$

Für das Linienpaar ist die Kovariante F, bis auf einen konstanten Faktor, das vollständige Quadrat einer linearen Form (vgl. § 12, **11**).

Dasselbe folgt aus der Gleichung § 41, (23) in der Form:

$$S^2 F = B_{33}\, v_3^2,$$

wo der Wert von v_3 aus § 41, (24) mit Rücksicht auf (9) zu entnehmen ist.

6. Koeffizienten und Koordinaten der beiden Strahlen des Strahlenpaares. Sind u_k' und u_k'' die Koordinaten der beiden Geraden des Paares, so ist bis auf einen konstanten Faktor:

$$f = (u_1' x_1 + u_2' x_2 + u_3' x_3)(u_1'' x_1 + u_2'' x_2 + u_3'' x_3) = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l u_k' u_l'' x_k x_l$$

und dementsprechend ergibt sich:

Zwischen den Koeffizienten der Gleichung (1) *eines Strahlenpaares und den Koordinaten der beiden Strahlen des Paares bestehen die Beziehungen:*

$$(15) \qquad a_{kl} = \tfrac{1}{2}(u_k' u_l'' + u_l' u_k'').$$

7. Kurven mit singulärer Linie. Ist die Kurve (1) vom Range 1, so daß alle A_{kl}, aber nicht alle a_{kl} verschwinden, so gibt es ∞^1 Punkte, die Punkte einer Geraden, die den Gleichungen (6) genügen. Wir nennen diese Gerade die *singuläre Gerade* der Kurve und finden aus (6) für ihre Koordinaten:

$$(16) \qquad u_1^0 : u_2^0 : u_3^0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3},$$

$k = 1, 2$ oder 3.

Wählt man auf dieser Geraden die beiden Ecken J_2 und J_3 des neuen Dreiecks, also:

$$(17) \qquad u_k^{(1)} = u_k^0,$$

so verschwinden nach 2 aus (2) y_2 und y_3, und die Gleichung der Kurve wird:

$$(18) \qquad f = b_{11}\, y_1^2 = 0.$$

Die Kurve zweiter Ordnung vom Range 1 ist eine Doppelgerade, zugleich ihre singuläre Gerade.

Die Kurve zweiter Klasse vom Range 1 ist ein Doppelpunkt, zugleich ihr singulärer Punkt (§ 19, 7).

8. Determinante und Koeffizienten der Doppellinie. Von der Determinante B verschwinden jetzt alle Elemente außer b_{11}. Zugleich ist nach der ersten Gleichung § 41, (25):

$$S^2 a_{kl} = b_{11} u_k^{(1)} u_l^{(1)} = b_{11} u_k^0 u_l^0. \tag{19}$$

Ist die Kurve eine Doppelgerade, so zerfallen die Koeffizienten a_k *je in zwei Faktoren im Sinne* (19), *wo* u_k^0 *die Koordinaten der Doppelgeraden sind.*

Mit diesen Werten wird aus (1)[118]:

$$S^2 f = b_{11} \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l u_k^0 u_l^0 x_k x_l = b_{11} \Big(\sum_1^3{}^k u_k^0 x_k \Big)^2. \tag{20}$$

Für die Doppelgerade ist die Form f selbst ein vollständiges Quadrat.

9. Einteilung der Kegel zweiter Ordnung und Klasse nach dem Rang. In derselben Weise wie für die Kegelschnitte § 41, (1); (1′) erhält man auch für die durch dieselben Gleichungen in laufenden Strahlen- und Ebenenkoordinaten im Bündel dargestellten Kegel (I § 64, (9′); (10′)) die Sätze:

Die Kegel zweiter Ordnung vom Range 3 haben keinen singulären Strahl.

Die Kegel zweiter Klasse vom Range 3 haben keine singuläre Ebene.

Der Kegel zweiter Ordnung vom Range 2 und 1 ist ein Ebenenpaar, bezüglich eine Doppelebene.

Der Kegel zweiter Klasse vom Range 2 und 1 ist ein Strahlenpaar, bezüglich ein Doppelstrahl.

§ 43. Gleichzeitige Transformation der Kurve zweiter Ordnung und der geraden Linie.

1. Gleichungen des Schnittpunktepaares. Die beiden Gleichungen:

$$f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \tag{1}$$

$$F = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l e_{kl} u_k u_l = 0, \tag{1'}$$

$$u = \sum_1^3{}^k u_k x_k = 0 \tag{2}$$

$$x = \sum_1^3{}^k x_k u_k = 0 \tag{2'}$$

stellen zusammen *das Paar von Punkten*, welche die Kurve zweiter Ordnung f und die Gerade u, bezüglich *das Paar von Geraden* dar,

welche die Kurve zweiter Klasse F und der Punkt x gemeinsam haben.

Beim Übergang zu einem neuen Koordinatendreieck ändert sich die Gleichung (1) wie in § 41, (12) in:

$$f = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n b_{mn} y_m y_n = 0, \tag{3}$$

während die Gleichung (2) übergeht in (I § 30, (10)):

$$u = \sum_1^3{}^m v_m y_m = 0, \tag{4}$$

wo v_m den Wert § 41, (24) hat.

2. Invarianteneigenschaft der geränderten Determinante. Die mit den Koordinaten der Geraden (2) geränderte Determinante[119]) der Kurve (1) und die entsprechende für (3) und (4):

$$(5)\quad A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \qquad (6)\quad B^v = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & v_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & v_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung von Kurve und Gerader, beziehungsweise dem Schnittpunktepaare beider eigentümliche Konstante. Durch Entwicklung nach den Elementen der letzten Zeile und Kolonne ergibt sich:

$$(7)\quad A^u = -\sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl} u_k u_l, \qquad (8)\quad B^v = -\sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n B_{mn} v_m v_n.$$

Die negative geränderte Determinante ist daher die Form F in § 41, (21):

$$A^u = -F. \tag{9}$$

Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 3, (2)) ist wie in § 41, 6 mit Rücksicht auf § 41, (24):

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & v_1 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & v_2 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & 0 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & 0 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & v_1 \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & v_2 \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & v_1 \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & v_2 \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & 0 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & 0 \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

und danach in Übereinstimmung mit der zweiten Gleichung § 41, (23):

$$(10) \qquad B^v = S^2 A^u.$$

Die geänderte Determinante ist Simultaninvariante von Kurve und Gerader.

3. Invarianteneigenschaft der Kurve und zweier Geraden. Besteht neben den beiden Gleichungen (1) und (2) auch noch die Gleichung:

$$(11) \qquad u' = \sum_1^3{}^k u_k' x_k = 0,$$

so liegt der Schnittpunkt der beiden Geraden u und u' auf der Kurve f.

Bei der Transformation wird wie in (4):

$$(12) \qquad u' = \sum_1^3{}^m v_m' y_m = 0.$$

Die mit den Koordinaten der beiden Geraden (2) und (11) geränderte Determinante der Kurve (1):

$$(13) \qquad A^{uu'} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 & u_1' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 & u_2' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 & u_3' \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \\ u_1' & u_2' & u_3' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist eine der Zusammenstellung der Kurve und des Schnittpunktes der beiden Geraden eigentümliche Konstante, die sich nicht ändert, wenn für u, u' zwei andere durch den Schnittpunkt gehende Gerade gesetzt werden (I § 30, (24'); Anm. 1, IV, 4). In gleicher Weise sei:

$$(14) \qquad B^{vv'} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & v_1 & v_1' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Wie in 2 ergibt sich, wenn S als Determinante fünften Grades dargestellt wird:

$$(15) \qquad B^{vv'} = S^2 A^{uu'}.$$

Die zweifach geänderte Determinante ist Simultaninvariante von Kurve und Punkt.

4. Entwicklung der zweifach geränderten Determinante nach Punktkoordinaten. Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden (2) und (11) sind (I § 29, (13)) im alten und neuen System:

$$(16) \qquad x_k = \begin{vmatrix} u_{k_1} & u_{k_1}' \\ u_{k_2} & u_{k_2}' \end{vmatrix}, \qquad S y_m = \begin{vmatrix} v_{m_1} & v_{m_1}' \\ v_{m_2} & v_{m_2}' \end{vmatrix},$$

$k \cdot k_1 k_2,\ m \cdot m_1 m_2 = 1 \cdot 23,\ 2 \cdot 31,\ 3 \cdot 12$. Der an sich unwesentliche Faktor S ist hinzugefügt, um den Formeln § 41, (24) zu entsprechen, für die nach dem Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 2, (3)):

$$\begin{vmatrix} v_{m_1} & v'_{m_1} \\ v_{m_2} & v'_{m_2} \end{vmatrix} = \sum^{k_1 k_2} \begin{vmatrix} x_{k_1}^{(m_1)} & x_{k_2}^{(m_1)} \\ x_{k_1}^{(m_2)} & x_{k_2}^{(m_2)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{k_1} & u'_{k_1} \\ u_{k_2} & u'_{k_2} \end{vmatrix} = \sum^{k} u_k^{(m)} x_k = S y_m.$$

Damit gibt *die Entwicklung der Determinanten* (13) *und* (14) *nach den Unterdeterminanten der beiden letzten Zeilen und Kolonnen:*

$$(17) \qquad A^{uu'} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = f, \qquad B^{vv'} = S^2 \sum^m \sum^n b_{mn} y_m y_n.$$

Die Invarianteneigenschaft (15) folgt daher auch aus der ersten Gleichung § 41, (23).

5. Entwicklung der zweifach geränderten Determinante nach Linienkoordinaten. Statt nach den Elementen der beiden letzten Zeilen und Kolonnen entwickeln wir jetzt die Determinante (13) nur nach einer letzten Zeile und Kolonne und bezeichnen zu dem Zwecke diejenigen neun Unterdeterminanten vierten Grades der geränderten Determinante A^u in (5), die zugleich die geränderten Unterdeterminanten A_{kl} der Determinante A sind, mit:

$$(18) \qquad A_{kl}^u = \begin{vmatrix} a_{k_1 l_1} & a_{k_1 l_2} & u_{k_1} \\ a_{k_2 l_1} & a_{k_2 l_2} & u_{k_2} \\ u_{l_1} & u_{l_2} & 0 \end{vmatrix},$$

wo k und l, wie bei (16), die Nummern der Variationen $k_1 k_2$ und $l_1 l_2$ in der Reihe $23, 31, 12$ sind. Entsprechend bezeichnen wir die Unterdeterminanten von B^v in (6).

Die Entwicklung der Determinanten (13) *und* (14) *gibt dann:*

$$(19) \qquad A^{uu'} = -\sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u'_k u'_l, \quad B^{vv'} = -\sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n B_{mn}^v v'_m v'_n.$$

Vermöge der Transformation von dem einen Koordinatendreieck auf das andere ist dann nach (15), anschließend an § 41, (23):

$$(20) \qquad S^2 \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u'_k u'_l = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n B_{mn}^v v'_m v'_n$$

identisch in bezug auf die beiden Geraden u_k, v_m und u'_l, v'_n.

6. Beziehung der geränderten Determinanten zueinander. Setzt man in der Identität (20) mit Rücksicht auf § 41, (22); (24) entweder links:

(21) $$S u_k' = \sum^m u_k^{(m)} v_m', \qquad S u_l' = \sum^n u_l^{(n)} v_n'$$

oder rechts:

(22) $$v_m' = \sum^k x_k^{(m)} u_k', \qquad v_n' = \sum^l x_l^{(n)} u_l',$$

so folgt identisch in v_m', v_n' bezüglich u_k', u_l':

$$\sum^k \sum^l A_{kl}^u \sum^m \sum^n u_k^{(m)} v_m' u_l^{(n)} v_n' = \sum^m \sum^n \left\{ \sum^k \sum^l A_{kl}^u u_k^{(m)} u_l^{(n)} \right\} v_m' v_n'$$
$$= \sum^m \sum^n B_{mn}^v v_m' v_n'$$

und:

$$S^2 \sum^k \sum^l A_{kl}^u u_k' u_l' = \sum^m \sum^n B_{mn}^v \sum^k \sum^l x_k^{(m)} u_k' x_l^{(n)} u_l'$$
$$= \sum^k \sum^l \left\{ \sum^m \sum^n B_{mn}^v x_k^{(m)} x_l^{(n)} \right\} u_k' u_l'.$$

Durch Gleichsetzen der beiderseitigen Koeffizienten von $v_m' v_n'$ und $u_k' u_l'$ ergibt sich daher anschließend an § 41, (20); (25):

Zwischen den geränderten Unterdeterminanten zweiten Grades A_{kl} *und* B_{mn} *der ursprünglichen Determinante* A *und der transformierten* B *bestehen die Beziehungen:*

(23) $$\begin{cases} B_{mn}^v = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u_k^{(m)} u_l^{(n)}, \\ S^2 A_{kl}^u = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n B_{mn}^v x_k^{(m)} x_l^{(n)}. \end{cases}$$

§ 44. Einteilung der Schnittpunktpaare nach dem Range.

1. Einführung der schneidenden Geraden als Koordinatenseite. Die auf das ursprüngliche Koordinatendreieck $E_1 E_2 E_3$ bezogenen Gleichungen:

(1) $$f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0 \qquad (2) \qquad u = \sum_1^3{}^k u_k x_k = 0$$

des Schnittpunktpaares einer Kurve zweiter Ordnung f und einer Geraden u erhalten in einem neuen Koordinatendreieck mit den Ecken $J_1 J_2 J_3$ die Form § 43, (3); (4).

Nimmt man dabei die Gerade u selbst als Seite i_3 des neuen Dreiecks, so werden:

(3) $$u_1^{(3)} = u_1, \quad u_2^{(3)} = u_2, \quad u_3^{(3)} = u_3$$

die alten und mit Rücksicht auf § 41, (24) und die Definition der $u_k^{(m)}$ in § 41, 7 (I Anm. 1, II, (6)):

$$(4) \qquad v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = \sum_1^3 {}^k x_k^{(3)} u_k^{(3)} = S$$

die neuen Koordinaten der schneidenden Geraden.

Die Gleichungen des Schnittpunktpaares im neuen Koordinatendreieck $J_1 J_2 J_3$ lauten daher:

$$(5) \quad f = \sum_1^3 {}^m \sum_1^3 {}^n b_{mn} y_m y_n = 0, \qquad (6) \qquad u = S y_3 = 0.$$

2. Gleichung des Schnittpunktpaares auf seiner Geraden. Für alle Punkte der Seite i_3 ist $y_3 = 0$, und sind y_1, y_2 zugleich Zweieckskoordinaten in bezug auf das Zweieck $J_1 J_2$ (I § 28, **16**).

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Kurve f mit der Geraden u lautet daher in Zweieckskoordinaten in bezug auf das Zweieck $J_1 J_2$:

$$(7) \qquad b_{11} y_1^2 + 2 b_{12} y_1 y_2 + b_{22} y_2^2 = 0 \quad (b_{kl} = f_{kl}).$$

Die Gerade u kann dabei, statt durch die Gleichung (2), auch durch die beiden Punkte $J_1 = x_k^{(1)}$, $J_2 = x_k^{(2)}$ gegeben sein, da die Koeffizienten b_{mn} direkt von a_{kl}, $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$ abhängen (§ 41, (20)). Man erhält die Gleichung (7) auch dadurch, daß man in (1) die Parameterdarstellung der Punkte x_k der Verbindungslinie der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ (I § 30, (24)) einführt (vgl. § 10, 2).[45])

3. Der Rang des Schnittpunktpaares nach seiner Determinante auf der Geraden. Die Determinante des Punktepaares (7), sofern es für sich in der Geraden $J_1 J_2$ betrachtet wird, ist:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = B_{33},$$

wo B_{33} der bereits § 41, 7 für die Unterdeterminanten von B eingeführten Bezeichnung entspricht, also (§ 39, 8):

Das Punktepaar, in dem die Kurve (1) *von der Geraden der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ geschnitten wird, ist ein getrenntes Punktepaar, wenn:*

$$(9) \qquad B_{33} \neq 0;$$

ein Doppelpunkt, wenn:

$$(10) \qquad B_{33} = 0, \quad b_{11}, b_{12}, b_{22} \text{ nicht alle } 0;$$

unbestimmt, wenn:

$$(11) \qquad b_{11} = 0, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = 0.$$

4. Der Rang des Schnittpunktpaares nach seiner Determinante in der Ebene. Die mit den Koordinaten der Geraden (6) geränderte Determinante der Kurve (5) ist nach § 43, (6):

$$(12)\qquad B^v = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & S \\ 0 & 0 & S & 0 \end{vmatrix} = -S^2 B_{33}.$$

Ferner wird:

$$(13)\qquad B_{11}^v = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & 0 \\ b_{32} & b_{33} & S \\ 0 & S & 0 \end{vmatrix} = -S^2 b_{22}, \quad B_{22}^v = -S^2 b_{11}, \quad B_{12}^v = S^2 b_{12}, \quad B_{23}^v = 0, \quad B_{31}^v = 0, \quad B_{33}^v = 0.$$

Nach § 43, (10); (23) ist somit:

$$(14)\qquad A^u = -B_{33};$$

$$(15)\qquad -S^2 b_{11} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u_k^{(2)} u_l^{(2)}, \quad S^2 b_{12} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u_k^{(1)} u_l^{(2)}, \quad -S^2 b_{22} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u_k^{(1)} u_l^{(1)};$$

$$(16)\qquad -A_{kl}^u = b_{11} x_k^{(2)} x_l^{(2)} - 2 b_{12} x_k^{(1)} x_l^{(2)} + b_{22} x_k^{(1)} x_l^{(1)}.$$

Danach sind A^u und B_{33} stets gleichzeitig Null oder nicht Null und verschwinden alle A_{kl}^u ($k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$) immer dann und nur dann, wenn alle b_{11}, b_{12}, b_{22} verschwinden.[120])

Das Punktepaar, in dem die Kurve (1) *von der Geraden* (2) *geschnitten wird, ist daher nach* **3** *ein getrenntes Punktepaar, wenn:*

$$(17)\qquad A^u \neq 0;$$

ein Doppelpunkt, wenn:

$$(18)\qquad A^u = 0, \textit{ aber nicht alle } A_{kl}^u \textit{ verschwinden } (k, l = 1, 2, 3);$$

unbestimmt, wenn:

$$(19)\qquad A^u = 0 \text{ und } \textit{alle } A_{kl}^u = 0.$$

5. Bedingungen für die Koordinaten eines Doppelpunktes. In der Gleichung (7) fehlt immer dann und nur dann die Koordinate y_2, wenn:

$$(20)\qquad b_{12} = f_{12} = 0, \quad b_{22} = f_{22} = 0$$

oder nach § 41, (6):

$$(21)\qquad \sum_1^3{}^k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^3{}^k f_k^{(2)} x_k^{(2)} = 0.$$

Diese Gleichungen bedeuten aber, daß $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}$ die Koordinaten einer Geraden sind, die mit jedem der Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ vereinigt liegt, also die Gerade (2) selbst ist, so daß mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ:

$$(22) \qquad f_k^{(2)} + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Hierzu tritt noch die Bedingung der vereinigten Lage von $x_k^{(2)}$ und u_k:

$$(23) \qquad \sum_1^3{}^k u_k x_k^{(2)} = 0.$$

In der Gleichung (7) des Schnittpunktpaares fehlt immer dann und nur dann die Koordinate y_2, wenn die Ecke $J_2 = x_k^{(2)}$ des neuen Dreiecks unter Elimination von ϱ den vier Gleichungen genügt:

$$(24) \quad f_k + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3; \qquad (24') \quad \sum_1^3{}^k u_k x_k = 0$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(25) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varrho u_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \varrho u_3 = 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen (24) mit x_k und addiert, so folgt mit Rücksicht auf (24′) und § 41, (4):

$$f = 0.$$

Jeder Punkt, der den Gleichungen (25) genügt, gehört selbst dem Punktepaar (1), (2) an. Er ist eben Doppelpunkt (singulärer Punkt) des Paares (§ 39, **10**).

6. Eigentliche Punktepaare. Unter der Voraussetzung (17) gibt es (§ 43, (5)) keinen Punkt, der den Gleichungen (25) genügt. Die Gleichung (7) enthält stets *beide* Koordinaten y_1, y_2 und stellt ein eigentliches Punktepaar dar, wie schon unter **4** gezeigt wurde.

Wenn die Kurve (1) eine Doppellinie ist, also alle A_{kl} verschwinden (§ 42, 7), kann nach § 43, (7) die Bedingung (17) niemals erfüllt sein.

Eigentliche Schnittpunktpaare kommen nur bei den eigentlichen Kurven zweiter Ordnung und bei den getrennten Linienpaaren vor.

7. Koordinaten des Doppelpunktes. Unter den Bedingungen (18) schneidet die Gerade (2) die Kurve (1) in einem zusammenfallenden Punktepaar oder Doppelpunkt x_k^0, für den die Auflösung

der Gleichungen (25) mit den sechzehn Unterdeterminanten der Determinante § 43, (5) ergibt:

(26) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 : \varrho = A_{k1}^{u} : A_{k2}^{u} : A_{k3}^{u} : A_{k4}^{u},$$

$k = 1, 2, 3, 4$; der Punkt ist schon durch die drei ersten Glieder der Proportion bestimmt.

Führt man den Punkt (26) als Ecke $x_k^{(2)}$ ein, so wird die Gleichung (7):

(27) $$b_{11} y_1^2 = 0.$$

Nach (26) ist:

$$\begin{aligned} x_1^0 x_1^0 : x_1^0 x_2^0 : x_1^0 x_3^0 : x_1^0 \varrho &= A_{11}^{u} : A_{12}^{u} : A_{13}^{u} : A_{14}^{u}, \\ x_2^0 x_1^0 : x_2^0 x_2^0 : x_2^0 x_3^0 : x_2^0 \varrho &= A_{21}^{u} : A_{22}^{u} : A_{23}^{u} : A_{24}^{u}, \\ x_3^0 x_1^0 : x_3^0 x_2^0 : x_3^0 x_3^0 : x_3^0 \varrho &= A_{31}^{u} : A_{32}^{u} : A_{33}^{u} : A_{34}^{u}, \\ \varrho x_1^0 \quad : \varrho x_2^0 \quad : \varrho x_3^0 \quad : \varrho\varrho \quad &= A_{41}^{u} : A_{42}^{u} : A_{43}^{u} : A_{44}^{u} \end{aligned}$$

und wegen der übergreifenden Glieder, wie $x_1^0 x_2^0$ und $x_2^0 x_1^0$, bezüglich A_{12}^{u} und A_{21}^{u} von der ersten zur zweiten Zeile, mit demselben Proportionalitätsfaktor τ und für $k, l = 1, 2, 3$ [121]):

(28) $\tau x_k^0 x_l^0 = A_{kl}^{u}$, (29) $\tau x_k^0 \varrho = A_{k4}^{u}$, (30) $\tau \varrho^2 = A_{44}^{u} = A$.

Da für (27), die Bedingungen (10) vorausgesetzt, nunmehr neben (20) jedenfalls:

(31) $$b_{11} \neq 0,$$

so folgt aus (16):

$$-A_{kl}^{u} = b_{11} x_k^0 x_l^0,$$

und damit für den Faktor τ in (28)—(30):

(32) $$\tau = -b_{11}.$$

Schneidet die Gerade (2) *unter der Voraussetzung* (18) *die Kurve* (1) *in zwei zusammenfallenden Punkten* x_1^0, x_2^0, x_3^0, *so gelten für die Unterdeterminanten der mit den Koordinaten der Geraden* (2) *geänderten Determinante der Kurve* (1) *die Gleichungen:*

(33) $A_{kl}^{u} = -b_{11} x_k^0 x_l^0$, (34) $A_{k4}^{u} = -\varrho b_{11} x_k^0$, (35) $A = -\varrho^2 b_{11}$,

wo k *und* l *je* $= 1, 2, 3$.

Nach § 43, (19) *wird daher die zweifach geänderte Determinante:*

(36) $$A^{uu'} = b_{11} \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l x_k^0 x_l^0 u_k' x_l' = b_{11} \Big(\sum_1^3{}_k x_k^0 u_k'\Big)^2$$

bis auf einen Faktor ein vollständiges Quadrat. [118])

8. Andere Form der Bedingungen des Doppelpunktes. Für die Determinante A^u in § 43, (5) gelten (I Anm. 1, III, (9)) unbedingt die Formeln:

$$\begin{vmatrix} A_{22}^u & A_{23}^u \\ A_{32}^u & A_{33}^u \end{vmatrix} = A^u \begin{vmatrix} a_{11} & u_1 \\ u_1 & 0 \end{vmatrix}$$

oder:

(37) $$A_{22}^u A_{33}^u - (A_{23}^u)^2 = -A^u u_1^2$$

und ebenso:

(37) $$A_{33}^u A_{11}^u - (A_{31}^u)^2 = -A^u u_2^2, \quad A_{11}^u A_{22}^u - (A_{12}^u)^2 = -A^u u_3^2.$$

Setzt man daher:

(38) $$A'^u = A_{11}^u + A_{22}^u + A_{33}^u,$$

so wird:

(39) $$\begin{cases} A_{11}^u A'^u = (A_{11}^u)^2 + (A_{12}^u)^2 + (A_{13}^u)^2 - A^u(u_2^2 + u_3^2), \\ A_{22}^u A'^u = (A_{21}^u)^2 + (A_{22}^u)^2 + (A_{23}^u)^2 - A^u(u_3^2 + u_1^2), \\ A_{33}^u A'^u = (A_{31}^u)^2 + (A_{32}^u)^2 + (A_{33}^u)^2 - A^u(u_1^2 + u_2^2). \end{cases}$$

Durch Addition folgt daraus die *identische Gleichung*[80]:

(40) $$(A'^u)^2 = (A_{11}^u)^2 + (A_{22}^u)^2 + (A_{33}^u)^2 + 2(A_{23}^u)^2 + 2(A_{31}^u)^2 + 2(A_{12}^u)^2 - 2A^u(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2).$$

Die Bedingungen (18) *des Doppelpunktes sind daher* (§ 19, (9)) *ersetzbar durch:*

(41) $$A^u = 0, \quad A'^u \neq 0.$$

9. Unbestimmtes Punktepaar. Unter der Bedingung (19) ist das Schnittpunktpaar (1), (2) unbestimmt, die Gerade (2) gehört ganz der Kurve (1) an.

Man kann die Bedingungen hierfür auch unmittelbar erhalten. Setzt man nämlich unter der Voraussetzung $u_3 \neq 0$ den aus (2) folgenden Wert von x_3 in (1) ein:

$$u_3^2(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2) + a_{33}(u_1x_1 + u_2x_2)^2 - 2u_3(a_{13}x_1 + a_{23}x_2)(u_1x_1 + u_2x_2) = 0,$$

so muß diese Gleichung identisch in x_1 und x_2 gelten, also:

$$a_{11}u_3^2 + a_{33}u_1^2 - 2a_{13}u_1u_3 = 0, \quad a_{22}u_3^2 + a_{33}u_2^2 - 2a_{23}u_2u_3 = 0,$$
$$a_{12}u_3^2 + a_{33}u_1u_2 - a_{13}u_2u_3 - a_{23}u_1u_3 = 0,$$

oder:

(42) $$A_{22}^u = 0, \quad A_{11}^u = 0, \quad A_{12}^u = 0.$$

Dies sind also für $u_3 \neq 0$ *die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Zugehörigkeit der Geraden* (2) *zu der Kurve* (1).

Die sechs Bedingungen (19) sind *überzählige.* Sie können übrigens nach (40) ersetzt werden durch:

(43) $$A^u = 0, \quad A'^u = 0.$$

10. Ausschluß unbestimmter Punktepaare bei eigentlichen Kurven. Wenn die Bedingungen $A_{kl}^{u} = 0$ in (19) erfüllt sind, ist auch $A^{u} = 0$ (I Anm. 1, III, (7)). Wenn aber $A^{u} = 0$, so ist (I Anm. 1, III, (17)):

$$(44) \qquad a_{h1} A_{k1}^{u} + a_{h2} A_{k2}^{u} + a_{h3} A_{k3}^{u} + u_h A_{k4}^{u} = 0,$$

für $k = 1, 2, 3, 4$ und $h = 1, 2, 3$, also im Falle (19) für $k = 1, 2, 3$:

$$u_h A_{k4}^{u} = 0 \quad \text{oder} \quad A_{k4}^{u} = A_{4k}^{u} = 0,$$

da u_1, u_2, u_3 nicht alle drei verschwinden. Dann ist aber wieder nach (44) für $k = 4$:

$$u_h A_{44}^{u} = 0 \quad \text{oder} \quad A_{44}^{u} = A = 0.$$

Wenn daher die neun Unterdeterminanten A_{kl}^{u} $(k, l = 1, 2, 3)$ *von* A^{u} *alle verschwinden, so verschwinden auch die sechs Unterdeterminanten* A_{k4}^{u}, A_{4k}^{u} $(k = 1, 2, 3)$, *sowie* $A_{44} = A$.

Eine eigentliche Kurve (1) $(A \neq 0)$ *kann daher niemals die Gerade* (2) *ganz enthalten.*

§ 45. Tangenten und Gleichungen in Linienkoordinaten.

1. Einfache und inzidente Tangenten. Eine Gerade, die *die Kurve zweiter Ordnung* in einem zusammenfallenden Punktepaar (Doppelpunkt) schneidet, heißt eine *(einfache) Tangente* und der Doppelpunkt selbst ihr *Berührungspunkt.* Eine Gerade, die der Kurve ganz angehört, kann als eine *inzidente Tangente* bezeichnet werden; alle ihre Punkte sind Berührungspunkte.

Wenn dual das durch einen Punkt gehende Strahlenpaar einer *Kurve zweiter Klasse* in einen Doppelstrahl zusammenfällt, so heißt der Punkt ein *(einfacher) Berührungspunkt* und der Doppelstrahl selbst seine *Tangente.* Ein Punkt, dessen sämtliche Strahlen der Kurve angehören, kann als *inzidenter Berührungspunkt* bezeichnet werden; alle seine Strahlen sind Tangenten.

Der Inbegriff aller Tangenten u_k der Kurve zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad f = \sum_{1}^{3}{}_{k} \sum_{1}^{3}{}_{l}\, a_{kl} x_k x_l = 0$$

ist nach § 44, (18) durch die Bedingung:

$$(2) \qquad A^{u} = -\sum_{1}^{3}{}_{k} \sum_{1}^{3}{}_{l}\, A_{kl} u_k u_l = 0$$

gekennzeichnet.[122])

2. Beziehung zwischen Tangente und Berührungspunkt. *Zwischen der Tangente* u_k *und dem Berührungspunkt* x_k, bezüglich den

Berührungspunkten, bestehen nach § 44, (24), (24′) die vier Gleichungen:

(3) $f_k + \varrho u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3;$ (3′) $\sum_1^3 {}_k u_k x_k = 0.$

Ist *die Gerade u_k gegeben*, so bestimmt man hieraus nach § 44, 7 unter Elimination von ϱ den Berührungspunkt x_k. Seine Koordinaten sind für eine einfache Tangente:

(4) $$x_1 : x_2 : x_3 = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u,$$

wo $k = 1, 2, 3, 4$ sein kann und bei $k = 4$ mit einem Proportionalitätsfaktor σ sich ergibt:

(5) $$\sigma x_k = A_{k4}^u = - A_{k1} u_1 + A_{k2} u_2 + A_{k3} u_3.$$

Für eine inzidente Tangente haben die Koordinaten x_k nur der Gleichung (3′) zu genügen.

Ist *ein Punkt x_k der Kurve* als Berührungspunkt *gegeben*, so folgt aus (3) für die Koordinaten der Tangente:

(6) $$u_1 : u_2 : u_3 = f_1 : f_2 : f_3 \quad \text{oder} \quad \tau u_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + a_{k3} x_3.$$

Dann ist die Bedingung (3′) nach § 41, (4) schon dadurch erfüllt, daß x_k auf der Kurve liegt.

Die Gleichung der Tangente der Kurve (1) *im Punkte x_k^0 ist daher* (§ 10, (17)):

(7) $$f_1^0 x_1 + f_2^0 x_2 + f_3^0 x_3 = 0.$$

Von den Gleichungen (5) und (6) stellen die einen die Auflösungen der andern dar.

3. Tangenten der eigentlichen Kurven zweiter Ordnung. Die eigentlichen Kurven zweiter Ordnung $A \neq 0$ haben nach § 44, **10** nur einfache Tangenten. Diese genügen der Gleichung (2) und bilden demnach eine Kurve zweiter Klasse (§ 41, (1′)), die wegen:

(8) $$|A_{kl}| = A^2 \neq 0$$

ebenfalls eine eigentliche (§ 42, **3**) ist.

Jede eigentliche Kurve zweiter Ordnung ist auch eigentliche Kurve zweiter Klasse und umgekehrt (§ 18, 7).

Die Werte von x_k und u_k in (5) und (6) können für $A \neq 0$ niemals gleichzeitig verschwinden, also:

Bei den eigentlichen Kurven zweiter Ordnung oder Klasse gehört zu jedem Punkt der Kurve eine bestimmte Tangente und zu jeder Tangente ein bestimmter Berührungspunkt.

4. Tangenten des Linienpaares. Beim Linienpaar wird aus (2) nach § 42, (14):

(9) $$S^2 \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl} u_k u_l = B_{33} \left(\sum_1^3{}^k x_k^0 u_k\right)^2 = 0,$$

wo:

(10) $$x_1^0 : x_2^0 : x_3^0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}$$

die Koordinaten des Doppelpunktes des Linienpaares sind (§ 42, (8)).

Der Inbegriff aller Tangenten deckt sich also mit dem Strahlbüschel an diesem Doppelpunkt.

Unter Weglassung des Quadrats in (9) kann man:

(11) $$\sum_1^3{}^k x_k^0 u_k = 0 \text{ oder: } -A_{k4}^u = A_{k1} u_1 + A_{k2} u_2 + A_{k3} u_3 = 0, \; k = 1, 2, 3$$

als *Gleichung des Doppelpunktes in Linienkoordinaten* ansprechen.

Da für eine einfache Tangente nur ein Berührungspunkt vorhanden ist, den Gleichungen § 44, (25) aber, wenn $A = 0$ ist, durch die Werte (10) in Verbindung mit $\varrho = 0$ genügt wird, so fällt mit:

(12) $$A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}$$

der Berührungspunkt (4) der einfachen Tangente stets in den Doppelpunkt (10) des Linienpaares.

5. Inzidente Tangenten des Linienpaares. Für die beiden Geraden des Linienpaares selbst verschwinden nach § 44, (19) alle A_{kl}^u $(k, l = 1, 2, 3)$. Die Gleichung:

(13) $$-A_{11}^u = a_{22} u_3^2 + a_{33} u_2^2 - 2 a_{23} u_2 u_3 = 0$$

stellt aber für sich allein ein getrenntes Punktepaar auf der Seite $J_2 J_3$ dar, falls:

(14) $$A_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23}^2 \neq 0,$$

also der Doppelpunkt (10) nicht auf der Seite $J_2 J_3$ liegt.

Das Linienpaar wird durch zwei Gleichungen in Linienkoordinaten ausgedrückt, die Gleichung (11), *die den Doppelpunkt, und eine der drei Gleichungen* (§ 19, (18)):

(15) $$A_{11}^u = 0, \quad A_{22}^u = 0, \quad A_{33}^u = 0,$$

deren jede die Schnittpunkte des Linienpaares mit einer der drei Koordinatenseiten darstellt.

Für die *Koordinaten der beiden Geraden* des Paares erhält man aus (13):

$$u_2 : u_3 = a_{23} + \alpha : a_{33} = a_{22} : a_{23} - \alpha, \quad \alpha^2 = -A_{11},$$

und damit aus (11) mit $k = 1$ (I Anm. 1, II, (6)):

(15′) $$u_1 : u_2 : u_3 = a_{31} - \frac{A_{12}}{A_{11}} \alpha : a_{23} + \alpha : a_{33},$$

wo für die Quadratwurzel aus α das eine oder andere Vorzeichen zu nehmen ist. Nach § 19, (6) haben A_{11}, A_{22}, A_{33}, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen.

6. Die Doppelgerade. Bei der Doppelgeraden sind nach § 42, 7 alle $A_{kl} = 0$; ist also nach (2) jede Gerade der Ebene eine Tangente. Für die Doppelgerade u_k^0 selbst sind nach § 44, (19) alle $A_{kl}^u = 0$. Da aber (13) nach § 42, (19):

$$(16) \qquad - S^2 A_{11}^u = b_{11}(u_2^0 u_3 - u_3^0 u_2)^2 = 0$$

ein vollständiges Quadrat wird und den Schnittpunkt der Doppelgeraden mit der Seite $E_2 E_3$ des Koordinatendreiecks darstellt, so *wird die Doppellinie durch zwei von den Gleichungen* (15) *ausgedrückt*, die die Verhältnisse ihrer Linienkoordinaten eindeutig bestimmen.

7. Gleichung des Schnittpunktpaares in Linienkoordinaten. Die Bedingung, daß der Schnittpunkt der beiden Geraden u_k und u_k' auf der Kurve (1) liegt, lautet nach § 43, (17):

$$(17) \qquad A^{uu'} = 0$$

oder in anderer Form nach § 43, (19):

$$(18) \qquad \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}^u u_k' u_l' = 0 .$$

Hält man nun die Gerade u_k fest, so ist dies die Bedingung dafür, daß die laufende Gerade u_k' durch einen Schnittpunkt der Kurve und der Geraden u_k geht oder *die Gleichung des Schnittpunktpaares, in dem die Kurve* (1) *von der Geraden u_k geschnitten wird, in laufenden Strahlenkoordinaten u_k'.*

Die Gleichung (18) stellt in der Tat eine Kurve zweiter Klasse vom Range 2 dar, weil die Determinante (I Anm. 1, III, (8)):

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} A_{11}^u & A_{12}^u & A_{13}^u \\ A_{21}^u & A_{22}^u & A_{23}^u \\ A_{31}^u & A_{32}^u & A_{33}^u \end{vmatrix} = (A^u)^2 . 0 = 0 .$$

8. Gleichung des Berührungspunktes in Linienkoordinaten. Ist die Gerade u_k Tangente der Kurve (1), so wird die Gleichung (18) nach § 44, (36) gleichbedeutend mit:

$$(20) \qquad \left(\sum_1^3{}^k x_k^0 u_k'\right)^2 = 0 ,$$

wo x_k^0 die Koordinaten des Berührungspunktes sind. *Die Gleichung* (17) *oder* (18) *stellt also dann den Berührungspunkt der Tangente u_k in laufenden Koordinaten u_k' dar.* Er erscheint dabei als Kurve zweiter Klasse vom Range 1.

III. Kapitel.

Polardreiecke und Berührungsdreiecke.

§ 46. Polardreieck und Quadratdarstellung.

1. Harmonische Pole. Das Schnittpunktpaar der Kurve § 44, (1) mit der Verbindungslinie der beiden Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ hat nach § 44, (7) in Zweieckskoordinaten y_1, y_2 in bezug auf diese Punkte die Gleichung:

$$f_{11}y_1^2 + 2f_{12}y_1y_2 + f_{22}y_2^2 = 0.$$

Nach § 40, (3) ist daher:

$$f_{12} = 0$$

die Bedingung dafür, daß die Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu dem Schnittpunktpaar harmonisch, also harmonische Pole der Kurve sind.

Die Theorie der harmonischen Pole und ihre Folgerungen finden daher in *Dreieckskoordinaten* x_1, x_2, x_3 formal denselben Ausdruck wie in *homogenen gemeinen Koordinaten* x, y, t, wo ebenfalls die Bedingung § 11, (8) den Ausgangspunkt bildete. Es bedarf daher nur der Angabe der bezüglichen Formeln in Dreieckskoordinaten (§ 11, **5**; § 17, **1**).

In bezug auf die Kurve zweiter Ordnung § 41, (1):

$$(1)\qquad f = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l\, a_{kl}x_kx_l = 0$$

sind zwei Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ harmonische Pole unter der Bedingung:

$$(2)\qquad f_{12} = \sum_1^3{}_k f_k^{(1)}x_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k f_k^{(2)}x_k^{(1)} = 0.$$

In bezug auf die Kurve zweiter Klasse § 41, (1′):

$$(1')\qquad F = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l\, e_{kl}u_ku_l = 0$$

sind zwei Gerade $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ harmonische Polaren unter der Bedingung:

$$(2')\qquad F_{12} = \sum_1^3{}_k F_k^{(1)}u_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k F_k^{(2)}u_k^{(1)} = 0.$$

2. Koordinaten der Polarelemente. In bezug auf (1), bezüglich (1′) sind ferner (§ 11, (21); (26); § 17, (8); (9)) die Koordinaten

der Polare eines Punktes x_l:

$$(3)\qquad \varrho u_k = f_k = \sum_1^3{}_l\, a_{kl}x_l;$$

des Poles einer Geraden u_l:

$$(4)\qquad \varrho x_k = F_k = \sum_1^3{}_l\, A_{kl}u_l.$$

des Poles einer Geraden u_l:

$$(3')\qquad \sigma x_k = F_k = \sum_1^3{}_l\, e_{kl}u_l;$$

der Polare eines Punktes x_l:

$$(4')\qquad \sigma u_k = f_k = \sum_1^3{}_l\, E_{kl}x_l.$$

3. Konjugierte Elemente. Weiter ist (§ 11, (9); § 17, (3)):

$$(5)\quad f_{12} = \sum_1^3{}_k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l a_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = 0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Punkte* $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ oder (§ 11, (15)) die *Gleichung der Polare* des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Koordinaten $x_k^{(2)}$;

$$(5')\quad F_{12} = \sum_1^3{}_k F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l e_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Gerade* $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ oder (§ 17, (6)) die *Gleichung des Poles* der Geraden $u_k^{(1)}$ in laufenden Koordinaten $u_k^{(2)}$;

$$(6)\quad F_{12} = \sum_1^3{}_k F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l A_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte* Gerade $u_k^{(1)}$ und $u_k^{(2)}$ (§ 11, (28)) oder die *Gleichung des Poles* der Geraden $u_k^{(1)}$ in laufenden Linienkoordinaten $u_k^{(2)}$ (§ 11, (27)).

$$(6')\quad f_{12} = \sum_1^3{}_k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l E_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = 0$$

die Bedingung für *zwei konjugierte Punkte* $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ (§ 17, (11)) oder die *Gleichung der Polare* des Punktes $x_k^{(1)}$ in laufenden Punktkoordinaten $x_k^{(2)}$ (§ 17, (10)).

4. Eigentliche Kurven zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der *eigentlichen* Kurve zweiter Ordnung und Klasse lauten nach § 18, (9); (10) *in Punkt- und Linienkoordinaten* (mit $e_{kl} = A_{kl}$):

$$(7)\quad f = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l a_{kl} x_k x_l = 0 \qquad (7')\quad F = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l A_{kl} u_k u_l = 0.$$

Von den Gleichungen *zwischen den Koordinaten von Pol und Polare* (3), (4), (3'), (4'):

$$(8)\quad \varrho u_k = f_k = \sum_1^3{}_l a_{kl} x_l \qquad (8')\quad \sigma x_l = F_l = \sum_1^3{}_k A_{kl} u_k$$

sind (§ 18, **9**) mit $\varrho\sigma = A$ die einen die *Auflösungen* der andern.

Die Bedingungen (5), (6), (5'), (6') der *konjugierten Punkte und Geraden* ziehen sich auf zwei zusammen:

$$(9)\quad f_{12} = \sum_1^3{}_k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l a_{kl} x_k^{(1)} x_l^{(2)} = 0,$$

$$(9')\quad F_{12} = \sum_1^3{}_k F_k^{(1)} u_k^{(2)} = \sum_1^3{}_k \sum_1^3{}_l A_{kl} u_k^{(1)} u_l^{(2)} = 0.$$

5. Die uneigentlichen Kurven zweiter Ordnung oder Klasse. Die *uneigentlichen* Kurven zweiter Ordnung sind nicht zugleich Kurven zweiter Klasse (§ 19, **1**). Es gelten daher nur die links stehenden Formeln (1)—(6) ohne Beziehung zu den rechts stehenden. Das Umgekehrte gilt für die uneigentlichen Kurven zweiter Klasse. Charakteristisch für alle diese Kurven ist das Auftreten *unbestimmter Polarelemente.*

Punkte unbestimmter Polaren, den Gleichungen:

$$(10)\qquad \sum_1^3{}_l\, a_{kl} x_l = 0$$

genügend, sind beim Geradenpaar der Doppelpunkt (§ 20, (57)), bei den Doppelgeraden alle Punkte der Kurve.

Gerade unbestimmten Poles:

$$(11)\qquad \sum_1^3{}_l\, A_{kl} u_l = 0$$

sind beim Geradenpaar alle Geraden durch den Doppelpunkt (§ 20, (58)), bei der Doppelgeraden alle Geraden der Ebene.

Gerade unbestimmten Poles, den Gleichungen:

$$(10')\qquad \sum_1^3{}_l\, e_{kl} u_l = 0$$

genügend, sind beim Punktepaar die Doppelgerade, beim Doppelpunkt alle Geraden der Kurve.

Punkte unbestimmter Polare:

$$(11')\qquad \sum_1^3{}_l\, E_{kl} x_l = 0$$

sind beim Punktepaar alle Punkte auf der Doppelgeraden, bei dem Doppelpunkt alle Punkte der Ebene.

6. Polzweiecke und Quadratdarstellung des Schnittpunktpaares. Zwei *getrennte* harmonische Pole bilden ein *Polzweieck der Kurve* (1), zwei *getrennte* harmonische Polaren ein *Polarenzweiseit der Kurve* (1′).

Da die Bedingung (2) der harmonischen Pole gleichzeitig das Fehlen des Produktgliedes in der Gleichung § 44, (7) ausdrückt, so ergibt sich (§ 40, (4)):

Die Gleichung des Schnittpunktpaares einer Geraden mit der Kurve (1) *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

$$(12)\qquad f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 = 0,$$

wenn die auf der Geraden liegenden Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, *auf die sich die Zweieckskoordinaten* y_1, y_2 *beziehen, ein Polzweieck der Kurve bilden.*

Die Gleichung des Tangentenpaares von einem Punkt an die Kurve (1′) *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

$$(12')\qquad F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 = 0,$$

wenn die durch den Punkt gehenden Geraden $u_k^{(1)}$, $u_k^{(2)}$, *auf die sich die Zweiseitskoordinaten* v_1, v_2 *beziehen, ein Polarenzweiseit der Kurve bilden.*

Nach § 40, **3** gibt es auf jeder Geraden, die nicht ganz der Kurve (1) angehört, ∞^1 Polzweiecke. Ist das Punktepaar ein getrenntes,

gehört keine, ist es ein zusammenfallendes, gehört eine Ecke des Polzweiecks der Kurve an.

7. Begriff des Poldreiecks und Polarendreiecks.[123])

I. *Ein Dreieck ist ein Poldreieck der Kurve* (1), *wenn jede seiner Ecken harmonischer Pol jeder der beiden andern ist.*

I'. *Ein Dreiseit ist ein Polarendreiseit der Kurve* (1'), *wenn jede seiner Seiten harmonische Polare jeder der beiden andern ist.*

Aus § 11, 7 und § 17, 3 ergibt sich dann die weitere charakteristische Eigenschaft:

II. *Bei einem Poldreieck ist jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke.*

II'. *Bei einem Polarendreiseit ist jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite.*

8. Konstruktion eines Poldreiecks. I. Um ein Poldreieck $J_1 J_2 J_3$ zu konstruieren, nimmt man einen Punkt J_1, der nicht auf der Kurve liegt, dessen Polare i_1 also nach § 11, **9**, I nicht durch J_1 geht; auf dieser nimmt man wieder einen Punkt J_2 an, der nicht auf der Kurve liegt (vgl. jedoch unten **12**), dessen Polare i_2 also nicht durch J_2, aber nach § 11, **14**, II durch J_1 geht. Der Schnittpunkt J_3 von i_1 und i_2, dessen Polare i_3 nach § 11, **14**, II durch J_1 und J_2 geht, bildet mit J_1 und J_2 ein Poldreick.

Nach § 11, **8** ist in einem der Kurve einbeschriebenen vollständigen Viereck die Verbindungslinie zweier Nebenecken die Polare der dritten (in Fig. 54 $R_1 R_2$ Polare von P_1, $R_2 P_1$ von R_1, $P_1 R_1$ von R_2; $P_1 R_1 R_2$ ein Poldreieck).

II. *Die drei Nebenecken eines der Kurve einbeschriebenen vollständigen Vierecks bilden ein Poldreieck.*

9. Poldreieck und Quadratdarstellung der Kurve. Transformiert man die Gleichung (1) auf ein neues Koordinatendreieck $J_1 J_2 J_3$, so sind die Bedingungen, daß in der transformierten Gleichung § 42, (2) die Produktglieder fehlen, nämlich:

$$b_{23} = f_{23} = 0, \qquad b_{31} = f_{31} = 0, \qquad b_{12} = f_{12} = 0, \tag{13}$$

nach (2) gleichzeitig die Bedingungen, daß die neuen Ecken $x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, x_k^{(3)}$ ein Poldreieck bilden.

Die Gleichung der Kurve zweiter Ordnung (1) *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

$$f = f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 + f_{33} y_3^2 = 0, \tag{14}$$

Die Gleichung der Kurve zweiter Klasse (1') *erhält immer dann und nur dann die rein quadratische Form:*

$$F = F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 + F_{33} v_3^2 = 0, \tag{14'}$$

wenn das Koordinatendreieck, auf das sich die Koordinaten y_k beziehen, ein Poldreieck ist.[114])

wenn das Koordinatendreiseit, auf das sich die Koordinaten v_k beziehen, ein Polarendreiseit ist.

Die Determinante der Form (14):

$$(15)\qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} b_{22} b_{33}, \quad b_{kl} = f_{kl},$$

hat die Unterdeterminanten:

$$(16)\qquad B_{11} = b_{22} b_{33}, \quad B_{22} = b_{33} b_{11}, \quad B_{33} = b_{11} b_{22}, \quad B_{23} = B_{31} = B_{12} = 0.$$

In bezug auf ein Poldreieck, in bezug auf das die Form f die Gestalt (14) hat, erhält daher nach § 41, (23) die kovariante Form F (§ 41, (21)) die Gestalt:

$$(17)\qquad S^2 F = B_{11} v_1^2 + B_{22} v_2^2 + B_{33} v_3^2.$$

10. Polardreiecke der eigentlichen Kurve zweiter Ordnung und Klasse. Bei der eigentlichen Kurve *ist jedes Poldreieck zugleich Polarendreiseit* und umgekehrt, da die Erklärungen 7, II und II′ nach § 18, 9 dasselbe besagen. Wir nennen das sich selbst duale Gebilde ein *Polardreieck.* Aus 7 und 8 geht dann hervor:

I. *Je zwei Ecken und ebenso je zwei Seiten eines Polardreiecks sind einander konjugiert.*

II. *Jede Ecke ist der Pol der gegenüberliegenden Seite, jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke.*

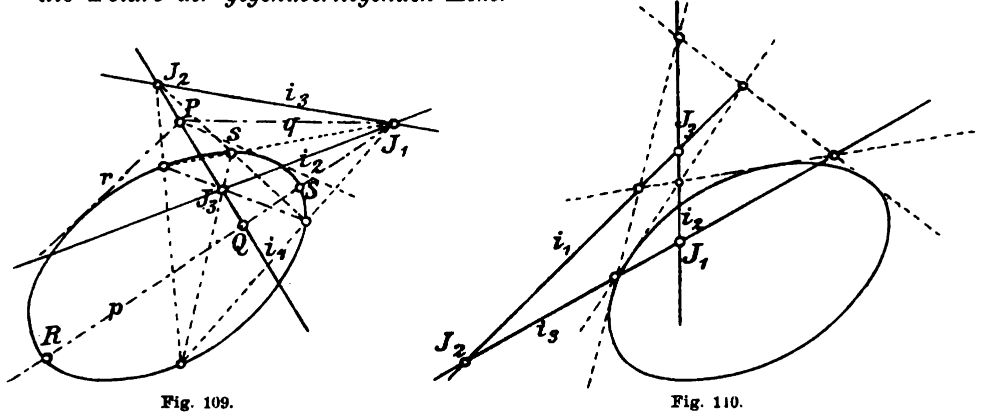


Fig. 109. Fig. 110.

III. *Die drei Nebenecken $J_1 J_2 J_3$ eines der Kurve einbeschriebenen vollständigen Vierecks bilden ein Polardreieck* (Fig. 109).

III′. *Die drei Nebenseiten $i_1 i_2 i_3$ eines der Kurve umbeschriebenen Vierseits bilden ein Polardreieck* (Fig. 110).

IV. *Jeder durch eine Ecke J_1 eines Polardreiecks gehende Strahl p wird von der gegenüberliegenden Seite i_1 und der Kurve harmonisch geteilt* (Fig. 109 R, S zu J_1, Q harmonisch).

IV'. *An jedem auf einer Seite i_1 eines Polardreiecks liegenden Punkte P sind diese Seite, die Verbindungslinie mit der gegenüberliegenden Ecke und die beiden Tangenten der Kurve harmonisch* (in Fig. 109 r, s zu i_1, q harmonisch).

Die Polare i_1 irgendeines der ∞^2 nicht auf der Kurve liegenden Punkte J_1 der Ebene schneidet nach § 11, **9** und § 10, **3** die Kurve in zwei *getrennten* Punkten S_2, S_3, und zu diesen gibt es nach § 40, **3** ∞^1 Paare harmonischer Pole J_2, J_3, deren keiner auf der Kurve liegt. Aus **8**, I ergibt sich daher:

V. *Die eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse besitzt ∞^3 (reelle) Polardreiecke.*

VI. *Keine Ecke eines Polardreiecks kann ein Punkt, keine Seite eine Tangente der Kurve selbst sein.*

VII. *Die Gleichungen* (7), (7') *der Kurve in Punkt- und Linienkoordinaten nehmen in bezug auf ein Polardreieck die zusammengehörigen Formen an:*

$$f = b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0, \tag{18}$$

$$S^2F = B_{11}v_1^2 + B_{22}v_2^2 + B_{33}v_3^2 = 0. \tag{18'}$$

Nach § 42, **1** folgt mit Rücksicht auf (15) und (16) und im Einklang mit **10**, VI:

VIII. *Keiner der beiden Koeffizienten b_{kk} oder B_{kk} kann verschwinden.*

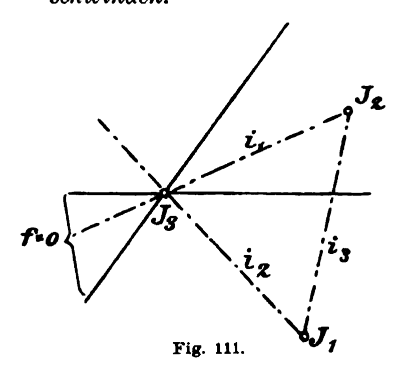


Fig. 111.

11. Poldreiecke der Linienpaare. Da beim Linienpaare $f = 0$ nach § 19, **4**, I die Polaren aller nicht auf der Kurve liegenden Punkte durch den Doppelpunkt gehen, fällt der Punkt J_3 in der Konstruktion **8**, I stets in den Doppelpunkt, der seinerseits zu jedem Punkte der Ebene, also auch zu den in **8**, I benutzten Punkten J_1 und J_2 konjugiert ist. Die Punkte J_1, J_2 können als zwei harmonische Pole gelten, die auf einer beliebigen, nicht durch den Doppelpunkt gehenden Geraden liegen (Fig. 111).

I. *Das Linienpaar besitzt ∞^3 Poldreiecke.*

I'. *Das Punktepaar besitzt ∞^3 Polarendreiseite.*

II. *Die eine Ecke fällt stets in den Doppelpunkt, die beiden andern sind zwei nicht auf der Kurve liegende harmonische Pole.*

II'. *Die eine Seite fällt stets in die Doppelgerade, die beiden andern sind zwei nicht durch einen Punkt des Paares gehende harmonische Polaren.*

Da J_3 auf der Kurve liegt, verschwindet in (14) $b_{33} = f_{33}$, während b_{11} und b_{22} nicht verschwinden, da nicht alle Unterdeterminanten (16) verschwinden können (§ 42, **1**).

III. *Die Gleichung der Kurve* (1) *wird in bezug auf ein Poldreieck:*

(19) $f = f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 = 0.$

III'. *Die Gleichung der Kurve* (1) *wird in bezug auf ein Polarendreieck:*

(19') $F = F_{11} v_1^2 + F_{22} v_2^2 = 0.$

IV. *Keiner der Koeffizienten* f_{11}, f_{22} (F_{11}, F_{22}) *kann verschwinden.*

Die kovariante Form (17) des Linienpaares f wird gleichzeitig:

$$S^2 F = B_{33} v_3^2. \tag{20}$$

12. Poldreiecke der Doppellinien. Da bei der Doppellinie nach § 19, **7** die Polare jedes Punktes in die Doppellinie fällt, fällt schon der Punkt J_2 in der Konstruktion 8, I auch auf die Kurve.

I. *Die Doppellinie besitzt* ∞^4 *Poldreiecke.*

II. *Die eine Ecke ist ein beliebiger Punkt der Ebene, die beiden andern zwei beliebige Punkte der Doppellinie.*

III. *Die Gleichung der Kurve* (1) *wird in bezug auf ein Poldreieck:*

$$f = f_{11} y_1^2 = 0. \tag{21}$$

Für den *Doppelpunkt* gelten die dualen Sätze.

13. Rang und Quadratdarstellung. Mit Rücksicht auf § 42, **1** folgt aus der Form der Gleichungen (18), (19) und (21):

Der Rang einer Kurve zweiter Ordnung ist gleich der Anzahl der nicht verschwindenden Quadrate in der auf ein Poldreieck bezogenen Gleichung.[76])

14. Polarsystem in bezug auf ein Polardreieck. In bezug auf den eigentlichen Kegelschnitt (18), (18') lautet die *Beziehung* (8), (8') *zwischen Pol und Polare:*

(22) $v_1 : v_2 : v_3 = b_{11} y_1 : b_{22} y_2 : b_{33} y_3; \quad y_1 : y_2 : y_3 = B_{11} v_1 : B_{22} v_2 : B_{33} v_3.$

Insbesondere geht sie in bezug auf den imaginären Kegelschnitt:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0, \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \tag{23}$$

in die Beziehung der *Dualität* über (§ 20, **11**):

$$v_1 : v_2 : v_3 = y_1 : y_2 : y_3. \tag{24}$$[85])

§ 47. Besondere Polardreiecke.

1. Polardreiecke mit unendlich ferner Seite. Da von zwei konjugierten Durchmessern der Ellipse und Hyperbel jeder die Polare des unendlich fernen Punktes des andern (§ 14, **2**, III), da ferner die unendlich ferne Gerade die Polare des Mittelpunktes ist (§ 20, **3**), so ergibt sich aus § 46, **10**, II:

Für die Ellipse und Hyperbel bilden zwei konjugierte Durchmesser in Verbindung mit der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck.

Daher enthält die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogene Gleichung § 14, (11), homogen geschrieben:

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} - \tau^2 = 0$$

nur die Quadrate der Koordinaten ξ, η, τ. Da die unendlich ferne Gerade zu jedem *gemeinen* Koordinatensystem zugehört (I § 22, **9**), so bilden zwei konjugierte Durchmesser auch das *einzige* derartige System, wo die Gleichung der Ellipse und Hyperbel nur die Quadrate enthält.

Bei der Parabel ist die unendlich ferne Gerade Tangente; sie kann somit nach § 46, **10**, VI nicht Seite eines Polardreiecks sein. Daher ist es *unmöglich, die Parabel in gemeinen Koordinaten durch eine Gleichung mit nur Quadraten darzustellen.*

In bezug auf das imaginäre Kreispunktepaar bilden irgend zwei rechtwinklige Achsen (§ 20, **22**, I) zusammen mit der unendlich fernen Geraden nach § 46, **11**, II' ein Polarendreieck. Daher enthält die Gleichung § 20, (60') nur die beiden Quadrate von u und v.

2. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Poldreieckes. Die Gleichung:

$$(1) \qquad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

bezieht sich auf ein gegebenes Koordinatendreieck $E_1 E_2 E_3$. Wir führen ein Polardreieck $J_1 J_2 J_3$ ein, *das sich möglichst an $E_1 E_2 E_3$ anlehnt.* Wir legen zu dem Ende (Fig. 112) *die Ecke J_1* in die Ecke E_1, also:

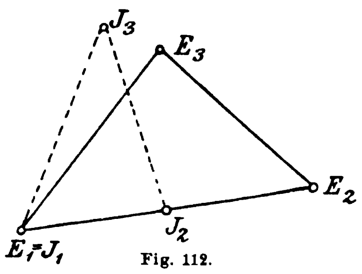


Fig. 112.

$$(2) \qquad x_1^{(1)} = 1, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0,$$

wobei wir mit:

$$(3) \qquad a_{11} \neq 0$$

voraussetzen, daß die Ecke E_1 nicht auf der Kurve (1) liegt. Die Polare des Punktes (2) hat nach § 46, (3) die Koordinaten:

$$f_1^{(1)} = a_{11}, \quad f_2^{(1)} = a_{21}, \quad f_3^{(1)} = a_{31} \tag{4}$$

und die Gleichung:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 = 0. \tag{5}$$

3. Die zweite Ecke. Wir legen die Ecke J_2 in den Schnittpunkt der Geraden (5) mit der Seite E_1E_2, nämlich:

$$x_1^{(2)} = -a_{12}, \quad x_2^{(2)} = a_{11}, \quad x_3^{(2)} = 0, \tag{6}$$

der nach (3) jedenfalls bestimmt ist. Die Polare dieses Punktes hat die Koordinaten:

$$f_1^{(2)} = 0, \quad f_2^{(2)} = A_{33}, \quad f_3^{(2)} = -A_{23} \tag{7}$$

und die Gleichung:

$$A_{33}x_2 - A_{23}x_3 = 0. \tag{8}$$

Wir setzen mit:

$$A_{33} \neq 0 \tag{9}$$

voraus, daß die Ecke J_2 nicht auf ihrer Polare (8) liegt, also J_1J_2 keine Tangente der Kurve ist.

4. Die dritte Ecke. Die dritte Ecke J_3 ist jetzt der Schnittpunkt der Geraden (5) und (8):

$$x_1^{(3)} = A_{31}, \quad x_2^{(3)} = A_{32}, \quad x_3^{(3)} = A_{33}. \tag{10}$$

Seine Polare hat die Koordinaten:

$$f_1^{(3)} = 0, \quad f_2^{(3)} = 0, \quad f_3^{(3)} = A. \tag{11}$$

Sie ist in der Tat die Gerade J_1J_2, die mit der Seite E_1E_2 zusammenfällt. Sie ist bestimmt für $A \neq 0$, unbestimmt für $A = 0$, kann aber auch im letzteren Falle, wo die Ecke J_3 in (10) der Doppelpunkt des Linienpaares (1) ist (§ 42, (8)), in die Seite E_1E_2 gelegt werden, da jede Gerade Polare des Doppelpunktes ist. Nach (9) liegt J_3 jedenfalls nicht in der Seite $J_1J_2 = E_1E_2$.

5. Transformation auf das eingeführte Poldreieck. Mit den Werten (2), (4); (6), (7); (10); (11) wird nun in § 46, (14):

$$\begin{gathered} f_{11} = \sum_1^3{}^k f_k^{(1)}x_k^{(1)} = a_{11}, \quad f_{22} = \sum_1^3{}^k f_k^{(2)}x_k^{(2)} = a_{11}A_{33}, \\ f_{33} = \sum_1^3{}^k f_k^{(3)}x_k^{(3)} = A_{33}A. \end{gathered} \tag{12}$$

Die auf ein ursprüngliches Koordinatendreieck $E_1E_2E_3$ *bezogene Gleichung* (1) *geht durch die Substitution* (§ 41, (10)):

$$(13)\quad \begin{cases} x_1 = y_1 - a_{12}y_2 + A_{13}y_3, \\ x_2 = \phantom{y_1 -{}} a_{11}y_2 + A_{23}y_3, \\ x_3 = \phantom{y_1 - a_{11}y_2 +{}} A_{33}y_3 \end{cases}$$

mit der Substitutionsdeterminante:

$$(14)\qquad S = a_{11}A_{33}$$

über in:

$$(15)\qquad f = a_{11}y_1^2 + a_{11}A_{33}y_2^2 + A_{33}Ay_3^2 = 0.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß:

$$(16)\qquad a_{11} \neq 0, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

also die Ecke E_1 kein Punkt und die Seite E_1E_2 keine Tangente der Kurve (1) *ist.*[114])

Damit ist die Kurve auf eines ihrer ∞^3 Poldreiecke $J_1J_2J_3$ transformiert, das sich tunlichst eng an das alte Dreieck $E_1E_2E_3$ anlehnt, indem die Ecke $E_1 = J_1$ und die Seite $E_1E_2 = J_1J_2$ erhalten geblieben ist.

Zugleich wird nach § 46, (17):

$$(17)\qquad a_{11}A_{33}F = A_{33}Av_1^2 + Av_2^2 + a_{11}v_3^2.$$

6. Die erste Ecke eines neueinzuführenden Polzweiecks des Schnittpunktpaares. Für das Schnittpunktpaar der Fläche (1) mit der Geraden g:

$$(18)\qquad \sum_1^3{}_k u_k x_k = 0$$

führen wir ein neues Koordinatendreieck $J_1J_2J_3$ ein, dessen Ecken J_1J_2 ein auf der Geraden (18) gelegenes Polzweieck des Schnittpunktpaares bilden.

Fig. 113.

Die erste Ecke J_1 sei (Fig. 113) der Schnittpunkt der Geraden g mit der Seite $E_1E_2 (x_3 = 0)$, also

$$(19)\qquad x_1^{(1)} = -u_2, \quad x_2^{(1)} = u_1, \quad x_3^{(1)} = 0,$$

wobei wir voraussetzen, daß:

(20) $\qquad u_1$ und u_2 nicht beide 0

sind, also die Gerade (18) nicht in die Seite E_1E_2 fällt.

Die Polare von J_1 hat die Koordinaten:

$$(21)\qquad u_k^{(1)} = f_k^{(1)} = -a_{k1}u_2 + a_{k2}u_1, \quad k = 1, 2, 3,$$

und die Gleichung:

$$(22)\qquad -f_1u_2 + f_2u_1 = 0.$$

Zugleich wird:

$$(23)\quad f_{11} = \sum_1^3 {}_k f_k^{(1)} x_k^{(1)} = -(-a_{11} u_2 + a_{12} u_1) u_2 + (-a_{21} u_2 + a_{22} u_1) u_1 = -A_{33}^u.$$

Wir setzen voraus, daß:

$$(24)\qquad A_{33}^u \neq 0,$$

also der Punkt J_1 nicht auf f liegt. Die Voraussetzung (20) ist in (24) mit eingeschlossen.

7. Die zweite Ecke. Die zweite Ecke J_2 ist nun der Schnittpunkt der Geraden (18) mit der Polare (22) von J_1. Die Gleichung (22) ist das Resultat der Elimination von ϱ aus:

$$(25)\qquad f_1 + \varrho u_1 = 0, \quad f_2 + \varrho u_2 = 0.$$

Daher bestimmt sich J_2 unter Elimination von ϱ aus den drei Gleichungen:

$$(26)\qquad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \varrho u_2 = 0, \\ u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \qquad = 0, \end{cases}$$

denen infolge der für die Determinante A^u gültigen Entwicklungen § 44, (44) durch:

$$(27)\qquad x_1^{(2)} = A_{31}^u, \quad x_2^{(2)} = A_{32}^u, \quad x_3^{(2)} = A_{33}^u, \quad \varrho = A_{34}^u$$

genügt wird. Da gleichzeitig:

$$(28)\qquad a_{31} A_{31}^u + a_{32} A_{32}^u + a_{33} A_{33}^u + u_3 A_{34}^u = A^u,$$

so hat die Polare von J_2 die Koordinaten:

$$(29)\quad f_1^{(2)} = -A_{34}^u u_1, \quad f_2^{(2)} = -A_{34}^u u_2, \quad f_3^{(2)} = -A_{34}^u u_3 + A^u,$$

so daß:

$$(30)\quad f_{22} = \sum_1^3 {}_k f_k^{(2)} x_k^{(2)} = -A_{34}^u (u_1 x_1^{(2)} + u_2 x_2^{(2)} + u_3 x_3^{(2)}) + A^u x_3^{(2)} = A^u A_{33}^u.$$

8. Resultat der Transformation. Da J_2 auf der Polare von J_1 liegt, bilden die Punkte $J_1 J_2$ ein Polzweieck, in bezug auf welches das Schnittpunktpaar eine Gleichung von der Form § 46, (12) erhält, und zwar ergibt sich:

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Kurve (1) *mit der Geraden* (18) *kann unter der Voraussetzung:*

$$(31)\qquad A_{33}^u \neq 0$$

auf die Form gebracht werden:

$$(32)\qquad -A_{33}^u y_1^2 + A_{33}^u A^u y_2^2 = 0$$

Mit $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$ wird:

$$A^u_{33} = -a_{11}, \quad A^u = -A_{22} \tag{33}$$

und kommt (32), von der Bezeichnung abgesehen, auf § 40, (16) zurück.

§ 48. Verschiedene Sätze der Polarentheorie.

1. Beziehung zwischen den Ecken und Seiten zweier Polardreiecke. Transformiert man die auf irgendein Koordinatendreieck $E_1E_2E_3$ bezogene *eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse:*

$$f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl}x_k x_l = 0, \qquad F = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl}u_k u_l = 0 \tag{1}$$

auf ein *Polardreieck mit den Ecken* $x_k^{(m)}$ *und Seiten* $u_k^{(m)}$, so nehmen ihre Gleichungen nach § 46, (18) die Form an:

$$f = \sum_1^3{}^m b_{mm}y_m^2, \qquad S^2 F = \sum_1^3{}^m B_{mm}v_m^2 \tag{2}$$

und bestehen nach § 41, (25) zwischen alten und neuen Koeffizienten die Beziehungen:

$$S^2 a_{kl} = \sum_1^3{}^m b_{mm}u_k^{(m)}u_l^{(m)}, \qquad S^2 A_{kl} = \sum_1^3{}^m B_{mm}x_k^{(m)}x_l^{(m)}. \tag{3}$$

Für ein *zweites Polardreieck mit den Ecken* $x_k'^{(m)}$ *und Seiten* $u_k'^{(m)}$ ist ebenso:

$$S'^2 a_{kl} = \sum_1^3{}^m b'_{mm}u_k'^{(m)}u_l'^{(m)}, \qquad S'^2 A_{kl} = \sum_1^3{}^m B'_{mm}x_k'^{(m)}x_l'^{(m)}. \tag{4}$$

Zwischen den Koordinaten der Ecken und Seiten der beiden Polardreiecke bestehen daher die Beziehungen (k, l je $= 1, 2, 3$):

$$S'^2 \sum_1^3{}^m b_{mm}u_k^{(m)}u_l^{(m)} = S^2 \sum_1^3{}^m b'_{mm}u_k'^{(m)}u_l'^{(m)}; \tag{5}$$

$$S'^2 \sum_1^3{}^m B_{mm}x_k^{(m)}x_l^{(m)} = S^2 \sum_1^3{}^m B'_{mm}x_k'^{(m)}x_l'^{(m)}. \tag{6}$$

2. Kurven durch die Ecken zweier Polardreiecke. Multipliziert man die Gleichungen (5) mit den Koeffizienten C_{kl} und die Gleichungen (6) mit den Koeffizienten c_{kl} *irgend* einer Kurve zweiter Klasse, bzw. zweiter Ordnung:

(7) $G = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l C_{kl} u_k u_l = 0$ (8) $g = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l c_{kl} x_k x_l = 0$

und summiert alsdann über k und l, so ergibt sich mit Benutzung der Abkürzungen (§ 41, **3**):

$$(9)\begin{cases} G_{mm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l C_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(m)}, \\ G'_{mm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l C_{kl} u_k'^{(m)} u_l'^{(m)}, \end{cases} \qquad (10)\begin{cases} g_{mm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l c_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(m)}, \\ g'_{mm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l c_{kl} x_k'^{(m)} x_l'^{(m)}: \end{cases}$$

$$(11)\qquad S'^2 \sum_1^3{}^m b_{mm} G_{mm} = S^2 \sum_1^3{}^m b'_{mm} G'_{mm},$$

$$(12)\qquad S'^2 \sum_1^3{}^m B_{mm} g_{mm} = S^2 \sum_1^3{}^m B'_{mm} g'_{mm}.$$

Die Relation (12) ist linear und homogen in den sechs Größen g_{mm} und g'_{mm}, und keiner der sechs Koeffizienten $S^2 B_{mm}$ und $S^2 B'_{mm}$ kann verschwinden (§ 46, **10**, VIII). Das Verschwinden von g_{mm} bedeutet aber nach (10), daß die Ecke $x_k^{(m)}$ auf der Kurve (8) liegt. Es folgt daher aus (12) und dual aus (11):

I. *Jeder Kegelschnitt, der durch fünf von den Ecken zweier Polardreiecke eines eigentlichen Kegelschnittes geht, geht auch durch die sechste Ecke.* *Jeder Kegelschnitt, der fünf von den Seiten zweier Polardreiecke eines eigentlichen Kegelschnittes berührt, berührt auch die sechste Seite.*[124])

3. Einbeschriebene Polardreiecke. Ein Kegelschnitt $g = 0$ gehe durch die Ecken *eines* Polardreiecks $J_1 J_2 J_3$ des eigentlichen Kegelschnittes $f = 0$ (Fig. 114). Um ein zweites Polardreieck $J_1' J_2' J_3'$ von $f = 0$ zu konstruieren, kann man nach § 46, **8** in der Ebene eine Ecke J_1' und alsdann auf deren Polare i_1' eine zweite Ecke J_2' beliebig nehmen, worauf dann J_3' bestimmt ist. Wählt man aber J_1' auf $g = 0$ und nimmt als J_2' einen Schnittpunkt von i_1' mit $g = 0$, so muß, da $J_1, J_2, J_3, J_1', J_2'$ auf g liegen, nach I auch J_3' auf $g = 0$ fallen. Ebenso dual, also:

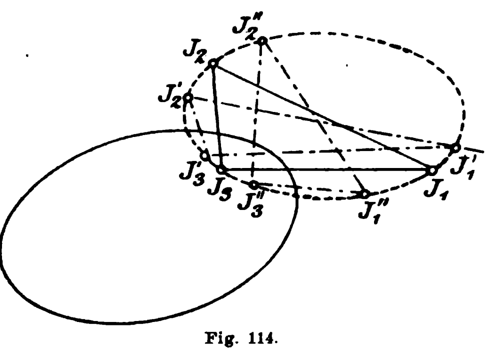


Fig. 114.

II. *Gibt es ein Polardreieck des eigentlichen Kegelschnittes $f = 0$, welches dem Kegelschnitt $g = 0$ ein- (bezüglich um-)beschrieben ist, so gibt es ∞^1 solche Polardreiecke.*

4. Anwendung auf die gleichseitige Hyperbel. Für eine gleichseitige Hyperbel bilden ihr Mittelpunkt M und die imaginären Kreispunkte K_1, K_2 der unendlich fernen Geraden ein Polardreieck. Denn diese ist die Polare von M, und K_1, K_2 sind zu den unendlich fernen Punkten der gleichseitigen Hyperbel harmonisch (§ 26, (26)).

Ist nun $J_1 J_2 J_3$ irgendein zweites Polardreieck, so geht nach I jeder Kegelschnitt, der durch J_1, J_2, J_3 und K_1, K_2 geht, also der Umkreis (§ 12, **12**) des Dreiecks $J_1 J_2 J_3$ ist, auch durch M:

III. *Der Umkreis eines Polardreieckes einer gleichseitigen Hyperbel geht durch deren Mittelpunkt.*

5. Polarreziproke Dreiecke. Die Pole P_k der Koordinatenseiten e_k und die Polaren p_k der Koordinatenecken E_k in bezug auf die Kurve (1) haben nach § 46, (8); (8′) beziehungsweise die Koordinaten ($k = 1, 2, 3$):

(13) $x_1 : x_2 : x_3 = A_{1k} : A_{2k} : A_{3k}$ (13′) $u_1 : u_2 : u_3 = a_{1k} : a_{2k} : a_{3k}$.

Sie bilden das dem Koordinatendreieck e_k, E_k *polarreziproke Dreieck* P_k, p_k.[78]) Nun sind (I § 29, (4)) die Gleichungen der drei Geraden $E_k P_k$ und der drei Punkte $e_k \times p_k$:

$$(14) \quad \begin{cases} x_2 : x_3 = A_{21} : A_{31}, \\ x_3 : x_1 = A_{32} : A_{12}, \\ x_1 : x_2 = A_{13} : A_{23}; \end{cases} \qquad (14') \quad \begin{cases} u_2 : u_3 = a_{21} : a_{31}, \\ u_3 : u_1 = a_{32} : a_{12}, \\ u_1 : u_2 = a_{13} : a_{23}. \end{cases}$$

Nach der Form dieser Gleichungen, in denen $A_{kl} = A_{lk}$, $a_{kl} = a_{lk}$ ist, gehen (I § 25, (11); (13)) die drei Geraden (14) durch einen Punkt und liegen die drei Punkte (14′) in einer Geraden. Also:[125])

Sind zwei Dreiecke in bezug auf einen Kegelschnitt polarreziprok, so gehen die drei Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt und liegen die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten auf einer Geraden (die Dreiecke liegen perspektiv).

Als Sonderfälle gehen die beiden Sätze § 37, **10** hervor (§ 18, **5**).

6. Begriff des Kegelschnittbüschels. Sind in laufenden Punktkoordinaten:

$$(15) \qquad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \quad g = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l b_{kl} x_k x_l = 0$$

die Gleichungen zweier Kegelschnitte, so heißt der Inbegriff der ∞^1 Kegelschnitte, die in der Gleichung:[126])

$$(16)\qquad f - \lambda g = 0$$

mit dem Parameter λ enthalten sind, ein *Kegelschnittbüschel* (§ 8, (53)). Die Form der Gleichung zeigt sofort (I § 18, (14)):

I. *Jeder Kegelschnitt des Büschels geht durch die vier Schnittpunkte der beiden „Grundkegelschnitte“* (15), *die „Grundpunkte“ des Büschels.*

Aber auch umgekehrt gilt der Satz:

II. *Jeder durch die vier Grundpunkte gehende Kegelschnitt gehört dem Büschel an.*

Denn er ist durch irgendeinen seiner Punkte als fünften Punkt (§ 9, **9**) individualisiert und ist daher identisch mit demjenigen Kegelschnitt (16), dessen Parameter λ aus der Bedingung bestimmt wird, daß er selbst durch jenen fünften Punkt geht. Man kann den Satz II in anderer Bezeichnung auch so ausdrücken (I § 24, (6)):

III. *Sind* $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ *die Gleichungen dreier Kegelschnitte, von denen jeder durch die vier Schnittpunkte der beiden andern geht, so muß zwischen den linken Seiten der drei Gleichungen eine Identität von der Form:*

$$(17)\qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$$

mit drei konstanten Faktoren λ_1, λ_2, λ_3 *bestehen, und umgekehrt.*

7. Satz über drei Paare harmonischer Polaren. Das Büschel (16) enthält im allgemeinen *drei Linienpaare*, die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks der Grundpunkte (I § 27, **1**). Auf diese wenden wir den Satz **6**, III jetzt an. Sind also in laufenden Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$(18)\qquad f_i = \left(\sum_1^3{}^k u_k^{(i)} x_k\right)\left(\sum_1^3{}^l u_l^{(i+1)} x_l\right) = 0,$$

$i = 1, 3, 5$, die Gleichungen der drei Gegenseitenpaare $u_k^{(1)}, u_l^{(2)}$; $u_k^{(3)}, u_l^{(4)}$; $u_k^{(5)}, u_l^{(6)}$ eines vollständigen Vierecks, so besteht eine Identität (17) von der Form:

$$(19)\qquad \sum{}^i \lambda_i f_i = 0 \qquad (i = 1, 3, 5).$$

Ihre Entwicklung gibt mit Vertauschung der Summenfolge:

$$\sum{}^k \sum{}^l \left\{ \sum{}^i \lambda_i u_k^{(i)} u_l^{(i+1)} \right\} x_k x_l = 0,$$

und da die Gleichung identisch in den x_k gilt, so ist für $k, l = 1, 2, 3$:

$$(20)\qquad \sum{}^i \lambda_i u_k^{(i)} u_k^{(i+1)} = 0, \quad \sum{}^i \lambda_i (u_k^{(i)} u_l^{(i+1)} + u_l^{(i)} u_k^{(i+1)}) = 0.$$

Multipliziert man diese sechs Gleichungen mit irgend sechs Konstanten e_{kk} und $e_{kl} (= e_{lk})$ und summiert sie, so folgt wieder mit Vertauschung der Summenfolge:

$$\sum^i \lambda_i \sum^k \sum^l e_{kl} u_k^{(i)} u_l^{(i+1)} = 0$$

oder mit den Abkürzungen § 41, (6'):

(21) $$\sum^i \lambda_i F_{i,i+1} = \lambda_1 F_{12} + \lambda_3 F_{34} + \lambda_5 F_{56} = 0.$$

Daraus folgt, daß wenn zwei der drei Größen F_{12}, F_{34}, F_{56} verschwinden, stets auch die dritte verschwindet, oder nach § 46, (5'):

IV. *Wenn in bezug auf irgendeine Kurve zweiter Klasse zwei Paar Gegenseiten eines vollständigen Vierecks harmonische Polarenpaare sind, so gilt dies auch vom dritten Paar.*[127])

Nimmt man dabei als Kurve zweiter Klasse das imaginäre Kreispunktpaar, so folgt mit Rücksicht auf § 20, **22**, I wiederum der Satz § 8, **20**, IV.

8. Kegelschnittbüschel und gerade Linie. Für die Schnittpunkte der laufenden Büschelkurve λ mit der Seite $x_3 = 0$ des Koordinatendreiecks, die als beliebige Gerade gelten kann (§ 44, (5)), erhält man aus (16):

(22) $$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2) - \lambda(b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + b_{22}x_2^2) = 0,$$

also ein Punktepaar, in Zweieckskoordinaten x_1, x_2 auf der Seite E_1E_2 dargestellt. Da die Gleichung (22) die Form § 8, (53) hat, die sich beim Übergang von der dort gebrauchten gemeinen Koordinate x zu den hier benutzten Zweieckskoordinaten nicht ändert (I § 7, (13); (14)), so folgt:

I. *Ein Kegelschnittbüschel wird von einer beliebigen Geraden in einem Büschel von Punktepaaren, also nach* § 8, **21** *in einer Punktinvolution geschnitten.*

Jedem Kegelschnitt λ in (16) entspricht ein Punktepaar λ der Involution (22). Unter Beschränkung auf drei Kegelschnitte kann man aus I auch entnehmen:

II. *Die drei Schnittpunktpaare einer beliebigen Geraden mit drei Kegelschnitten eines Büschels liegen in Involution.*[38])

Wählt man für zwei von den drei Kegelschnitten Linienpaare des Büschels, so folgt:

III. *Die drei Schnittpunktpaare einer beliebigen Geraden mit einem Kegelschnitt und zwei Gegenseitenpaaren eines einbeschriebenen Vierecks liegen in Involution.*

Nimmt man endlich alle drei Kegelschnitte als Linienpaare, so folgt als letzter Sonderfall der Satz § 8, **18**, I über das *vollständige Viereck.*

§ 49. Die Spezies der Kurven zweiter Ordnung und Klasse.

1. Die Koeffizienten der Quadratdarstellung. Werden die zusammengehörigen Gleichungen § 46, (7), (7'):

$$(1)\quad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \qquad (1')\quad F = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl} u_k u_l = 0$$

nach § 46, (14); (17) durch Einführung eines Poldreiecks in die Gestalt versetzt:

$$(2)\; f = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + b_{33} y_3^2 = 0, \quad (2')\; S^2 F = B_{11} v_1^2 + B_{22} v_2^2 + B_{33} v_3^2 = 0,$$

so entsprechen die Koeffizienten b_{kl}, B_{kl} den Bedingungen § 46, (13); (16). Nach § 41, (20); (25) lauten alsdann die Beziehungen zwischen den alten und neuen Koeffizienten:

$$(3)\quad b_{mm} = f_{mm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k^{(m)} x_l^{(m)}, \qquad B_{mm} = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl} u_k^{(m)} u_l^{(m)}$$

$$(4)\quad S^2 a_{kk} = \sum_1^3{}^m b_{mm} u_k^{(m)2}, \qquad S^2 A_{kk} = \sum_1^3{}^m B_{mm} x_k^{(m)2}$$

$$(5)\quad S^2 A = B,$$

wo $u_k^{(m)2}$ das Quadrat von $u_k^{(m)}$ usw. bedeutet.

2. Unterscheidung der eigentlichen Kurven nach den Vorzeichen der Quadrate. Wir setzen jetzt die Koeffizienten a_{kl} in (1) und $x_k^{(m)}$ in § 41, (10) *reell* voraus. Die Vorzeichen von b_{11}, b_{22}, b_{33} in (2) sind dann entweder alle gleich oder nicht alle gleich, also abgesehen von der Reihenfolge:

$$(6)\qquad \text{I. } \pm\pm\pm \qquad \text{II. } \pm\pm\mp.$$

Zwei übereinanderstehende dieser vier Vorzeichensysteme sehen wir nur als eines an, da die Gleichung $f = 0$ mit -1 multipliziert werden kann.

I. *Zeigt nun die Kurve* (1) *in bezug auf irgendein Poldreieck die Vorzeichen* (6), I, *so zeigt sie diese in bezug auf jedes Poldreieck.* Nehmen wir nämlich an, daß schon das alte Dreieck $E_1 E_2 E_3$, auf das sich die Gleichung (1) bezieht, ein Poldreieck war, so daß die Kurve von einem bestimmten Poldreieck $E_1 E_2 E_3$ auf ein beliebiges anderes $J_1 J_2 J_3$ transformiert wird, so geben die Formeln (3), wo nach Voraussetzung $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$ wird:

$$(7)\qquad b_{mm} = \sum_1^3{}^k a_{kk} x_k^{(m)2}.$$

Hier können, da die Substitutionsderminante S (§ 41, (16)) nicht Null sein darf, für keinen Wert von m alle drei $x_k^{(m)2}$ verschwinden. Waren also alle drei a_{kk} von einerlei Vorzeichen, so sind es auch alle drei b_{mm} und nach (4) auch umgekehrt. Dieselbe Kurve kann also niemals von den Vorzeichen (6), I zu II übergehen oder umgekehrt.[115])

II. *Jede eigentliche Kurve zweiter Ordnung gehört stets zu einer und nur zu einer der beiden Spezies, die durch die Vorzeichenverbindungen* I *und* II *in* (6) *gekennzeichnet sind.*

III. *Auch als Kurve zweiter Klasse gehört sie* (nach § 46, (16); (18')) *zu der gleichen Spezies.*

Man nennt die *Form* f in (1), wenn sie zur Spezies (6), I gehört, *definit*, und zwar für die Zeichen $+++$ in (6) *positiv*, für $---$ *negativ definit.* Aus § 46, (16) folgt dann mit Rücksicht auf (2'):

IV. *Ist die Form* f *definit, ist die Form* F *stets positiv definit.*

3. Imaginärer und reeller Kegelschnitt. Die Kurven der *Spezies* I in (6) sind *imaginäre,* die der *Spezies* II *reelle* Kegelschnitte. Denn für jene gibt es keinen reellen Punkt, der der Gleichung (2) genügt, während für diese, wenn etwa $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{33} < 0$, jedem reellen Wertepaar y_1, y_2 vermöge der Gleichung (2) zwei reelle Werte von y_3 entsprechen, die Gleichung also durch ∞^1 Punkte erfüllt wird. Mit Rücksicht auf 2, III folgt somit:

Der eigentliche imaginäre Kegelschnitt (Spezies I*) besitzt keinen reellen Punkt und keine reelle Tangente.*

4. Bedingungen der beiden Spezies. Wenn alle drei b_{kk} von einerlei Vorzeichen sind, so sind nach § 46, (16) alle B_{kk} positiv und ist nach § 46, (15) B von gleichem Vorzeichen wie b_{kk}. Da nun die drei Elemente $x_k^{(m)}$ und $u_k^{(m)}$, $m = 1, 2, 3$, einer Zeile der Determinante $S = |x_k^{(m)}|$ und $S^2 = |u_k^{(m)}|$ nicht alle verschwinden können, so folgt aus (4) und (5):

Ist $f = 0$ *eine imaginäre eigentliche Kurve, so sind notwendig alle drei* A_{kk} *positiv und alle* a_{kk} *unter sich und mit* A *von einerlei Vorzeichen und kann keine dieser sieben Größen verschwinden, in Formeln:*

$$A_{kk} > 0, \quad a_{kk}A > 0 \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{8}$$

Diese Bedingungen sind aber auch *hinreichend,* da schon zwei von ihnen, wie:

$$A_{33} > 0, \quad a_{11}A > 0 \tag{9}$$

nach § 47, (15) zur Folge haben, daß $f = 0$ der Spezies I angehört.

Indem wir die überzähligen Bedingungen (8) beibehalten, erhalten wir das Resultat:

Die eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse (1) $(A \neq 0)$ *ist imaginär, wenn:*

$$A_{kk} > 0, \quad a_{kk} A > 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{10}$$

dagegen reell, wenn:

$$A_{kk},\ a_{kk} A \ \textit{nicht alle} > 0. \tag{11}$$

Im letzteren Falle können die sechs Größen teilweise auch verschwinden.

5. Lage der Polardreiecke gegen die Kurve. Bezeichnen wir die positiven b_{kk} mit β_k^2, die negativen mit $-\beta_k^2$, so werden die Gleichungen der beiden Spezies in bezug auf ein Polardreieck in Punkt- und Linienkoordinaten:

$$f = \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 + \beta_3^2 y_3^2 = 0; \qquad S^2 F = \beta_2^2 \beta_3^2 v_1^2 + \beta_3^2 \beta_1^2 v_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 v_3^2 = 0, \tag{12}$$

$$f = \beta_1^2 y_1^2 + \beta_2^2 y_2^2 - \beta_3^2 y_3^2 = 0; \qquad -S^2 F = \beta_2^2 \beta_3^2 v_1^2 + \beta_3^2 \beta_1^2 v_2^2 - \beta_1^2 \beta_2^2 v_3^2 = 0. \tag{13}$$

Setzt man in (13) ein y_k, bezüglich ein v_k gleich 0 und beachtet die zurückbleibenden Vorzeichen, so folgt:[128])

Der reelle Kegelschnitt schneidet stets zwei Seiten eines Polardreiecks in reellen Punkten, die dritte nicht (§ 40, **4**).

An den reellen Kegelschnitt gehen stets von zwei Ecken eines Polardreiecks reelle Tangenten, von der dritten nicht (Fig. 109).

6. Anwendung auf die Hauptachsen. Beispiele für die Gleichungen (13) bieten die Hauptachsengleichungen der Ellipse und Hyperbel § 20, (1); (1′). Die beiden Hauptachsen und die unendlich ferne Gerade bilden nach § 47, **1** ein Polardreieck.

Die Ellipse schneidet die beiden Hauptachsen, nicht aber die unendlich ferne Gerade reell, die Hyperbel die unendlich ferne Gerade und die x-Achse, nicht aber die y-Achse.

An die Ellipse gehen von den unendlich fernen Punkten der beiden Hauptachsen, nicht aber vom Mittelpunkt reelle Tangenten, an die Hyperbel vom Mittelpunkt und dem unendlich fernen Punkte der y-Achse, nicht aber von dem der x-Achse.

Dasselbe gilt für das System Oxy aus zwei beliebigen konjugierten Durchmessern (§ 14, (11)).

7. Unterscheidung der Linienpaare nach den Vorzeichen der Quadrate. Für das Linienpaar reduzieren sich die Gleichungen (2) und (2′) nach § 46, (19); (20) auf:

(14) $f = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0,$ (14′) $S^2 F = b_{11} b_{22} v_3^2 = 0.$

Je nachdem die Koeffizienten die Vorzeichen:

(15) I. $\pm\pm$ oder II. $\pm\mp$

haben, ist das *Linienpaar* $f = 0$ *imaginär* oder *reell.*

Das imaginäre Linienpaar hat außer dem Doppelpunkt $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$ (J_3) *keinen reellen Punkt.* Dagegen hat es wie das reelle Linienpaar nach (14′) *alle durch den Doppelpunkt* $v_3 = 0$ *gehenden Strahlen als Tangenten* (§ 45, 4).

8. Bedingungen der beiden Spezies. Die Gleichungen (4) lauten mit $b_{33} = 0$ $(b_{11} b_{22} \neq 0)$:

(16) $S^2 a_{kk} = b_{11} u_k^{(1)2} + b_{22} u_k^{(2)2}, \quad S^2 A_{kk} = b_{11} b_{22} x_k^{(3)2}$ (§ 42, (13)).

Hiernach können für das Linienpaar nicht alle drei A_{kk} gleichzeitig verschwinden, und die nicht verschwindenden haben das Vorzeichen von $b_{11} b_{22}$.

Die Kurve (1) *ist ein Linienpaar, wenn* A, *aber nicht alle drei* A_{kk} *verschwinden* (§ 19, (5)). *Das Linienpaar ist imaginär oder reell, je nachdem die nicht verschwindenden* A_{kk} *positiv oder negativ sind.*

Ist etwa $A_{33} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, so ist damit sicher $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$, und die Gleichung des imaginären Linienpaares kann auf die Form § 47, (15), mit $A = 0$, gebracht werden.

9. Einteilung der Kurven zweiter Ordnung nach Rang und Spezies. Verstehen wir unter der Abkürzung:

(17) $A_{kk} > 0!, \quad A_{kk} \not> 0!$, usw.,

daß *alle* $A_{kk} > 0$, *nicht alle* $A_{kk} > 0$, usw., so erhalten wir folgende Einteilung der Kurven zweiter Ordnung:

(18)
$A \neq 0 \begin{cases} A_{kk} > 0! \quad A a_{kk} > 0!: & \text{I. Imag. eigentl. Kegelschn.} \\ A_{kk}, \quad A a_{kk} \not> 0!: & \text{II. Reell. eigentl. Kegelschn.} \end{cases}$

$A = 0;\ A_{kk} \neq 0! \begin{cases} A_{kk}\ (\text{soweit} \neq 0) > 0!: & \text{III. Imag. Linienpaare.} \\ A_{kk}\ (\text{soweit} \neq 0) < 0!: & \text{IV. Reelle Linienpaare.} \end{cases}$

$A = 0,\ A_{kk} = 0!\quad a_{kk} \neq 0!:$ V. Doppellinien (§ 19, (21)).

10. Einteilung der Schnittpunktpaare nach Rang und Spezies. Das Schnittpunktpaar der Kurve (1) mit der reellen Geraden:

(19) $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$

ist im Anschluß in Darstellung § 44, (7) imaginär oder reell, je nachdem die Unterdeterminante B_{33} in § 44, (8) positiv oder negativ (§.40, 4), also nach § 44, (14) die geränderte Determinante $-A^u$ positiv oder negativ ist. Danach ergänzt sich die Einteilung der Schnittpunktpaare § 44, 4 in der Weise:

(20)
$$A^u \neq 0 \begin{cases} -A^u > 0: & \text{1. Imag. getrennt. Punktepaar;} \\ -A^u < 0: & \text{2. Reell. getrennt. Punktepaar;} \end{cases}$$
$$A^u = 0, \quad A^u_{kl} \neq 0! \ \text{3. Zusammenf. Punktepaar;}$$
$$A^u = 0, \quad A^u_{kl} = 0! \ \text{4. unbest. Punktepaar}$$

(statt A^u_{kl} nach § 44, (37) auch A^u_{kk}).

Auch hier bedeutet, wie in (17):

(21)
$$A^u_{kl} \neq 0!, \quad = 0!$$

soviel als: *nicht alle* A_{kl}, *alle* A_{kl} gleich Null, $k, l = 1, 2, 3$.

11. Teilweise Abhängigkeit der Spezies des Schnittpunktpaares von den Spezies der Kurve. Nach § 44, **10** ist mit den Spezies I und II in (18), $A \neq 0$, die Spezies 4 in (20), $A^u_{kl} = 0!$, nicht verträglich (α), ebenso nach § 44, **6** die Spezies 1 und 2 in (20), $A^u \neq 0$, nicht mit V in (18), $A_{kl} = 0!$ (β). Ferner ist nach **2**, IV mit Rücksicht auf § 43, (9) die Form $F = -A^u$ für die Spezies I stets positiv, also die Kombination von I mit 2 oder 3 ($-A^u \leq 0$) unmöglich (γ). Ebensowenig ist, da nach (14') $-A^u = F$ für das imaginäre Linienpaar > 0, für das reelle < 0, die Kombination von III mit 2 oder von IV mit 1 möglich (δ). Endlich ist III nicht mit 4 verträglich, da eine reelle Gerade einem imaginären Linienpaar nicht ganz angehören kann (A^u_{kk} ist für $A_{kk} > 0$ definit, § 45, (13); (14)), (ε).

12. Spezies der Schnittpunktpaare bei gegebener Spezies der Kurve. Danach bleiben für die Spezies des Schnittpunktpaares bei gegebener Spezies des Kegelschnittes von vornherein diejenigen Kombinationen ausgeschlossen, die in der folgenden Tabelle unter Bezug auf die Sätze unter **11** mit α, β, γ, δ, ε bezeichnet sind.[129])

Daß die alsdann noch *möglichen* Kombinationen auch *wirklich* vorkommen, zeigen die eingetragenen Beispiele, die in der ersten Zeile die Gleichung einer Kurve von der Spezies der betreffenden Kolonne angeben und in der zweiten Zeile die Gleichung einer Geraden, welche mit der Kurve ein Schnittpunktpaar von der Spezies der betreffenden Zeile liefert. Die Gleichungen $y_1^2 = 0, y_2 - y_3 = 0$ oder $y_1^2 = 0, y_2 = 0$ stellen dabei ersichtlich einen Doppelpunkt dar.

(22)

		$A \neq 0$ Eigentl. Kegelschnitte		$A = 0,\ A_{kk} \neq 0!$ Getr. Linienpaare		$A = 0,\ A_{kk} = 0!$ $a_{kk} \neq 0!$
		$A_{kk} > 0!\ A a_{kk} > 0!$ I. Imag. Kegelschn.	$A_{kk},\ A a_{kk} \not> 0!$ II. Reell. Kegelschn.	A_{kk}, falls $\neq 0$, $> 0!$ III. Imag. Linienp.	A_{kk}, falls $\neq 0$, $< 0!$ IV. Reell. Linienp.	V. Doppellinien
$A^u \neq 0$ Getr. Punktepaare	$-A^u > 0$ 1. Imag. Pktep.	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$ $y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	(δ)	(β)
	$-A^u < 0$ 2. Reell. Pktep.	(γ)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_2 = 0$	(δ)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_3 = 0$	(β)
$A^u = 0,\ A^u_{kk} \neq 0!$	3. Doppelp.	(γ)	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 0$ $y_2 - y_3 = 0$	$y_1^2 + y_2^2 = 0$ $y_2 = 0$	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_2 = 0$	$y_1^2 = 0$ $y_2 = 0$
$A^u = 0,\ A^u_{kk} = 0!$	4. Unbest.	(α)	(α)	(ε)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$ $y_1 - y_2 = 0$	$y_1^2 = 0$ $y_1 = 0$

§ 50. Orthogonale Transformation der Kurve zweiter Ordnung.

1. Orthogonale lineare Substitution. Die reelle lineare Substitution:

(1) $$x_k = \sum_1^3{}^m c_{km} z_m, \quad k = 1, 2, 3,$$

heißt eine *orthogonale*, wenn durch sie identisch die Gleichung besteht:

(2) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

Um eine solche Substitution zu erhalten, wählt man *irgendein (reelles) Poldreieck* $J_m = x_k^{(m)}$, $k, m = 1, 2, 3$ der imaginären eigentlichen Kurve zweiter Ordnung:

(3) $$g = \sum_1^3{}^k x_k^2 = 0.$$

Durch Transformation auf dieses mittels der Substitution:

(4) $$x_k = \sum_1^3{}^m x_k^{(m)} y_m$$

erhält man nach § 46, (14):

(5) $$g = \sum_1^3{}^m g_{mm} y_m^2.$$

Hier sind die Koeffizienten:

(6) $$g_{mm} = \sum_1^3{}^k x_k^{(m)2}$$

positiv und von 0 verschieden. Setzt man daher:

(7) $$\sqrt{g_{mm}} \cdot y_m = z_m,$$

so wird nach (5):

(8) $$g = \sum_1^3{}^m z_m^2.$$

Somit ist:

(9) $$x_k = \sum_1^3{}^m \frac{x_k^{(m)}}{\sqrt{g_{mm}}} z_m$$

eine (reelle) orthogonale Substitution.

Entsprechend den ∞^3 (reellen) Poldreiecken der Kurve (3) (§ 46, **10**, V) *gibt es ∞^3 orthogonale lineare Substitutionen* (§ 40, (25)).

2. Quadratdarstellung durch orthogonale Substitution. Die Frage, ob eine beliebige Kurve zweiter Ordnung:

(10) $$f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0$$

durch *orthogonale* Substitution auf die Quadratdarstellung § 46, (14) gebracht werden kann, kommt auf die Frage nach einem *gemeinsamen (reellen) Poldreieck* der beiden Kurven (3) und (10) zurück.[116])

Ist nämlich $J_m = x_k^{(m)}$ ein solches, so werden durch die Substitution (4) gleichzeitig die Darstellungen (5) und:

$$f = \sum_1^3{}^m f_{mm} y_m^2 \tag{11}$$

herbeigeführt und dann mit (7) die Darstellungen (8) und:

$$f = \sum_1^3{}^m \frac{f_{mm}}{g_{mm}} z_m^2. \tag{12}$$

Hat also die Kurve (10) *mit der Kurve* (3) *ein (reelles) Poldreieck* $J_m = x_k^{(m)}$ *gemein, so kann sie durch die orthogonale lineare Substitution* (9) *auf die Quadratdarstellung* (12) *gebracht werden.*

Es soll untersucht werden, ob ein gemeinsames (reelles) Poldreieck der Kurven (10) und (3) vorhanden ist.

3. Punkte gleicher Polare. Jede Ecke eines Poldreiecks einer *einzelnen* Kurve hat nach § 46, 7, II die gegenüberliegende Seite als Polare. Jede Ecke eines *gemeinsamen* Poldreiecks muß also in bezug auf beide Kurven dieselbe Polare haben oder *ein Punkt gleicher Polare* in bezug auf beide sein. Wir fragen daher zuerst nach solchen Punkten.

Die Polaren eines Punktes x_k^0 in bezug auf die beiden Kurven (10) und (3) sind:

$$\sum_1^3{}^k f_k^0 x_k = 0, \qquad \sum_1^3{}^k x_k^0 x_k = 0. \tag{13}$$

Sie fallen immer dann und nur dann zusammen, wenn mit einem Faktor λ:

$$f_k^0 = \lambda x_k^0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Jeder Punkt gleicher Polare x_k^0 *genügt also den Gleichungen:*

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_2 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleicher Polare (§ 40, 8).

4. Die kubische Gleichung des Problems. Diese Gleichungen können nur bestehen, wenn der Faktor λ eine Wurzel der *kubischen Gleichung* ist:

$$(16)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

5. Die einer Wurzel entsprechenden Punkte gleicher Polare. Ist $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ eine Wurzel der Gleichung (16), so gibt es ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$, die den mit $\lambda = \lambda_i$ gebildeten Gleichungen (15) entsprechen. In der Tat stellen diese Gleichungen drei Gerade dar, die infolge der Voraussetzung $\Delta(\lambda_i) = 0$ jedenfalls einen Punkt gemein haben, möglicherweise aber auch mehr. Wenn nämlich für die Wurzel $\lambda = \lambda_i$ auch alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, fallen die drei Geraden in eine einzige zusammen (I § 29, **10**), und wenn auch alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, werden sie völlig unbestimmt.

Zu einer Wurzel $\lambda = \lambda_i$ der Gleichung (16) *gehören ein Punkt oder ∞^1 oder ∞^2 Punkte gleicher Polare.*

6. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind nun λ_1 und λ_2 zwei *verschiedene* Wurzeln der Gleichung (16), so genügen die entsprechenden Punkte gleicher Polare $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ nach (14) den Gleichungen:

$$(17)\qquad f_k^{(1)} = \lambda_1 x_k^{(1)}, \quad f_k^{(2)} = \lambda_2 x_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

gleichviel ob zu jeder der beiden Wurzeln ein oder mehr solcher Punkte gehören.

Wenn nun $x_k^{(2)} = x_k^{(1)}$ sein sollte, würde aus den beiden alsdann in $f_k^{(1)}$ und $-x_k^{(1)}$ linearen und homogenen Gleichungen (17) mit der Derminante $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ folgen, daß für $k = 1, 2, 3$: $f_k^{(1)} = 0$ und $x_k^{(1)} = 0$. Die letztere Gleichung kann aber nicht für alle Werte von k bestehen. Also:

I. *Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleicher Polare können niemals zusammenfallen.*

Multipliziert man die Gleichungen (17) bezüglich mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k, so erhält man:

$$\sum^k f_k^{(1)} x_k^{(2)} = \lambda_1 \sum^k x_k^{(1)} x_k^{(2)}, \qquad \sum^k f_k^{(2)} x_k^{(1)} = \lambda_2 \sum^k x_k^{(2)} x_k^{(1)}$$

oder nach § 41, (6):

$$f_{12} = \lambda_1 g_{12}, \quad f_{12} = \lambda_2 g_{12}.$$

Daraus aber schließt man, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$(18)\qquad f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. *Zwei Punkte gleicher Polare $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, die zu verschiedenen Wurzeln λ_1 und λ_2 gehören, sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Kurven* (10) *und* (3).

7. Die Realität der Wurzeln. Sind λ_1 und λ_2 zwei *konjugiert komplexe*, also *verschiedene* Wurzeln, so ist nach **6**, I auch jeder der einen entsprechende Punkt $x_k^{(1)}$ gleicher Polare von jedem der andern entsprechenden Punkt $x_k^{(2)}$ *verschieden.* Entspricht aber vermöge (15) der komplexen Wurzel λ_1 ein Punkt $x_k^{(1)} = y_k' + iy_k''$, so entspricht der konjugierten Wurzel λ_2 jedenfalls der Punkt $x_k^{(2)} = y_k' - iy_k''$, wo y_k'' nicht für jedes k verschwinden kann, da sonst $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$ wäre. Damit ist nach (18):

$$g_{12} = \sum_1^3 {}^k x_k^{(1)} x_k^{(2)} = \sum_1^3 {}^k (y_k'^2 + y_k''^2) = 0,$$

und damit für jedes $k: y_k' = 0,\ y_k'' = 0$, was für y_k'' nicht möglich. Daher sind komplexe Wurzeln ausgeschlossen oder (s. später § 89, **3**):

Die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ hat nur reelle Wurzeln.

8. Entwicklung der Determinante $\Delta(\lambda)$. Die Differentialquotienten der Determinante (16) sind:

$$(19)\qquad \begin{cases} -\Delta'(\lambda) = \Delta_{11}(\lambda) + \Delta_{22}(\lambda) + \Delta_{33}(\lambda), \\ \frac{1}{2}\Delta''(\lambda) = (a_{11} - \lambda) + (a_{22} - \lambda) + (a_{33} - \lambda). \end{cases}$$

Daher ist mit den § 19, (3); (4) eingeführten Abkürzungen (§ 89, (7)):

$$(20)\qquad \Delta(\lambda) = -\lambda^3 + A''\lambda^2 - A'\lambda + A$$

und für die drei Wurzeln:

$$(21)\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A'',\quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = A',\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = A.$$

9. Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinanten. Enthält eine ganze Funktion $G(\lambda)$ den Faktor $\lambda - \lambda_0$ gerade l mal, so daß:

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l G_0(\lambda),\quad G_0(\lambda_0) \neq 0,$$

so enthält der Differentialquotient:

$$G'(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{l-1}\{l G_0(\lambda) + (\lambda - \lambda_0) G_0'(\lambda)\}$$

denselben Faktor gerade:

$$(22)\qquad l' = l - 1$$

mal.

Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\Delta(\lambda)$ vorkommt; ferner $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste, die gleichzeitig in *allen* Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$, und $(\lambda - \lambda_i)^{l_i''}$ die höchste, die in *allen* Elementen der Determinante $\Delta(\lambda)$ vorkommt. Es sind dann, wenn λ_i eine Wurzel

von $\varDelta(\lambda) = 0$ ist, nach dem Grade der einzelnen Determinanten nur zulässig die Werte:

(23) $$l_i = 1, 2, 3; \quad l_i' = 0, 1, 2; \quad l_i'' = 0, 1.$$

Infolge von (19) enthält nun $\varDelta'(\lambda)$ den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in allen $\varDelta_{kl}(\lambda)$ wenigstens l_i' mal vorkommt, auch wenigstens l_i' mal. Daher ist nach (22):

$$l_i - 1 \geqq l_i' \text{ oder } l_i' < l_i$$

mit Ausschluß der Gleichheit.

Der Differentialquotient irgendeiner Unterdeterminante:

$$\varDelta_{33}'(\lambda) = -(a_{11} - \lambda) - (a_{22} - \lambda); \quad \varDelta_{12}'(\lambda) = a_{21}, \ldots$$

enthält den Faktor $\lambda - \lambda_i$, da er in jedem Element wenigstens l_i'' mal vorkommt, auch wenigstens l_i'' mal. Da aber unter den Determinanten $\varDelta_{kl}(\lambda)$ wenigstens eine ihn nicht mehr als l_i' mal und daher der entsprechende Differentialquotient $\varDelta_{kl}'(\lambda)$ ihn nach (22) nicht mehr als $l_i' - 1$ mal enthält, so kann l_i'' nicht größer als $l_i' - 1$ sein:

$$l_i'' \leqq l_i' - 1 \text{ oder } l_i'' < l_i'.$$

Zwischen den Multiplizitäten besteht daher mit Ausschluß der Gleichheit die Ungleichung:

(24) $$l_i > l_i' > l_i''.$$

10. Die Elementarteilerexponenten. Die für die Determinante A in § 19, (7); (23) abgeleiteten Identitäten geben mit $a_{kk} - \lambda$ für a_{kk} und mit $-\varDelta'(\lambda)$, $\frac{1}{2}\varDelta''(\lambda)$ für A' und A'' die in λ identischen Gleichungen[80]):

(25) $$\begin{cases} \varDelta'^2(\lambda) = \varDelta_{11}^2(\lambda) + \varDelta_{22}^2(\lambda) + \varDelta_{33}^2(\lambda) + 2\varDelta_{23}^2(\lambda) + 2\varDelta_{31}^2(\lambda) \\ \qquad\qquad + 2\varDelta_{12}^2(\lambda) + \varDelta(\lambda)\varDelta''(\lambda) \\ \frac{1}{4}\varDelta''^2(\lambda) = (a_{11} - \lambda)^2 + (a_{22} - \lambda)^2 + (a_{33} - \lambda)^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{31}^2 \\ \qquad\qquad + 2a_{12}^2 - 2\varDelta'(\lambda). \end{cases}$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 1)$ von $\varDelta(\lambda) = 0$ nach (23) und (24) stets $l_i' = 0$ ist, folgt aus (25), da alle Wurzeln reell sind: Für eine Doppelwurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 2)$ verschwinden mit $\varDelta(\lambda_i)$ und $\varDelta'(\lambda_i)$ auch alle $\varDelta_{kl}(\lambda_i)$, so daß $l_i' \neq 0$, also nach (23) und (24) $l_i' = 1$ ist. Für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 3)$ verschwinden mit $\varDelta(\lambda_i)$, $\varDelta'(\lambda_i)$ und $\varDelta''(\lambda_i)$ auch alle Elemente $a_{11} - \lambda_i$, $a_{22} - \lambda_i$, $a_{33} - \lambda_i$, a_{23}, a_{31}, a_{12}, so daß $l_i'' \neq 0$, also nach (23) und (24) $l_i'' = 1$, $l_i' = 2$ ist.

Danach bestimmt der Wert von l_i stets die Werte von l_i', l_i'' in folgender Weise:

(26) $$l_i, l_i', l_i'' = 1, 0{,}0; \ 2, 1{,}0; \ 3, 2{,}1.$$

Innerhalb des einer l_i-fachen Wurzel λ_i entsprechenden Teilers von $\Delta(\lambda)$:

$$(27) \qquad (\lambda - \lambda_i)^{l_i} = (\lambda - \lambda_i)^{l_i - l_i'}(\lambda - \lambda_i)^{l_i' - l_i''}(\lambda - \lambda_i)^{l_i'' - 0}$$

heißen die Faktoren rechts, soweit ihre Exponenten von 0 verschieden sind, *die der Wurzel λ_i entsprechenden Elementarteiler* der Determinante $\Delta(\lambda)$.[130]) Alsdann besagt der Satz (26):

Alle Elementarteilerexponenten einer jeden Wurzel haben den Wert 1.

11. Die zu einer Wurzel gehörigen Punkte gleicher Polare. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) nicht alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden ($l_i' = 0$), so liefern für $\lambda = \lambda_i$ die Gleichungen (15) mit $k = 1, 2$ oder 3:

$$(28) \qquad x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} = \Delta_{k1}(\lambda_i) : \Delta_{k2}(\lambda_i) : \Delta_{k3}(\lambda_i).$$

Zu einer einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört stets ein einziger bestimmter Punkt gleicher Polare.

Man kann statt (28) mit einem Faktor ϱ auch schreiben[121]):

$$(29) \qquad \varrho x_k^{(i)} x_l^{(i)} = \Delta_{kl}(\lambda_i),$$

und hiernach wird mit Rücksicht auf (19) und (6):

$$(30) \qquad \varrho g_{ii} = -\Delta'(\lambda_i).$$

Da für eine zweifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden ($l_i' = 1$, $l_i'' = 0$), so genügen für $\lambda = \lambda_i$ den Gleichungen (15) die Punkte der Geraden:

$$(31) \quad u_1^{(i)} : u_2^{(i)} : u_3^{(i)} = a_{11} - \lambda_i : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} - \lambda_i : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} - \lambda_i.$$

Zu einer zweifachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehören stets ∞^1 Punkte gleicher Polare, die eine Gerade erfüllen.

Da für eine dreifache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nach (26) alle Elemente von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, so sind für eine solche die Gleichungen (15) identisch erfüllt. Alle Punkte der Ebene sind Punkte gleicher Polare.

12. Verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (16) findet sich nach (20) die Wurzel $\lambda = 0$ nicht, wenn $A \neq 0$; die Wurzel $\lambda = 0$ einfach, wenn $A = 0$, $A' \neq 0$; zweifach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$; dreifach, wenn $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$.

Die Gleichungen (15), die mit $\lambda = 0$ die zur Wurzel $\lambda = 0$ gehörigen Punkte gleicher Polare bestimmen, decken sich aber in diesem Falle mit denjenigen (§ 42, (6)), welche die Doppelpunkte der Kurve (10) liefern.

Die der Wurzel $\lambda = 0$ entsprechenden Punkte gleicher Polare in bezug auf die Kurven f und g decken sich mit den Doppelpunkten der Kurve f.

Dies erklärt sich daraus, daß ein Doppelpunkt der Kurve f als Polare in bezug auf f jede Gerade der Ebene hat (§ 46, **5**), also auch diejenige Gerade, die seine Polare in bezug auf g ist.

Da nun nach **11.** aus der Multiplizität einer Wurzel die Anzahl der entsprechenden Punkte gleicher Polare folgt, so ergibt sich:

Die Kurve $f = 0$ *hat keinen Doppelpunkt für* $A \neq 0$, *einen Doppelpunkt für* $A = 0,\ A' \neq 0$, *eine Doppelgerade für* $A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$.

Wir erhalten damit aufs neue die bereits § 19 (28) aus den Identitäten § 19, (7); (23) abgeleiteten Bedingungen für den Rang der Kurve f (§ 42, **1**).

13. Nicht verschwindende Wurzeln. Da nach (14) für jede (einfache oder mehrfache) Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt gleicher Polare $x_k^{(i)}$:

$$\sum_k f_k^{(i)} x_k^{(i)} = \lambda_i \sum_k x_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

oder (§ 41, (6)):

$$f_{ii} = \lambda_i g_{ii}, \tag{32}$$

so folgt:

Ein einer nicht verschwindenden Wurzel λ_i *entsprechender Punkt gleicher Polare* $x_k^{(i)}$ *liegt entweder auf keiner oder auf jeder der beiden Kurven* f *und* g.

Da im *letzteren* Falle die gemeinsame Polare gemeinsame Tangente wird (§ 11, **9**), *so berühren sich die beiden Kurven im Punkte* $x_k^{(i)}$.

14. Der einer einfachen Wurzel entsprechende Punkt. Der einer *einfachen* Wurzel λ_i entsprechende Punkt gleicher Polare (28) kann als *reeller* Punkt nicht auf der Kurve g, also auch nicht mit seiner gemeinsamen Polare in bezug auf f und g vereinigt liegen. Falls $\lambda_i \neq 0$, liegt er nach **13.** auch nicht auf f; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach **12.** der Doppelpunkt des Linienpaares f.

15. Fall von drei einfachen Wurzeln. Hat die Gleichung (16) drei einfache Wurzeln $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$, so gehört nach **11.** zu jeder ein einziger Punkt gleicher Polare $x_k^{(i)}$, der nach **14.** nicht mit dieser vereinigt liegt. Zugleich ist nach **6**, II jeder der drei Punkte $x_k^{(i)}$ harmonischer Pol jedes der beiden andern in bezug auf beide Kurven f und g.

Wenn die kubische Gleichung drei verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Kurven f *und* g *stets ein einziges gemeinsames Poldreieck.*

Seine reellen Ecken $x_k^{(i)}$ sind die den Werten $i = 1, 2, 3$ entsprechenden Punkte (28). Für die orthogonale Substitution (9), welche die Form (12) von f herbeiführt, ist nach (29), (30)[121]):

$$(33)\qquad \frac{x_k^{(i)} x_l^{(i)}}{g_{ii}} = -\frac{\Delta_{kl}(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}.$$

16. Fall einer Doppelwurzel. Einer *Doppelwurzel* λ_i entspricht eine reelle *Gerade* (31), deren jeder Punkt ein Punkt gleicher Polare ist. Ist $\lambda_i \neq 0$, so sind die beiden Punkte S_1 und S_2, in denen die Gerade die eine Kurve schneidet, nach **13.** *Berührungspunkte* beider Kurven. Sie sind als Schnittpunkte einer reellen Geraden mit der imaginären eigentlichen Kurve g zwei *getrennte* Punkte (§ 49, **3**). Ist $\lambda_i = 0$, so ist die Gerade (31) selbst die Doppellinie $f = 0$ und schneidet wie vorhin die Kurve g in zwei *getrennten* Punkten S_1 und S_2.

Wählt man auf der Geraden (31), die der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ entspreche, irgendein Paar harmonischer Punkte $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ zu den beiden getrennten Schnittpunkten S_1 und S_2 mit der Kurve g, so sind diese unter sich harmonische Pole in bezug auf beide Kurven f und g. Sie sind aber nach **6**, II auch harmonische Pole zu dem Punkte gleicher Polare $x_k^{(3)}$, der der übrigen einfachen Wurzel λ_3 entspricht. Die drei Punkte $x_k^{(1)}$, $x_k^{(2)}$, $x_k^{(3)}$ bilden also ein gemeinsames Poldreieck der Kurven f und g. Für die beiden ersten stehen dabei die ∞^1 zu S_1, S_2 harmonischen Punktepaare zur Verfügung.

Wenn die kubische Gleichung eine zweifache und eine einfache Wurzel hat, haben die beiden Kurven f und g ∞^1 gemeinsame Poldreiecke.

17. Fall einer dreifachen Wurzel. Ist $\lambda = \lambda_1$ eine dreifache Wurzel, so ist nach **11.** $a_{11} - \lambda_1 = 0$, $a_{22} - \lambda_1 = 0$, $a_{33} - \lambda_1 = 0$, $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, so daß f mit g zusammenfällt.

Wenn die kubische Gleichung eine dreifache Wurzel hat, haben die dann identischen Kurven f und g alle ihre Poldreiecke gemein.

18. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder mehr gemeinsame Poldreiecke der beiden Kurven f und g vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Formen (8) und (12) stets möglich. Zugleich erhält die Darstellung (12) nach (32) die Form:

$$(34)\qquad f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \lambda_3 z_3^2 = 0.$$

Die Gleichung (10) *kann also stets durch orthogonale Substitution auf die Form* (34) *gebracht werden, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die verschiedenen oder gleichen Wurzeln der kubischen Gleichung* (16) *sind.*

Das neue Koordinatendreieck, auf das sich die Koordinaten z_1, z_2, z_3 beziehen, ist das Poldreieck, das die Kurve (10) mit der Kurve (3) gemein hat. Es ist eindeutig bestimmt, wenn die Gleichung (16) drei einfache, ist dagegen einfach oder dreifach unbestimmt, wenn sie eine zweifache oder eine dreifache Wurzel hat.

19. Die Spezies der Kurven zweiter Ordnung. Die Gleichung (20) hat nach dem Satze von Descartes[181]) drei positive Wurzeln, wenn: $A > 0$, $A' > 0$, $A'' > 0$, und drei negative, wenn: $A < 0$, $A' > 0$, $A'' < 0$. Die Vorzeichen der drei Wurzeln sind daher für:

$$(35) \qquad A' > 0,\ AA'' > 0 : \pm\pm\pm$$

und demnach für:

$$(36) \qquad A',\ AA'' \text{ nicht beide } > 0 : \pm\pm\mp$$

Ist $A = 0$, so ist die eine Wurzel 0 und die beiden andern nach (21) für

$$(37) \qquad \begin{array}{l} A' > 0 : \pm\pm \\ A' < 0 : +-. \end{array}$$

Ist $A = 0$, $A' = 0$, so verschwinden zwei Wurzeln.

Bezeichnet man daher die Wurzel λ_i mit α_i^2 oder $-\alpha_i^2$, je nachdem sie positiv oder negativ ist, so ergeben sich *für die Spezies der Kurven zweiter Ordnung an Stelle von* § 49, (18) *die Kriterien:*

$$(38) \quad \begin{array}{l} A \neq 0 \left\{ \begin{array}{ll} A' > 0,\ AA'' > 0 : & \text{I. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 + \alpha_3^2 z_3^2 = 0, \\ A',\ AA'' \not> 0! & : \text{II. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 - \alpha_3^2 z_3^2 = 0; \end{array} \right. \\ A = 0,\ A' \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} A' > 0 : \text{III. } f = \alpha_1^2 z_1^2 + \alpha_2^2 z_2^2 = 0, \\ A' < 0 : \text{IV. } f = \alpha_1^2 z_1^2 - \alpha_2^2 z_2^2 = 0; \end{array} \right. \\ A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0 \ : \text{V. } f = \alpha_1^2 z_1^2 = 0. \end{array}$$

20. Invarianten der orthogonalen Transformation. Wird durch irgendeine orthogonale Substitution (9), die also (3) in (8) verwandelt, aber f nicht gerade in eine Quadratdarstellung (12) überführt, sondern etwa in:

$$(39) \qquad f = \sum_1^3{}_m \sum_1^3{}_n b_{mn} z_m z_n,$$

so wird durch sie nach (8) und (39) identisch in λ:

$$(40) \qquad f - \lambda g = (b_{11} - \lambda) z_1^2 + (b_{22} - \lambda) z_2^2 + (b_{33} - \lambda) z_3^2 + 2 b_{23} z_2 z_3 + 2 b_{31} z_3 z_1 + 2 b_{12} z_1 z_2$$

und daher nach § 41, (17):

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = S^2 \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Da aber diese Gleichung identisch in λ gilt, so folgt nach (20) durch Gleichsetzen der Koeffizienten:

$$(42)\qquad B = S^2 A, \quad B' = S^2 A', \quad B'' = S^2 A''$$

oder:

Die Koeffizienten der Potenzen von λ in der Determinante (16): *A, A', A'' sind gegen jede orthogonale Transformation invariant.*[132])

§ 51. Orthogonale Transformation des Schnittpunktpaares.

1. Gleichzeitige Quadratdarstelllung zweier Schnittpunktpaare. Bezogen auf ein Dreieck $E_1 E_2 E_3$ seien zwei Kurven zweiter Ordnung:

$$(1)\quad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \qquad (2)\quad g = \sum_1^3{}^k x_k^2 = 0$$

und eine reelle Gerade:

$$(3)\qquad u = \sum_1^3{}^k u_k x_k = 0$$

gegeben. Durch Transformation auf ein neues Dreieck $J_1 J_2 J_3$, dessen Seite $J_1 J_2$ mit der Geraden (3) zusammenfällt, nehmen jene im allgemeinen die Form an (§ 44, **1**):

$$(4)\quad f = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n f_{mn} y_m y_n = 0, \qquad (5)\quad g = \sum_1^3{}^m \sum_1^3{}^n g_{mn} y_m y_n = 0,$$

$$(6)\qquad u = S y_3 = 0,$$

und erhalten *die Schnittpunktpaare der beiden Kurven mit der Geraden*, bezogen auf das Zweieck $J_1 J_2$ nach § 44, **2** die Gleichungen:

$$(7)\ f_{11} y_1^2 + 2 f_{12} y_1 y_2 + f_{22} y_2^2 = 0, \quad (8)\ g_{11} y_1^2 + 2 g_{12} y_1 y_2 + g_{22} y_2^2 = 0.$$

Ist im besonderen $J_1 J_2$ ein *gemeinsames Polzweieck* der beiden Punktepaare (7) und (8), so werden diese Gleichungen (§ 46, (12)):

$$(9)\quad f_{11} y_1^2 + f_{22} y_2^2 = 0, \qquad (10)\quad g_{11} y_1^2 + g_{22} y_2^2 = 0$$

oder mit:

$$(11)\qquad \sqrt{g_{mm}} \cdot y_m = z_m:$$

$$(12)\quad \frac{f_{11}}{g_{11}} z_1^2 + \frac{f_{22}}{g_{22}} z_2^2 = 0, \qquad (13)\quad z_1^2 + z_2^2 = 0.$$

Das Schnittpunktpaar $g \times u$ ist nach § 49, **3** stets ein *imaginäres eigentliches* Punktepaar, während zugleich die Wurzel in (11) bei reellen Punkten J_m reell ist.

Die Schnittpunktpaare einer beliebigen Kurve (1) *und der imaginären eigentlichen Kurve* (2) *mit einer reellen Geraden* (3) *können also bei Einführung eines gemeinsamen Polzweiecks auf die Form* (12) *und* (13) *gebracht werden.*

Es handelt sich noch um die Ermittlung eines gemeinsamen Polzweiecks.

2. Punkte gleichen Poles. Die *Polaren* eines Punktes x_k^0 der *Ebene* in bezug auf die Kurven (1) und (2) sind:

$$(14)\qquad \sum_1^3{}_k f_k^0 x_k = 0, \qquad\qquad (15)\qquad \sum_1^3{}_k x_k^0 x_k = 0.$$

Liegt der Punkt x_k^0 in der *Geraden* (3), so wird diese von den Geraden (14) und (15) in den *Polen* des Punktes x_k^0 in bezug auf die Punktepaare $f \times u$ und $g \times u$ geschnitten.

Diese Pole fallen zusammen, wenn die drei Geraden (3), (14), (15) einen Punkt gemein haben, also (I § 24, (6)):

$$(16)\qquad f_k^0 - \lambda x_k^0 + \varrho u_k = 0.$$

Jeder Punkt x_k^0 gleichen Poles in bezug auf die beiden Punktepaare genügt daher den vier Gleichungen:

$$(17)\qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varrho u_1 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 + \varrho u_2 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 + \varrho u_3 = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 \qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

und jeder diesen Gleichungen genügende Punkt ist ein Punkt gleichen Poles.

3. Die quadratische Gleichung des Problems. Diese Gleichungen können nur bestehen, wenn λ eine Wurzel der *quadratischen Gleichung* ist[183]):

$$(18)\qquad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Die einer Wurzel entsprechenden Punkte gleichen Poles. Ist $\lambda = \lambda_i (i = 1, 2)$ eine Wurzel der Gleichung (18), so gibt es ein oder mehr Punkte $x_k^{(i)}$, die den mit λ_i gebildeten Gleichungen (17) unter Elimination von ϱ genügen. Nach solcher Elimination stellen die Gleichungen drei Gerade dar, die wegen $\Delta(\lambda_i) = 0$ durch einen Punkt gehen (§ 44, (26)). Wenn jedoch neben $\Delta(\lambda) = 0$ auch noch

die neun Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda), k, l = 1, 2, 3,$ für $\lambda = \lambda_i$ verschwinden, fallen sie alle drei zusammen (§ 44, 9).

Zu einer Wurzel $\lambda = \lambda_i$ *der Gleichung* (18) *gehören ein oder* ∞^1 *Punkte gleichen Poles.*

5. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte. Sind die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung (18) *verschieden,* so genügen die entsprechenden Punkte gleichen Poles $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$ nach (16); (3) den Gleichungen:

$$(19) \qquad f_k^{(1)} - \lambda_1 x_k^{(1)} + \varrho_1 u_k = 0, \quad f_k^{(2)} - \lambda_2 x_k^{(2)} + \varrho_2 u_k = 0,$$

$$(20) \qquad \sum_1^3 {}_k u_k x_k^{(1)} = 0, \quad \sum_1^3 {}_k u_k x_k^{(2)} = 0.$$

Wäre nun $x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$, so würde aus (19) folgen:

$$-(\lambda_1 - \lambda_2) x_k^{(1)} + (\varrho_1 - \varrho_2) u_k = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

und hieraus, da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$x_k^{(1)} = \sigma u_k, \quad \sigma = \varrho_1 - \varrho_2 : \lambda_1 - \lambda_2$$

und damit aus (20):

$$\sigma \sum_1^3 {}_k u_k^2 = 0,$$

was für die reelle Gerade (3) nicht möglich ist.

I. *Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Punkte gleichen Poles können niemals zusammenfallen.*

Multipliziert man die Gleichungen (19) mit $x_k^{(2)}$ und $x_k^{(1)}$ und summiert über k, so folgt mit Rücksicht auf (20):

$$(21) \qquad f_{12} - \lambda_1 g_{12} = 0, \quad f_{21} - \lambda_2 g_{21} = 0,$$

und da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist:

$$(22) \qquad f_{12} = 0, \quad g_{12} = 0.$$

II. *Zwei Punkte gleichen Poles,* $x_k^{(1)}$ *und* $x_k^{(2)}$, *die zu verschiedenen Wurzeln* λ_1 *und* λ_2 *gehören, sind stets harmonische Pole in bezug auf jede der beiden Kurven* f *und* g, *bezüglich auf jedes der beiden Punktepaare* $f \times u$ *und* $g \times u$.

6. Die Realität der Wurzeln. Mit Rücksicht auf **5,** I und auf (22) überträgt sich der in § 50, 7 gegebene Beweis auch auf den vorliegenden Fall, also:

Die quadratische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ *in* (18) *hat nur reelle Wurzeln.*

7. Entwicklung der Determinante $\Delta(\lambda)$**.** Die Differentialquotienten der Determinante $\Delta(\lambda)$ sind:

$$(23)\qquad \begin{cases} -\varDelta'(\lambda) = \varDelta_{11}(\lambda) + \varDelta_{22}(\lambda) + \varDelta_{33}(\lambda), \\ -\tfrac{1}{2}\varDelta''(\lambda) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \end{cases}$$

wo:

$$(24)\quad \varDelta_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} & u_2 \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & u_3 \\ u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \varDelta_{12}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{33}-\lambda & u_3 \\ u_1 & u_3 & 0 \end{vmatrix}, \ldots$$

Daher ist mit den Abkürzungen (§ 44, (38)):

$$(25)\qquad \begin{cases} A'^u = A^u_{11} + A^u_{22} + A^u_{33}, \\ Q^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \end{cases}$$

für die Entwicklung von $\varDelta(\lambda)$:

$$(26)\qquad \varDelta(\lambda) = -Q^2\lambda^2 - A'^u\lambda + A^u$$

(§ 43, (5)) und für die Wurzeln:

$$(27)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{A'^u}{Q^2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = -\frac{A^u}{Q^2}.$$

8. Die Multiplizitäten der Linearfaktoren der Determinanten. Sei nun $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in $\varDelta(\lambda)$ vorkommt, und $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste, die gleichzeitig in allen Unterdeterminanten $\varDelta_{kl}(\lambda)$, $k, l = 1, 2, 3$ vorkommt. Es sind dann nach dem Grade der einzelnen Determinanten zulässig die Werte:

$$(28)\qquad l_i = 1, 2; \quad l_i' = 0, 1.$$

Nach der ersten Gleichung (23) folgt dann ebenso, wie § 50, 9, daß mit Ausschluß der Gleichheit:

$$(29)\qquad l_i > l_i'.$$

9. Die Elementarteilerexponenten. Die für die Determinanten A^u in § 44, (40) abgeleitete Identität gibt mit $a_{kk} - \lambda$ für a_{kk} und mit $-\varDelta'(\lambda)$ für A'^u die in λ identische Gleichung[80]):

$$(30)\quad \varDelta'^2(\lambda) = \varDelta^2_{11}(\lambda) + \varDelta^2_{22}(\lambda) + \varDelta^2_{33}(\lambda) + 2\varDelta^2_{23}(\lambda) + 2\varDelta^2_{31}(\lambda) + 2\varDelta^2_{12}(\lambda) - 2Q^2\varDelta(\lambda).$$

Während daher für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 1)$ mit $\varDelta(\lambda)$ nach (28) und (29) stets $l_i' = 0$ ist, folgt aus (30), daß für eine Doppelwurzel $\lambda = \lambda_i (l_i = 2)$ mit $\varDelta(\lambda_i)$ und $\varDelta'(\lambda_i)$ auch alle $\varDelta_{kl}(\lambda_i)$ verschwinden, so daß $l_i' \neq 0$, also nach (28), (29) $l_i' = 1$ ist.

Danach bestimmt der Wert von l_i stets den von l_i' in der Weise, daß:

$$(31)\qquad l_i, l_i' \text{ entweder } = 1, 0 \text{ oder } = 2, 1.$$

10. Der zu einer Wurzel gehörige Punkt gleichen Poles. Da für eine einfache Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nicht sämtliche Unterdeterminanten

$\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, liefern die Gleichungen (17) mit $k = 1, 2, 3$ (§ 44, (26)):

(32) $$x_1^{(i)} : x_2^{(i)} : x_3^{(i)} = \Delta_{k1}(\lambda_i) : \Delta_{k2}(\lambda_i) : \Delta_{k3}(\lambda_i).$$

Zu jeder einfachen Wurzel $\lambda = \lambda_i$ gehört daher stets ein einziger bestimmter Punkt gleichen Poles.

Für eine Doppelwurzel dagegen verschwinden nach (31) alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$, so daß zu ihr jeder Punkt der Geraden (3) als Punkt gleichen Poles zugehört (§ 44, **9**).

11. Verschwindende und nicht verschwindende Wurzeln. Unter den Wurzeln der Gleichung (18) findet sich nach (26) die Wurzel $\lambda = 0$ nicht, wenn $A^u \neq 0$, die Wurzel $\lambda = 0$ einfach, wenn $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$, und zweifach, wenn $A^u = 0$, $A'^u = 0$.

Mit Rücksicht auf § 44, (25) ergibt sich daher entsprechend § 50, **12** und übereinstimmend mit § 44, (41); (43):

Das Schnittpunktpaar $f \times u$ ist ein getrenntes für $A^u \neq 0$, ein zusammenfallendes für $A^u = 0$, $A'^u \neq 0$, unbestimmt für $A^u = 0$, $A'^u = 0$.

Für jede Wurzel λ_i und einen zugehörigen Punkt gleichen Poles $x_k^{(i)}$ ist nach (16) und (3):

$$\sum_1^3 {}^k f_k^{(i)} x_k^{(i)} - \lambda_i \sum_1^3 {}^k x_k^{(i)} x_k^{(i)} = 0$$

oder:

(33) $$f_{ii} = \lambda_i g_{ii}.$$

Ein einer nicht verschwindenden Wurzel λ_i entsprechender Punkt gleichen Poles $x_k^{(i)}$ gehört entweder keinem oder jedem der beiden Punktepaare $f \times u$ und $g \times u$ an.

12. Nachweis des gemeinsamen Polzweiecks. Der einer *einfachen* Wurzel $\lambda = \lambda_i$ entsprechende Punkt gleichen Poles (32) kann als *reeller* Punkt nicht dem Punktepaar $g \times u$ angehören, also auch *nicht* mit seinem Pol in bezug auf *$g \times u$ vereinigt liegen.* Falls $\lambda_i \neq 0$, gehört er nach **11** auch nicht dem Punktepaar $f \times u$ an; falls $\lambda_i = 0$, ist er nach **11** der Doppelpunkt $f \times u$.

Hat nun die Gleichung (18) zwei einfache Wurzeln λ_1 und λ_2, so gehört zu jeder ein einziger Punkt gleichen Poles $x_k^{(1)}$ und $x_k^{(2)}$, der nicht mit seinem Pol zusammenfällt. Zugleich ist nach **5**, II jeder der beiden Punkte harmonischer Pol des andern.

Wenn die quadratische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ zwei verschiedene Wurzeln hat, haben die beiden Punktepaare $f \times u$ und $g \times u$ stets ein einziges gemeinsames Polzweieck.

Wenn sie eine Doppelwurzel hat, haben die beiden Punktepaare alle ihre Polzweiecke gemein und fallen zusammen.

13. Die Quadratdarstellung und ihre Koeffizienten. Da somit stets ein oder ∞^1 gemeinsame Polzweiecke der beiden Punktepaare vorhanden sind, so ist deren gleichzeitige Überführung in die Darstellung (12), (13) stets möglich. Zugleich erhält (12) nach (33) die Form:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0. \tag{34}$$

Die Gleichung des Schnittpunktpaares der Kurve (1) *mit der Geraden* (3) *kann also stets durch orthogonale Transformation auf die Form* (34) *gebracht werden, wo* λ_1 *und* λ_2 *die Wurzeln der quadratischen Gleichung* (18) *sind.*

Das Koordinatenzweieck, auf das sich die Koordinaten z_1, z_2 beziehen, ist das Polzweieck, welches das Punktepaar mit dem imaginären eigentlichen Punktepaar (2), (3) gemein hat. Es ist eindeutig bestimmt für $\lambda_1 \neq \lambda_2$, einfach unbestimmt für $\lambda_1 = \lambda_2$.

14. Die Spezies des Schnittpunktpaares. Mit Rücksicht auf (27) ergeben sich aus (34) für die Spezies des Punktepaares (1), (2) an Stelle von § 49, (20) die Kriterien:

$$\begin{aligned} A^u \neq 0 &\begin{cases} -A^u > 0: & \text{1. Imag. getrennt. Punktepaar;} \\ -A^u < 0: & \text{2. Reell. getrennt. Punktepaar;} \end{cases} \\ A^u = 0,\ A'^u \neq 0&: \text{3. Zusammenf. Punktepaar;} \\ A^u = 0,\ A'^u = 0&: \text{4. Unbest. Punktepaar.} \end{aligned} \tag{35}$$

15. Spezies der Schnittpunktpaare bei gegebener Spezies der Kurve. Die Kriterien § 50, (38) und § 51 (35) können nun in die Kolonnen und Zeilen der Tabelle § 49, (22) an Stelle der dort benutzten eingetragen werden[129]).

16. Schnittpunktpaar mit einer Koordinatenachse. Nehmen wir für die bisher beliebige Gerade u_k die Seite $x_3 = 0$ des Koordinatendreiecks, so sind $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 1$ und wird:

$$A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -A_{33};\ A_{11}^u = -a_{22},\ A_{12}^u = a_{12},\ A_{22}^u = -a_{11},\ A_{13}^u = A_{23}^u = A_{33}^u = 0 \tag{36}$$

und damit (§ 51, (25)):

$$-A^u = A_{33},\quad -A'^u = A'_{33}. \tag{37}$$

Die Spezies des Schnittpunktpaares der Kurve mit der Koordinatenachse $x_3 = 0$ wird daher in Beziehung auf die Spezies der Kurve selbst aus folgender Tafel bestimmt, wo die Bedeutung der eingefügten Namen nachher unter **17** erklärt wird.

(38)

		$A \neq 0$: Eigentl. Kegelschnitte		$A = 0,\ A' \neq 0$: Getr. Linienpaare		$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$:
		$A' > 0,\ AA'' > 0$: I. Imag. Kegelschn.	$A',\ AA'' \not> 0$! II. Reell. Kegelschn.	$A' > 0$: III. Imag. Linienp.	$A' < 0$: IV. Reell. Linienp.	V. Doppellinien
$A_{33} \neq 0$: Getr. Punktepaare	$A_{33} > 0$: 1. Imag. Pktep.	Imag. Ellipse	Ellipse	Imag. Linienp.	0	0
	$A_{33} < 0$: 2. Reell. Pktep.	0	Hyperbel	0	Reell. Linienp.	0
$A_{33} = 0,\ A'_{33} \neq 0$: 3. Doppelp.		0	Parabel	Imag. Parallellinienp.	Reell. Parallellinienp.	Endliche Doppellinie
$A_{33} = 0,\ A'_{33} = 0$: 4. Unbest.		0	0	0	Endl. + u. f. Gerade	Un. ferne Doppellinie

17. Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden. Ist nun die Gerade $x_3 = 0$ *die unendlich ferne Gerade,* so gibt die Tafel, mit den *für diesen Fall eingesetzten Namen,* gleichzeitig die *Klassifikation* der Kegelschnitte, welche *auf der Verbindung der Spezies der Kurve mit der Spezies des Schnittpunktpaares mit der unendlich fernen Geraden* beruht.[95])

Die Tafel gilt dann zur Klassifikation für *jedes* System von Dreieckskoordinaten, dessen Seite $x_3 = 0$ die unendlich ferne Gerade ist, also auch für die gemeinen *schiefwinkligen und rechtwinkligen Koordinaten.*

18. Verschiedenheit der Kriterien der Spezies. Sie stimmt demnach auch mit der Tafel § 26, (19) überein bis auf die Abweichung der beiden ersten Kolonnenüberschriften. Diese erklärt sich daraus, daß, bei gleichbleibenden notwendigen Bedingungen, die hinreichenden Bedingungen der Spezies den verschiedenen Polardreiecken entsprechend (§ 46, (14); § 47, (15); § 50, (34) usw.) verschieden angegeben werden können.

In der Tat ist für die Spezies I nach § 49, (8) notwendig, daß alle A_{kk} und $Aa_{kk} (k = 1, 2, 3)$ positiv sind, hinreichend nach § 49, (9) schon $A_{33} > 0$, $Aa_{11} > 0$, aber nach (38) auch $A' > 0$, $AA'' > 0$ und nach der Tafel § 26, (19) für rechtwinklige Koordinaten auch $A_{33} > 0$, $AA'_{33} > 0$.

§ 52. Berührungsdreieck und rationale Parameterdarstellung.

1. Begriff des Berührungsdreieckes. Bei einem eigentlichen Kegelschnitt:

$$(1)\quad f = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l a_{kl} x_k x_l = 0, \qquad (1')\quad F = \sum_1^3{}^k \sum_1^3{}^l A_{kl} u_k u_l = 0$$

ist ein Dreieck $J_1 J_2 J_3$, welches *aus zwei Punkten J_1 und J_3 der Kurve und dem Pol J_2 ihrer Verbindungslinie* besteht, sich selbst dual. Denn es besteht nach § 11, **10** und § 17, **5** zugleich *aus zwei Tangenten i_3 und i_1 und der Polare i_2 ihres Schnittpunktes.* Wir nennen es ein *Berührungsdreieck.* (Fig. 115.)

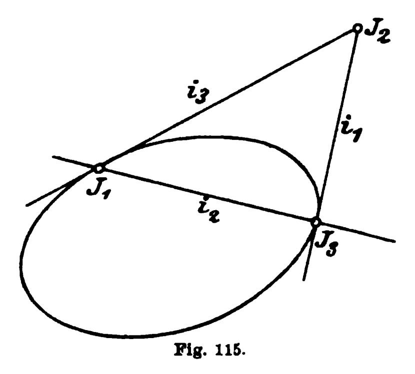


Fig. 115.

2. Berührungsdreieck als Koordinatendreieck. Führt man ein

Berührungsdreieck als Koordinatendreieck ein, so folgt, weil J_1 und J_2, J_3 und J_2 harmonische Pole und J_1 und J_3 Punkte der Kurve sind, daß (§ 41, (13); (6); (7)):

(2) $$b_{12} = 0,\; b_{23} = 0,\; b_{11} = 0,\; b_{33} = 0$$

und umgekehrt. Die Gleichung der Kurve wird daher in Punktkoordinaten:

(3) $$f = b_{22} y_2^2 + 2 b_{13} y_1 y_3 = 0$$

mit der Determinante:

(4) $$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = - b_{22} b_{13}^2,$$

worauf die Gleichung in Linienkoordinaten nach § 41, (23) lautet:

(3′) $$S^2 F = B \left\{ \frac{v_2^2}{b_{22}} + 2 \frac{v_1 v_3}{b_{13}} \right\} = 0.$$

Die Gleichungsform (3), (3′) *ist für das Berührungsdreieck charakteristisch.*[134])

3. Beispiele. Bei der *Scheitelgleichung der Parabel* (§ 13, (37); (43));

(5) $$y^2 - 2pxt = 0, \quad pv^2 - 2us = 0$$

(auch § 14, (25)) sind in der Tat die beiden Seiten $x = 0$ und $t = 0$ des Koordinatendreiecks Tangenten und die dritte Seite $y = 0$ die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte (§ 2, 9).

Bei der *Asymptotengleichung der Hyperbel* (§ 13, (27); (31)):

(6) $$2xy - \frac{e^2}{2} t^2 = 0, \quad e^2 uv - s^2 = 0$$

sind die beiden Seiten $x = 0$, $y = 0$ des Koordinatendreiecks Tangenten (§ 13, (22)) und die dritte Seite $t = 0$ die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte.

4. Erzeugung des Kegelschnittes durch projektive Gebilde. Indem man den Koeffizienten $-2b_{13} : b_{22}$ in die Koordinate y_1 oder y_3 aufnimmt (I § 28, 6) oder $b_{22} = -1$, $2b_{13} = 1$ setzt, kann man den Gleichungen (3) und (3′) die einfache Gestalt geben:

(7) $$y_1 y_3 - y_2^2 = 0,$$ (7′) $$4 v_1 v_3 - v_2^2 = 0.$$

Diese sind aber je das Resultat der Elimination von λ aus den beiden Gleichungen:

(8) $$\begin{cases} y_1 - \lambda y_2 = 0, \\ y_2 - \lambda y_3 = 0, \end{cases}$$ (8′) $$\begin{cases} 2\lambda v_1 + v_2 = 0, \\ \lambda v_2 + 2 v_3 = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) stellen aber zwei projektive Strahlbüschel mit

den Mittelpunkten J_3 und J_1, die Gleichungen (8') zwei projektive Punktreihen auf den Seiten i_3 und i_1 dar (I § 66, 2):

I. *Jeder Kegelschnitt* (Fig. 116) *ist daher der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel, deren Mittelpunkte zwei beliebige Punkte des Kegelschnittes sind.*

I'. *Jeder Kegelschnitt* (Fig. 117) *ist daher der Ort der Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier projektiver Punktreihen, deren Träger zwei beliebige Tangenten des Kegelschnittes sind* (§ 38, 5).

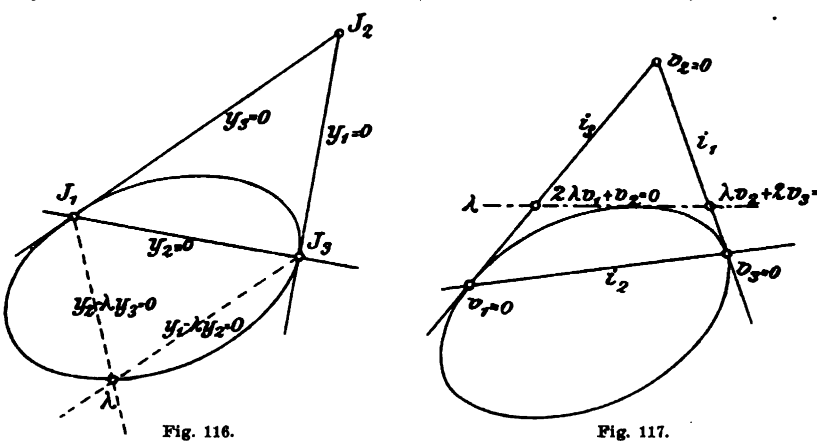


Fig. 116. Fig. 117.

5. Parameterdarstellung des Kegelschnittes. Infolge der Gleichungen (8) und (8') können die Punkte und Tangenten des Kegelschnittes (7), (7') *durch den Parameter λ der Büschel oder Punktreihen* in der Weise dargestellt werden:

(9) $y_1 : y_2 : y_3 = \lambda^2 : \lambda : 1$

(9') $v_1 : v_2 : v_3 = 1 : -2\lambda : \lambda^2$.

Da bei gleichem Werte von λ in (9) und (9'):

(10) $$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0$$

ist, so folgt, daß die Tangente v_1, v_2, v_3 durch den Punkt y_1, y_2, y_3 geht[135]):

II. *Die Parameterdarstellungen* (9) *und* (9') *gehören in der Weise zusammen, daß sie für jeden Wert λ einen Punkt der Kurve und die zugehörige Tangente liefern.*

Die Beziehung zwischen Punkt oder Tangente der Kurve und Parameter λ ist nach (9) und (8) wechselseitig eindeutig.

6. Sehne und Tangentenschnittpunkt.

Die Sehne der beiden Punkte λ_1 und λ_2 hat die Gleichung:

Der Schnittpunkt der beiden Tangenten λ_1 und λ_2 hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder (vgl. § 6, (15)):

$$(11)\quad y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_3 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & -2\lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & -2\lambda_2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder (§ 13, (51)):

$$(11')\quad 2\lambda_1 \lambda_2 v_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 + 2 v_3 = 0.$$

Mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ erhält man aus (11) und (11′) bzw. wieder (9′) und (9).

7. Doppelverhältnis von vier Elementen des Kegelschnittes. Aus den Gleichungen (11) und (11′) geht hervor:

Die Gleichung des Strahlbüschels, dessen Strahlen einen festen Punkt λ_0 der Kurve mit deren laufendem Punkte λ verbinden, lautet:

$$(12)\quad (y_1 - \lambda_0 y_2) - \lambda (y_2 - \lambda_0 y_3) = 0.$$

Das Doppelverhältnis der vier Strahlen $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dieses Büschels (12) (I § 18, (25)):

Die Gleichung der Punktreihe, in deren Punkten eine feste Tangente λ_0 der Kurve von deren laufender Tangente λ geschnitten wird, lautet:

$$(12')\quad \lambda (2\lambda_0 v_1 + v_2) + (\lambda_0 v_2 + 2 v_3) = 0.$$

Das Doppelverhältnis von vier Punkten $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ dieser Punktreihe (12′) (I § 20, (13)):

$$(13)\qquad \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}$$

ist von λ_0 unabhängig.[136])

Vier Strahlen, die vier feste Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *der Kurve mit einem veränderlichen Punkte* λ_0 *verbinden* (Fig. 118), *haben ein festes Doppelverhältnis.*

Es heißt das *Doppelverhältnis der vier Punkte.*

Vier Punkte, die auf vier festen Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *der Kurve von einer veränderlichen Tangente* λ_0 *ausgeschnitten werden* (Fig. 119), *haben ein festes Doppelverhältnis.*

Es heißt das *Doppelverhältnis der vier Tangenten.*

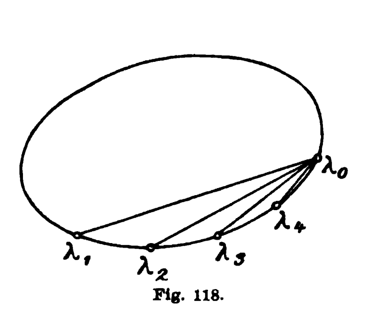


Fig. 118.

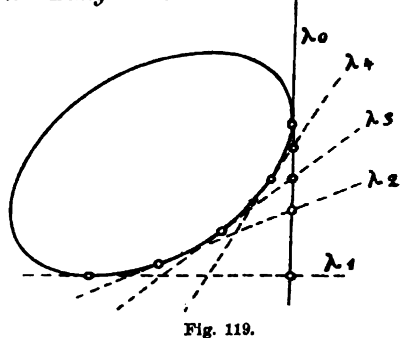


Fig. 119.

Damit aber folgt aus 5, II:

Vier Punkte eines Kegelschnittes und die vier Tangenten in ihnen haben dasselbe Doppelverhältnis.

Ist es -1, heißen die vier Punkte und Tangenten vier *harmonische Punkte* und *Tangenten des Kegelschnittes.*

8. Allgemeine rationale Parameterdarstellung. In einem beliebigen andern Koordinatensystem x_k, u_k, zu dem man mittels der Transformationsformeln (I § 30, (1); (12)):

$$(14) \qquad \varrho x_k = \sum_1^3{}^l c_{kl} y_l, \quad \sigma u_k = \sum_1^3{}^l C_{kl} v_l$$

übergeht, lauten die Parameterdarstellungen (9) und (9′):

$$(15) \begin{cases} \varrho x_1 = c_{11}\lambda^2 + c_{12}\lambda + c_{13}, \\ \varrho x_2 = c_{21}\lambda^2 + c_{22}\lambda + c_{23}, \\ \varrho x_3 = c_{31}\lambda^2 + c_{32}\lambda + c_{33}, \end{cases} \quad (15') \begin{cases} \sigma u_1 = C_{11} - 2C_{12}\lambda + C_{13}\lambda^2, \\ \sigma u_2 = C_{21} - 2C_{22}\lambda + C_{23}\lambda^2, \\ \sigma u_3 = C_{31} - 2C_{32}\lambda + C_{33}\lambda^2, \end{cases}$$

wo die Koeffizienten C_{kl} die Unterdeterminanten der nicht verschwindenden Determinante $C = |c_{kl}|$ sind.[28])

Umgekehrt kann von der mit beliebigen Koeffizienten c_{kl} gegebenen Darstellung (15) durch die Koordinatentransformation (14) zu der Form (9) übergehen.

Die Formeln (15) *und* (15′) *enthalten demnach die allgemeine Parameterdarstellung der Punkte und zugehörigen Tangenten der Kegelschnitte durch denselben Parameter* λ.

Die Darstellung der Ellipse in § 6, (10); § 13, (48):

$$(16) \qquad \begin{aligned} x : y : t &= a(1-\lambda^2) : 2b\lambda : 1 + \lambda^2; \\ u : v : s &= b(1-\lambda^2) : 2a\lambda : -ab(1+\lambda^2) \end{aligned}$$

und die der Parabel § 6, (14); § 13, (50):

$$(17) \qquad x : y : t = \lambda^2 : 2p\lambda : 2p; \quad u : v : s = 2p : -2\lambda : \lambda^2$$

sind spezielle Fälle der Darstellung (15); (15′).

9. Die Parameterdarstellung als Grundlage des Pascalschen Satzes. Sind im Sinne der Darstellung (9) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ die Parameter der Ecken *eines dem Kegelschnitt einbeschriebenen Sechseckes*, so sind nach (11) die Gleichungen von dessen Seiten:

$$(18) \qquad \begin{aligned} e_{12} &= y_1 - (\lambda_1 + \lambda_2) y_2 + \lambda_1 \lambda_2 y_3 = 0, \\ e_{45} &= y_1 - (\lambda_4 + \lambda_5) y_2 + \lambda_4 \lambda_5 y_3 = 0, \ldots, \end{aligned}$$

wo $e_{12}, e_{45}, \ldots$ als Abkürzungen für die linken Seiten der Gleichungen dienen.

Führen wir nun an Stelle der Abkürzungen L, M, N in § 37, (7) die folgenden ein:

$$(19)\quad \begin{cases} L_1 = \lambda_1\lambda_4 + \lambda_3\lambda_6 + \lambda_5\lambda_2, \\ M_1 = \lambda_1\lambda_6 + \lambda_3\lambda_2 + \lambda_5\lambda_4, \\ N_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_5\lambda_6, \end{cases} \quad \begin{cases} L_2 = \lambda_3\lambda_5\lambda_4 + \lambda_5\lambda_1\lambda_6 + \lambda_1\lambda_3\lambda_2, \\ M_2 = \lambda_3\lambda_5\lambda_6 + \lambda_5\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4, \\ N_2 = \lambda_3\lambda_5\lambda_2 + \lambda_5\lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_6, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_3 = \lambda_1\lambda_6\lambda_2 + \lambda_3\lambda_2\lambda_4 + \lambda_5\lambda_4\lambda_6, \\ M_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_6 + \lambda_5\lambda_6\lambda_2, \\ N_3 = \lambda_1\lambda_4\lambda_6 + \lambda_3\lambda_6\lambda_2 + \lambda_5\lambda_2\lambda_4, \end{cases} \quad \begin{cases} L_4 = \lambda_3\lambda_5\lambda_6\lambda_2 + \lambda_5\lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_6, \\ M_4 = \lambda_3\lambda_5\lambda_2\lambda_4 + \lambda_5\lambda_1\lambda_4\lambda_6 + \lambda_1\lambda_3\lambda_6\lambda_2, \\ N_4 = \lambda_3\lambda_5\lambda_4\lambda_6 + \lambda_5\lambda_1\lambda_6\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3\lambda_2\lambda_4, \end{cases}$$

so lauten die identischen Gleichungen § 37, (8), welche das einbeschriebene Sechseck als *Pascalsches* charakterisieren, mit den Abkürzungen § 37, (4):

$$(20)\quad \begin{cases} \varrho_1 e_{12} - \varrho_1' e_{45} + p_1 = 0, \\ \varrho_2 e_{34} - \varrho_2' e_{61} + p_1 = 0, \\ \varrho_3 e_{56} - \varrho_3' e_{23} + p_1 = 0, \end{cases}$$

wo:

$$(21)\quad p_1 = (M_1 - N_1)y_1 + (M_2 - N_2 + M_3 - N_3)y_2 + (M_4 - N_4)y_3 = 0$$

die Gleichung der *Pascalschen Linie* ist.

10. Mannigfaltigkeit der Pascalschen Sechsecke. Da bei der Ableitung der Gleichungen (20) nichts darüber vorausgesetzt ist, *in welcher Reihenfolge* die sechs Ecken mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ bezeichnet werden, so behält ein dem Kegelschnitt einbeschriebenes Sechseck den Charakter als Pascalsches bei jeder Reihenfolge der sechs Ecken. Je nach der gewählten Reihenfolge werden aber die sechs Seiten des Sechsecks, welche je zwei in dieser Reihenfolge benachbarte Ecken verbinden, verschieden sein, ebenso die zugehörigen Pascalschen Geraden.

Da nun die nur dem Sinne nach verschiedenen Folgen (wie 123456 und 165432) und die nur dem Anfangspunkt nach verschiedenen Folgen (wie 123456 und 561234) nicht als verschieden zu gelten haben, so braucht man, um alle verschiedenen Sechsecke zu erhalten, nur bei festgehaltener Ecke 1 die fünf übrigen Ecken auf alle 120 Arten zu vertauschen und von zwei Permutationen ent-

gegengesetzten Sinnes (wie 23456 und 65432) noch die eine auszuscheiden. Es ergibt sich somit[106]):

Alle einbeschriebenen sechzig Sechsecke, die den verschiedenen Reihenfolgen von sechs Punkten eines Kegelschnittes entsprechen, sind Pascalsche Sechsecke; oder auch mit Rücksicht auf § 37, **6** und **4**:

Ist eines von den sechzig Sechsecken, die durch sechs Punkte der Ebene bestimmt sind, ein Pascalsches, so gilt dies auch von allen übrigen.

11. Vertauschung der geraden Ecken. Wir betrachten insbesondere die sechs Sechsecke, die aus dem ursprünglichen durch Vertauschung der geraden Ecken entstehen:

$$(22)\quad \begin{cases} S_1 = 123456 \\ S_2 = 143652 \\ S_3 = 163254 \end{cases} \qquad (22')\quad \begin{cases} S_1' = 143256 \\ S_2' = 123654 \\ S_3' = 163452. \end{cases}$$

Die Vertauschung der ungeraden Ecken würde dieselben Sechsecke liefern, z. B. aus S_1: $325416 = S_3$, $321456 = -S_2'$.

In (22) gehen S_1, S_2, S_3, in (22′) S_3', S_2', S_1' durch zyklische Vertauschung von $2, 4, 6$ ineinander über, und S_k verwandelt sich in S_k' durch Vertauschung von 2 und 4.

Die Bedingungsgleichungen (20) verwandeln sich beim Übergang von S_1 auf S_2 und S_3 in:

$$(23)\quad \begin{cases} \varrho_3'' e_{14} - \varrho_3 e_{56} + p_2 = 0, \\ \varrho_1'' e_{36} - \varrho_1 e_{12} + p_2 = 0, \\ \varrho_2'' e_{52} - \varrho_2 e_{34} + p_2 = 0, \end{cases} \qquad (23')\quad \begin{cases} \varrho_2' e_{16} - \varrho_2'' e_{52} + p_3 = 0, \\ \varrho_3' e_{32} - \varrho_3'' e_{14} + p_3 = 0, \\ \varrho_1' e_{54} - \varrho_1'' e_{36} + p_3 = 0. \end{cases}$$

Hier gelten neben § 37, (4) die Abkürzungen:

$$(24)\quad \begin{cases} \varrho_1'' = (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_4), \\ \varrho_2'' = (\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6), \\ \varrho_3'' = (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_2), \end{cases}$$

und werden, da bei zyklischer Vertauschung von $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6$ die Größen L_k, M_k, N_k in (19) sich selbst zyklisch vertauschen, die Gleichungen der Pascalschen Linien der Sechsecke S_2 und S_3:

$$(25)\quad \begin{cases} p_2 = (N_1 - L_1)y_1 + (N_2 - L_2 + N_3 - L_3)y_2 + (N_4 - L_4)y_3 = 0, \\ p_3 = (L_1 - M_1)y_1 + (L_2 - M_2 + L_3 - M_3)y_2 + (L_4 - M_4)y_3 = 0. \end{cases}$$

Durch Vertauschung von 2 und 4 entstehen alsdann aus (21) und (25) die Gleichungen:

$$(26)\qquad p_1' = 0, \quad p_2' = 0, \quad p_3' = 0$$

der Pascalschen Linien der drei Sechsecke S_1', S_2', S_3'.

Da nun aus (21) und (25) die Identität:

$$(27) \qquad p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

hervorgeht und bei Vertauschung von 2 und 4 ebenso:

$$(28) \qquad p_1' + p_2' + p_3' = 0$$

ist, so folgt[106]):

Die Pascalschen Linien der drei Pascalschen Sechsecke (22) *und ebenso diejenigen der drei Pascalschen Sechsecke* (22') *gehen jedesmal durch einen Punkt (Steinerschen Punkt).*

II. Teil.

Die Gebilde zweiter Ordnung im Raume.

I. Abschnitt.

Gestalt und Bestandteile der Flächen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Scheitel- und Brennpunkte, Hauptschnitte und Brennlinien, Draht- und Gipsmodelle.

§ 53. Drehungs- und Zylinderflächen zweiter Ordnung.

1. Entstehung der Drehungsflächen aus den Kegelschnitten. In der zx-Ebene eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems $Oxyz$ sei die *Ellipse* oder *Hyperbel* (§ 1, (7)):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1 \tag{1}$$

oder die *Parabel* (§ 2, (9)):

$$\frac{z^2}{p} + 2x - p = 0 \tag{2}$$

verzeichnet.

Durch Drehung eines dieser Kegelschnitte um die x-Achse des Koordinatensystems entsteht eine *Drehungs- oder Rotationsfläche.* Die einzelnen Lagen des erzeugenden Kegelschnittes bilden die *Meridiankurven*, seine einzelnen Punkte beschreiben die *Parallelkreise* der Drehungsfläche.

Fig. 120.

Während der Drehung behält der einzelne Punkt $P = x, y, z$ seinen Abstand $P_{yz}P$ von der yz-Ebene (Fig. 120) und seinen Abstand P_xP von der x-Achse beständig bei. Bezeichnet daher $P_0 = x_0, 0, z_0$ seine ursprüngliche Lage, so bleibt immer (I § 31, (2); I § 33, (13)):

$$x = x_0, \quad \sqrt{y^2 + z^2} = z_0. \tag{3}$$

Da aber x_0, z_0 der Gleichung (1) oder (2) genügen, so folgt[137]):

Die durch Drehung der Kegelschnitte (1) *und* (2) *um die x-Achse entstehenden Drehungsflächen haben die Gleichungen:*

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 - e^2} = 1 \qquad (5) \qquad \frac{y^2 + z^2}{p} + 2x - p = 0\,.$$

Sie sind gegen die Transformation (I § 14, (9)):

(6) $$x = x', \quad y = y' \cos\varphi - z' \sin\varphi, \quad z = y' \sin\varphi + z' \cos\varphi$$

invariant (gestatten die kontinuierliche Gruppe der Drehungen (6))[91]).

Ebenso entsteht durch Drehung des Kegelschnittes (1) *um die z-Achse* die Drehungsfläche:

(7) $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1\,.$$

2. Hauptebenen und Hauptachsen. Der Mittelpunkt O des Kegelschnittes (1) (§ 1, 5) bleibt auch *Mittelpunkt der Drehungsfläche* (4) *oder* (7).

Die Fläche hat eine ausgezeichnete *Symmetrie-* oder *Hauptebene (Äquatorialebene)*, die yz-Ebene bei (4), die xy-Ebene bei (7). Außerdem sind die Ebenen der Meridiankurven, die *Meridianebenen, Hauptebenen.* Die Schnittlinie von zwei Hauptebenen ist eine *Hauptachse.* Neben der x-Achse bei (4) und der z-Achse bei (7), die als *Drehungsachse* eine *ausgezeichnete* Hauptachse ist, gilt auch jeder Durchmesser in der Äquatorialebene als Hauptachse. Irgend zwei zueinander senkrechte Durchmesser dieser Art bilden mit der Drehungsachse ein System von *drei* rechtwinkligen Hauptachsen. So die Achsen x, y und z.

3. Das verlängerte Rotationsellipsoid und zweischalige Rotationshyperboloid. Den beiden Annahmen (§ 1, 4):

(8) $$a > e \quad \text{oder} \quad a < e$$

entsprechend ist der Kegelschnitt (1) eine Ellipse oder Hyperbel und die Drehungsfläche (4) ein *verlängertes Rotationsellipsoid* (Fig. 121 um die x-Achse gedreht) oder ein *zweischaliges Rotationshyperboloid* (Fig. 122 ebenso).

Die *Scheitelpunkte* und *Brennpunkte* des Kegelschnittes (1):

(9) $A, A' : x = \pm a, y = 0, z = 0$; (10) $F, F' : x = \pm e, y = 0, z = 0$

bleiben als Punkte der Drehungsachse für die Rotationsfläche erhalten. Es folgt daher (§ 1, 5):

Die Scheitelpunkte (Pole) liegen auf der Drehungsachse, beim verlängerten Rotationsellipsoid außerhalb, beim zweischaligen Rotationshyperboloid innerhalb der Brennpunkte.

Mit der Bezeichnung:

(11) $a^2 - e^2 = c^2 (a^2 > c^2)$ oder (12) $a^2 - e^2 = -c^2$,

den beiden Annahmen (8) entsprechend (§ 1, (12)), werden die Gleichungen des *verlängerten Rotationsellipsoids* und *zweischaligen Rotationshyperboloids* aus (4) bezüglich:

(13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 (a^2 > c^2)$ (14) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$.

Im Falle (12) gibt die Gleichung (§ 1, (18')):

$$(15) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2 - e^2} = 0\right)$$

den durch Drehung des Asymptotenpaares der Hyperbel (Fig. 122) um die x-Achse erzeugten *Drehungskegel*, den *Asymptotenkegel* des zweischaligen Rotationshyperboloids (14), bezüglich (4), der mit seinen beiden Mänteln dessen beide Schalen umschließt.

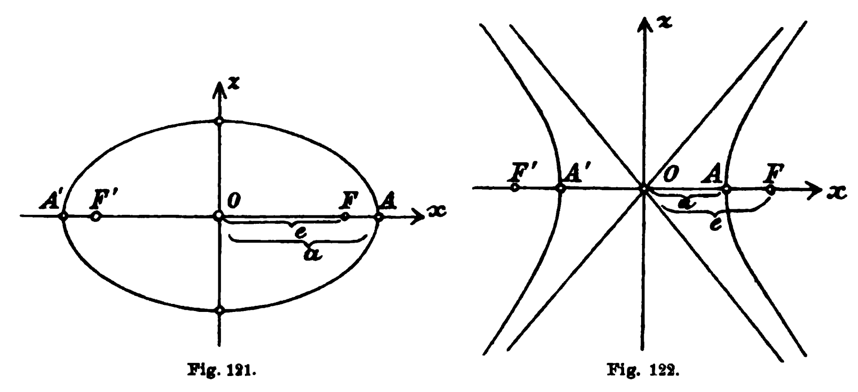


Fig. 121. Fig. 122.

Mit $a^2 = c^2$ stellt Gleichung (13) die *Kugel* dar, Gleichung (14) aber das durch Drehung der gleichseitigen Hyperbel (§ 1, (22)) entstehende *zweischalige Rotationshyperboloid*, dessen Asymptotenkegel:

$$(16) \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

ein *rechtwinkliger Drehungskegel (mit rechtwinkligen Meridianschnitten)* ist.

4. Das abgeplattete Rotationsellipsoid und einschalige Rotationshyperboloid. Den beiden Annahmen (8) entsprechend ist die Drehungsfläche (7) ein *abgeplattetes Rotationsellipsoid* (Fig. 121 um die z-Achse gedreht) oder ein *einschaliges Rotationshyperboloid* (Fig. 122 ebenso).

Die Scheitelpunkte (9) und die Brennpunkte (10) des Kegelschnittes (1) beschreiben bei der Drehung um die z-Achse den *Scheitelkreis (Äquator)* und *Brennkreis* der Drehungsfläche.

Der Scheitelkreis liegt (§ 1, 5) *in der Äquatorialebene, beim abgeplatteten Rotationsellipsoid außerhalb, beim einschaligen Rotationshyperboloid innerhalb des Brennkreises.*

Mit der Bezeichnung (11); (12) werden *die Gleichungen des durch Drehung der Ellipse oder Hyperbel um die z-Achse beschriebenen abgeplatteten Rotationsellipsoids oder einschaligen Rotationshyperboloids:*

(17) $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \, (a^2 > c^2)$; (18) $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Im Falle (12) gibt die Gleichung:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \left(\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2-e^2} = 0\right) \tag{19}$$

den durch Drehung des Asymptotenpaares der Hyperbel um die z-Achse beschriebenen *Drehungskegel*, den *Asymptotenkegel* des Hyperboloids (18), bezüglich (7), der von diesem umschlossen wird (Fig. 122).

Mit $a^2 = c^2$ stellt Gleichung (17) die *Kugel* dar, Gleichung (18) aber das durch Drehung der gleichseitigen Hyperbel entstehende *einschalige Rotationshyperboloid*, dessen Asymptotenkegel:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{20}$$

ein *rechtwinkliger Drehungskegel* ist.

5. Das Rotationsparaboloid. Das *Rotationsparaboloid* (5) (Fig. 123, um die x-Achse gedreht, $p > 0$, § 2, 4) hat die x-Achse als *Haupt-* und *Drehungsachse.* Jede durch sie gehende Ebene ist *Haupt-* oder *Symmetrieebene.*

Fig. 123.

Scheitelpunkt und *Brennpunkt* der Parabel (§ 2, (10)):

$$S: x = \frac{p}{2}, \; y = 0, \; z = 0; \tag{21}$$

$$O: x = 0, \; y = 0, \; z = 0 \tag{22}$$

bleiben für das Rotationsparaboloid erhalten. Die Direktrix d der Parabel beschreibt die *Direktrixebene* des Paraboloids (§ 2, (1)):

$$x = p. \tag{23}$$

Mit $x + \frac{p}{2}$ für x erhält die Gleichung des Rotationsparaboloids auch die Form (§ 2, (12)):

$$y^2 + z^2 + 2px = 0. \tag{24}$$

6. Brennpunktsgleichung der Rotationsflächen. Der gemeinsamen Brennpunktsgleichung der Ellipse, Hyperbel und Parabel entsprechend (§ 4, (19)), können das *verlängerte Rotationsellipsoid, zwei-*

schalige Rotationshyperboloid und *Rotationsparaboloid* auch durch die Gleichung:

$$(25)\qquad (x^2 + y^2 + z^2) - \varepsilon^2\left(x - \tau\,\frac{p}{\varepsilon}\right)^2 = 0,\ \tau = \pm 1,$$

dargestellt werden, wo der Anfangspunkt O ein *Brennpunkt* ist.

7. Entstehung der Zylinderfläche. Bezieht man die Gleichung (1) oder (2) selbst auf ein *räumliches* rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$, so stellt sie einen *Zylinder* dar (I § 72, (14)). Er wird dadurch erzeugt, daß der Kegelschnitt (1) oder (2) in der Richtung der y-Achse verschoben wird; die einzelnen Lagen des Kegelschnittes bilden die *Gürtelkurven* des Zylinders. Oder er wird dadurch erzeugt, daß eine der y-Achse parallel bleibende Gerade längs des Kegelschnittes (der *Leitkurve*) fortgleitet; die einzelnen Lagen der Geraden bilden die *Erzeugenden* des Zylinders[138]).

Die Gleichungen (1) und (2) sind gegen die Transformation:

$$(26)\qquad x = x',\quad y = y_0 + y',\quad z = z'$$

(I § 37, (1)) invariant[91]).

8. Hauptebenen und Hauptachsen der Zylinder. Der Zylinder (1) hat drei *Symmetrie-* oder *Hauptebenen*, die xy-, yz- und zx-Ebene; die beiden ersten sind bestimmt, die dritte aber parallel mit sich verschiebbar.

Er hat dementsprechend *eine bestimmte Hauptachse*, die y-Achse; zwei andere *Hauptachsen*, die x-Achse und z-Achse, können bei unveränderter Richtung, statt von O, auch von irgendeinem andern Punkte der y-Achse ausgehen.

Die y-Achse ist gleichzeitig *Mittelpunktsachse* (Ort der Mittelpunkte) des Zylinders.

9. Der elliptische und hyperbolische Zylinder. Den beiden Annahmen (8) entsprechend ist der Zylinder (1) ein *elliptischer* (Fig. 121 senkrecht zur Zeichnungsebene verschoben) oder *hyperbolischer* (Fig. 122 ebenso) *Zylinder.*

Die Gleichungen:

$$(27)\qquad x = \pm a,\ z = 0; \qquad\qquad (28)\qquad x = \pm e,\ z = 0$$

stellen, auf $Oxyz$ bezogen, die der y-Achse parallelen *Scheitellinien* und *Brennlinien* des Zylinders dar.

Beim elliptischen Zylinder liegen die Scheitellinien außerhalb, beim hyperbolischen innerhalb der Brennlinien (§ 1, 5).

Mit der Bezeichnung (11); (12) werden die *Gleichungen des elliptischen oder hyperbolischen Zylinders:*

(29) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a^2 > c^2)$; (30) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Die Gleichung:

(31) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gibt im Falle (12) die durch Schiebung des Asymptotenpaares der Hyperbel (Fig. 122) beschriebenen *Asymptotenebenen* des Zylinders (30).

Mit $a^2 = c^2$ liefert die Gleichung (29) den *geraden Kreiszylinder* oder *Rotationszylinder*, die Gleichung (30) den *gleichseitig hyperbolischen Zylinder* mit rechtwinkligen Asymptotenebenen.

10. Der parabolische Zylinder. Der *parabolische Zylinder* (2) (Fig. 123 senkrecht zur Zeichnungsebene verschoben) hat eine bestimmte *Haupt-* oder *Symmetrieebene*, die xy-Ebene; eine zweite Hauptebene, die xz-Ebene, ist parallel mit sich verschiebbar. Er hat eine *Hauptachse*, die x-Achse, die in der xy-Ebene parallel mit sich verschoben werden kann.

Die y-Achse ist die *Brennlinie*, während die Gleichungen:

(32) $x = \frac{p}{2},\ z = 0$; (33) $x = p$,

auf $Oxyz$ bezogen, die *Scheitellinie* und die *Direktrixebene* des parabolischen Zylinders darstellen.

Mit $x + \frac{p}{2}$ für x erhält die *Gleichung des parabolischen Zylinders* die Form:

(34) $$z^2 + 2px = 0.$$

11. Gleichungen der Kegelschnitte in Ebenenkoordinaten. In bezug auf das *ebene* System Oxz stellen die Gleichungen (29), (30) und (34) die drei Kegelschnitte in Punktkoordinaten x, z dar, während deren Gleichungen in Linienkoordinaten u, w lauten (§ 13, (18); (43)):

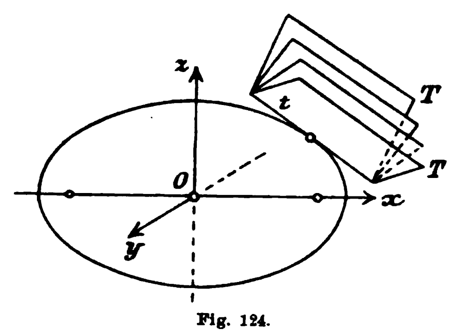


Fig. 124.

(35) $$a^2u^2 \pm c^2w^2 = 1;$$
$$pw^2 + 2u = 0.$$

In bezug auf das *räumliche* System $Oxyz$ geben die Gleichungen (29) (30) und (34) nach **9** und **10** die den Kegelschnitten entsprechenden Zylinder in Punktkoordinaten x, y, z. Die Gleichungen (35) jedoch stellen wiederum die Kegelschnitte selbst dar, nur nicht, wie

in der Ebene, als umhüllt von ihren Tangenten, sondern als umhüllt von ihren Tangentialebenen T, die (I § 45, 2; I § 72, (14′)) büschelweise durch ihre Tangenten t gehen (Fig. 124). Es sind *die Gleichungen der Kegelschnitte in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w im Raume.*[139])

§ 54. Der elliptische Kegel.

1. Die Gleichung des elliptischen Kegels. Die Gleichungen der Drehungskegel § 53, (15) und (19) sind besondere Fälle der allgemeineren Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0, \tag{1}$$

aus der sie mit $d^2 = e^2$ und $d^2 = 0$ entstehen.

Die Gleichung (1) stellt als homogene Gleichung zweiten Grades in x, y, z (I § 72, (16)) ebenfalls einen Kegel zweiter Ordnung dar, der zum Unterschied von dem Drehungskegel der *dreiachsige* oder *elliptische Kegel* genannt wird.[140])

Wir setzen mit:

$$e^2 > d^2 > 0 \tag{2}$$

voraus, daß die drei „*Halbachsenquadrate*“:

$$a^2 > a^2 - d^2 > a^2 - e^2 \tag{3}$$

ihrer algebraischen Größe nach geordnet sind. Da die Gleichung (1) nötigenfalls mit -1 multipliziert werden könnte, darf eines dieser Quadrate, hier a^2, ohne Beschränkung positiv genommen werden. Sind dann auch die beiden übrigen positiv, so wird der Gleichung nur durch $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ genügt; es liegt der *imaginäre Kegel* mit der reellen Spitze O vor. Es bleibt dann nur übrig, daß eins oder keins der beiden übrigen Quadrate positiv ist, also:

$$e^2 > a^2 > d^2 \tag{4}$$ oder $$d^2 > a^2 > 0. \tag{5}$$

2. Hauptebenen und Hauptachsen. Da die Gleichung (1) nur die Quadrate von x, y, z enthält, ist der elliptische Kegel (I § 31, 6) gegen jede der drei Koordinatenebenen *symmetrisch* (geht durch *Spiegelung* an einer solchen Ebene in sich über); die drei Ebenen heißen daher die *Symmetrie-* oder *Hauptebenen*, ihre Schnittlinien die *Hauptachsen* des Kegels. Der Koordinatenanfangspunkt O ist der *Mittelpunkt* oder die *Spitze* des Kegels.

3. Entstehung des Kegels aus der Ellipse. Die Schnittlinie des Kegels (1) mit einer (bei vertikaler z-Achse) horizontalen Ebene $z = z_0$ (Fig. 125) wird durch die Gleichung:

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} = \frac{z_0^2}{e^2 - a^2}$$

dargestellt, wo x, y unmittelbar als Koordinaten in einem ebenen System $O'x'y'$ betrachtet werden können (I § 40, (19) mit $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $a_1 = 1$, $b_1 = c_1 = 0$; $a_2 = c_2 = 0$, $b_2 = 1$), das parallel mit Oxy vom Punkte $O' = 0, 0, z_0$ ausgeht (Fig. 125).

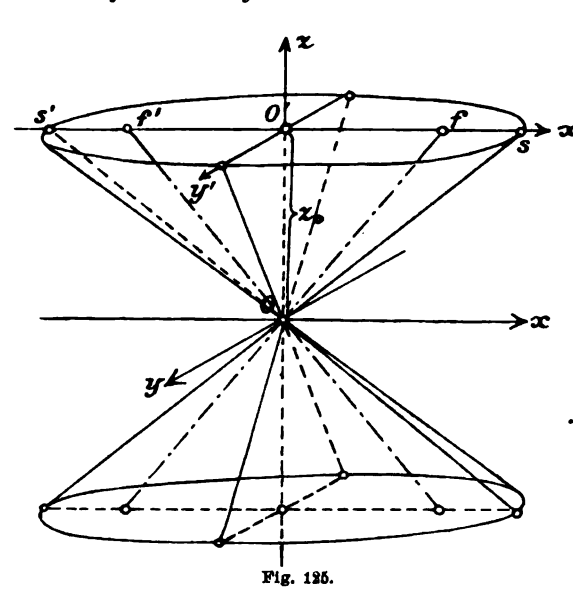


Fig. 125.

Im Falle (4) ist die Schnittlinie (6) eine Ellipse mit dem Mittelpunkt O', den Hauptachsen x' und y' und den Halbachsenquadraten:

$$(7) \qquad a'^2 = \frac{a^2 z_0^2}{e^2 - a^2},$$

$$b'^2 = \frac{(a^2 - d^2) z_0^2}{e^2 - a^2}; \quad a'^2 > b'^2.$$

Der Kegel (1); (4) *wird daher erzeugt* (Fig. 125), *indem ein Strahl des Bündels O an der Ellipse* (6) *als Leitkurve hingleitet.*

Im Falle (5) würde an Stelle der Ellipse eine Hyperbel (6) als Leitkurve eintreten. In diesem Falle wird jedoch der Kegel (1) von einer der yz-Ebene parallelen Ebene $x = x_0$ in einer Ellipse:

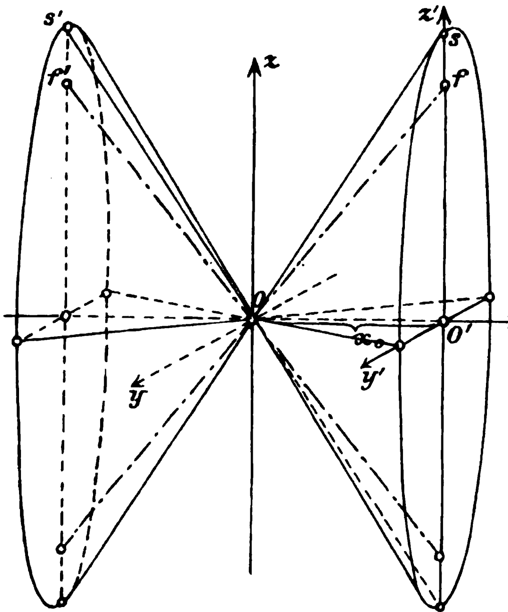


Fig. 126.

$$(8) \qquad \frac{y^2}{d^2 - a^2} + \frac{z^2}{e^2 - a^2} = \frac{x_0^2}{a^2}$$

mit dem Mittelpunkt $O' = x_0, 0, 0$, den Hauptachsen y' und z' (Fig. 126) und den Halbachsenquadraten:

$$(9) \qquad b'^2 = \frac{(d^2 - a^2) x_0^2}{a^2},$$

$$c'^2 = \frac{(e^2 - a^2) x_0^2}{a^2}; \quad c'^2 > b'^2$$

geschnitten.

Der Kegel (1); (5) *wird daher gleichfalls aus einer Ellipse als Leitkurve erzeugt.*

Die *beiden* Annahmen (4) und (5) führen also nur zu *einer* Gattung, die nun ihrer Erzeugung wegen als *elliptischer Kegel* bezeichnet wird. Ein Unterschied beruht nur in der Lage gegen das Koordinatensystem (Fig. 125 und 126).

4. Unterscheidung der einzelnen Hauptebenen und Hauptachsen. Die den verschiedenen Ebenen $z = z_0$ entsprechenden Ellipsen (6) sind *ähnlich und ähnlich liegend* (§ 14, 10). Durch die Ebene $z_0 = 0$, für die sich die Ellipse (6) auf die Spitze des Kegels zusammenzieht, wird der *Kegel* (1); (4) in einen *oberen* und einen *unteren Mantel* geschieden (Fig. 125); wir nennen die xy-Ebene die *äußere Hauptebene* und die z-Achse, den Ort der Mittelpunkte der Ellipsen (6), die *innere Hauptachse* des Kegels. Die zx-Ebene, der Ort der großen Achsen der Ellipsen (6), heißt die *Hauptebene der größten Öffnung*, die yz-Ebene ebenso die *Hauptebene der kleinsten Öffnung* des Kegels. Von den *äußeren Hauptachsen* kann entsprechend die x-Achse die *große*, die y-Achse die *kleine Hauptachse* des Kegels genannt werden.

Bei dem *Kegel* (1); (5) ist die yz-Ebene, die ihn in einen *rechten* und *linken* Mantel scheidet (Fig. 126), die *äußere Hauptebene* und die x-Achse die *innere Hauptachse.* Die *Hauptebene der größten Öffnung*, der Ort der großen Achsen der Ellipsen (8), ist die zx-Ebene, die *Hauptebene der kleinsten Öffnung* die xy-Ebene; die z-Achse ist die *große*, die y-Achse die *kleine Hauptachse.*[5])

5. Scheitellinien und Brennlinien. Der Kegel (1) wird in beiden Fällen (4) und (5) von der Hauptebene der größten Öffnung, der zx-Ebene, in dem Geradenpaar:

$$(10) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{e^2 - a^2} = 0, \quad y = 0,$$

den *Scheitellinien* s, s' dieser Hauptebene (Fig. 125; 126), geschnitten.[7]) Beim Übergang vom Falle (4) zu (5) für $a^2 = d^2$ gehen die Scheitellinien durch das Geradenpaar:

$$(11) \qquad \frac{x^2}{d^2} - \frac{z^2}{e^2 - d^2} = 0, \quad y = 0$$

hindurch, das die *Brenn- oder Fokallinien des Kegels* darstellt.[141]) Die Nenner d^2 und $d^2 - e^2$ sind die Differenzen je eines äußeren und des mittleren Halbachsenquadrates (3).

Die Fokallinien f, f' (Fig. 125; 126) *liegen stets innerhalb des Kegels in der Hauptebene der größten Öffnung und trennen die Scheitellinien von der inneren Hauptachse.*

6. Sphärischer Kegelschnitt. Der Durchschnitt des elliptischen Kegels (1) mit der Einheitskugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{12}$$

heißt ein *sphärischer Kegelschnitt (sphärische Ellipse).*[142])

Er hat dieselben *Symmetrieachsen* wie der Kegel selbst.

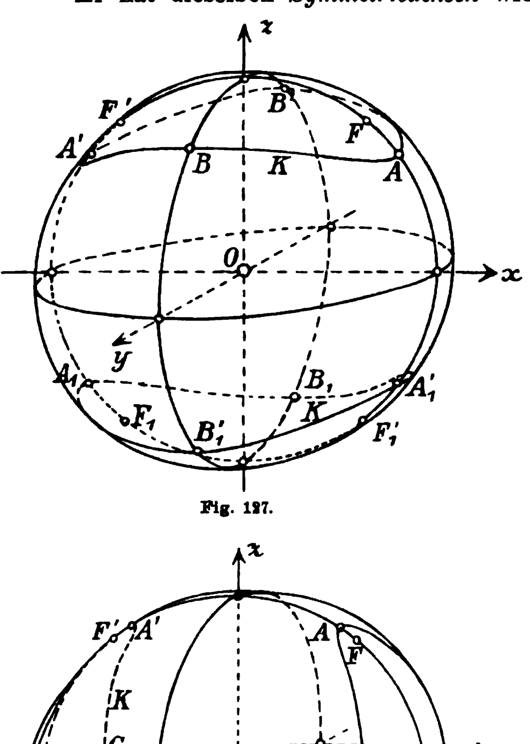


Fig. 127.

Die vier Punkte F, F', F_1, F_1' (Fig. 127; 128), in denen die Brennlinien (11) des Kegels die Kugel (12) schneiden und die paarweise, F und F_1, F' und F_1', diametral liegen, sind die *vier Brennpunkte des sphärischen Kegelschnittes.*

Der sphärische Kegelschnitt (1); (12); (4) (K in Fig. 127) besteht, den beiden Mänteln des Kegels (1); (4) (Fig. 125) entsprechend, aus einem *oberen* $ABA'B'$ und einem *unteren Zweig* $A_1B_1A_1'B_1'$, die beide durch die xy-Ebene getrennt sind (Grundriß K' und Aufriß K'' in Fig. 129, vgl. I § 31, 7).

Der sphärische Kegelschnitt (1); (12); (5) (K in Fig. 128) besteht ebenso aus einem *rechten* $ACA_1'C'$ und einem *linken Zweig* $A_1C_1A'C_1'$, die beide durch die yz-Ebene getrennt werden (Grundriß K' und Aufriß K'' in Fig. 130).

Fig. 128.

7. Vereinfachte Gleichung des elliptischen Kegels. Da die beiden Kegel (1); (4) und (1); (5) nur eine Gattung darstellen, setzen wir unter Beschränkung auf (1); (4):

$$(13) \qquad a^2 - d^2 = b^2, \quad e^2 - a^2 = c^2,$$

und fassen die in 4 und 5 gegebene Beschreibung nochmals zusammen:

Durch die Gleichung[8]):

$$(14) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a^2 > b^2$$

wird ein elliptischer Kegel dargestellt. Die z-Achse ist seine innere Hauptachse (Fig. 125); *die xy-Ebene trennt seine beiden Mäntel; die*

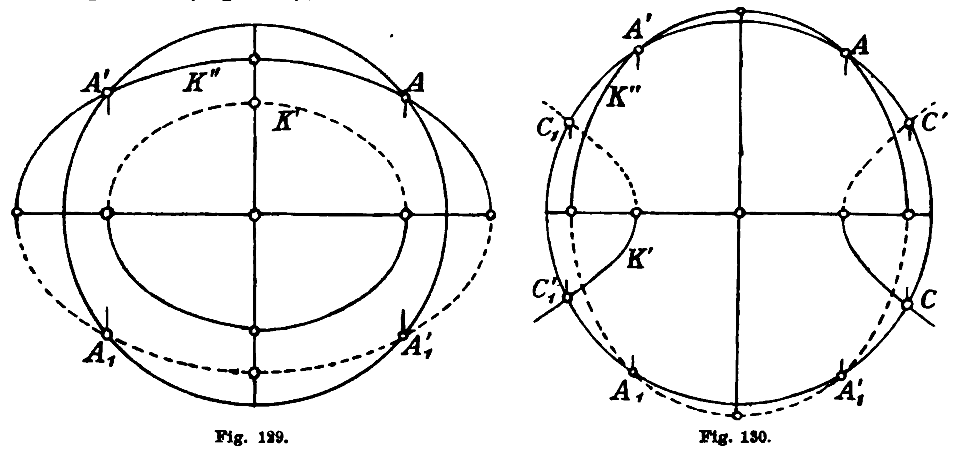


Fig. 129. Fig. 130.

zx-Ebene ist die Hauptebene der größten Öffnung, die yz-Ebene die der kleinsten. Die Gleichungen der Brennlinien lauten:

$$(15) \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0, \quad y = 0.$$

8. Gleichwerdende Halbachsen. Mit $a^2 = b^2$ entsteht der *Rotationskegel,* für den die Brennlinien in der Drehungsachse z zusammenfallen (§ 53, (19)).

Mit $a^2 = c^2$ oder $b^2 = c^2$ entsteht ein *elliptischer Kegel mit rechtwinkligen Scheitellinien* in der Hauptebene der größten oder kleinsten Öffnung.[148])

9. Rechtwinklige Fokallinien. Mit $a^2 - b^2 = b^2 + c^2$ wird das Linienpaar (15) rechtwinklig (§ 7, (40)). Der Kegel (14) ist daher unter der Bedingung:

$$(16) \qquad a^2 - 2b^2 - c^2 = 0$$

ein *Kegel mit rechtwinkligen Fokallinien.*

10. Fokal- und Scheitellinien senkrecht. Die Richtungskosinus der im ersten Quadranten der zx-Ebene liegenden Scheitellinie und

der im zweiten liegenden Fokallinie verhalten sich nach (14) und (15) wie:

$$(17) \qquad a : 0 : c \quad \text{und} \quad \sqrt{a^2 - b^2} : 0 : -\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Sie sind zueinander senkrecht, wenn (I § 35, (4)):

$$a\sqrt{a^2 - b^2} - c\sqrt{b^2 + c^2} = 0$$

oder, rational gemacht:

$$(a^2 + c^2)(a^2 - c^2 - b^2) = 0.$$

Unter der Bedingung:

$$(18) \qquad a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

sind bei dem Kegel (14) *Fokallinien und Scheitellinien zueinander senkrecht.*

§ 55. Gestalt und Bestandteile der Mittelpunktsflächen.

1. Unterscheidung der drei Arten. Die Gleichungen der Drehungsflächen § 53, (4) und (7) sind besondere Fälle der allgemeineren Gleichung (§ 1, (7)):

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 1,$$

aus der sie mit $d^2 = e^2$ und $d^2 = 0$ entstehen. Wir setzen mit:

$$(2) \qquad e^2 > d^2 > 0$$

voraus, daß die drei „*Halbachsenquadrate*": $a^2, a^2 - d^2, a^2 - e^2$, wie in § 54, (3), nach ihrer algebraischen Größe geordnet sind. Die Gleichung (1) umfaßt dann drei Arten von reellen Flächen, je nachdem:

$$(3) \qquad \infty > a^2 > e^2, \quad e^2 > a^2 > d^2 \quad \text{oder} \quad d^2 > a^2 > 0.$$

Wir bezeichnen die drei Arten mit Rücksicht auf ihre im Folgenden zu beschreibende *Gestalt* bezüglich als *Ellipsoid* (dreiachsiges), *einschaliges* und *zweischaliges Hyperboloid.*[1]) Dabei sehen wir von dem *imaginären Ellipsoid* ($0 > a^2 > -\infty$) ab, welches keinen reellen Punkt besitzt.[62])

2. Hauptebenen, Hauptachsen und Mittelpunkt. Die Gleichung (1) enthält nur die Quadrate der Koordinaten, so daß ihr mit dem Punkte x, y, z stets alle acht Punkte $\pm x, \pm y, \pm z$ genügen (I § 31, Fig. 179). Die Fläche ist daher gegen jede der drei Koordinatenebenen *symmetrisch;* sie geht durch *Spiegelung* an jeder in sich über. Die drei Ebenen heißen die drei *Hauptebenen* der Fläche, und zwar die xy-, xz- und yz-Ebene bezüglich die *erste, zweite* und *dritte* Hauptebene.

Dementsprechend gelten die x-, y- und z-Achse als erste, zweite und dritte *Hauptachse* der Fläche.[5])

Der Anfangspunkt O ist der *Mittelpunkt* der Fläche.[6]) Jede durch ihn gehende *Sehne* (jeder *Durchmesser*) der Fläche wird von ihm halbiert. Die Flächen (1) werden auch unter dem gemeinsamen Namen der *Mittelpunktsflächen* zweiter Ordnung zusammengefaßt.

3. Hauptbrennpunkte. Die auf der *ersten* Hauptachse liegenden Punkte (§ 1, (1)):

$$(4)\quad F, F' : x = \pm d,\ y = 0,\ z = 0;\quad G, G' : x = \pm e,\ y = 0,\ z = 0$$

nennen wir mit Rücksicht auf (2) bezüglich *die inneren und äußeren Hauptbrennpunkte* der Fläche. Von ihnen abhängig sind die auf der *zweiten* Hauptachse liegenden zweiten *Hauptbrennpunkte*[2]):

$$(4')\quad H, H' : x = 0,\quad y = \pm \sqrt{e^2 - d^2},\ z = 0.$$

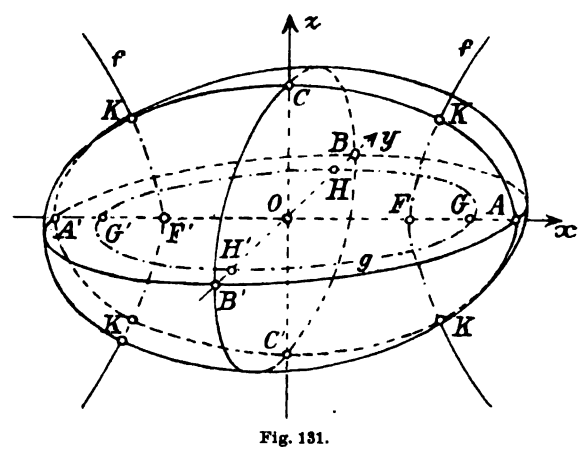


Fig. 131.

4. Scheitelpunkte. Die Schnittpunkte A, A' der Fläche (1) mit der ersten Hauptachse:

$$(5)\quad A, A' : x = \pm a,\quad y = 0,\ z = 0,$$

nennen wir die (ersten oder Haupt-) *Scheitelpunkte* der Fläche. Die Bedeutung der Ungleichungen (3) liegt dann in dem Satze ausgesprochen (vgl. § 1, 5):

Die Scheitelpunkte A, A' liegen bei dem Ellipsoid (Fig. 131) *außerhalb der äußeren und inneren Hauptbrennpunkte F, F'*

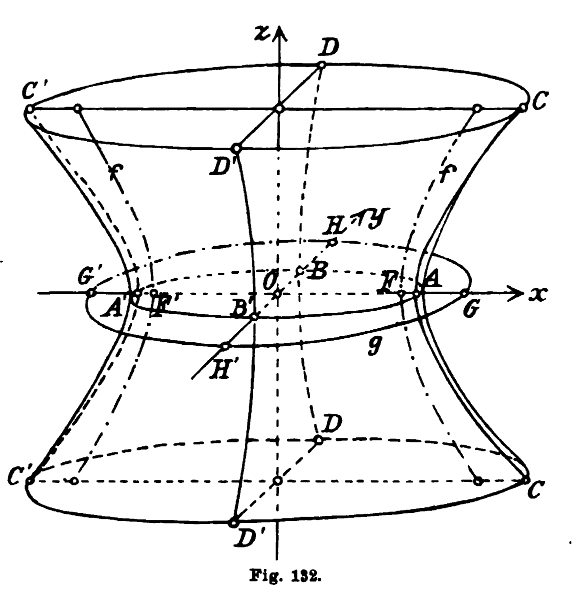


Fig. 132.

und G, G', bei dem einschaligen Hyperboloid (Fig. 132) *zwischen äußeren und inneren, bei dem zweischaligen* (Fig. 133) *innerhalb der äußeren und inneren Hauptbrennpunkte.*

Die *zweiten Scheitelpunkte* B, B', die Schnittpunkte der zweiten Hauptachse mit der Fläche:

(5') $$B, B' : x = 0, \quad y = \sqrt{a^2 - d^2}, \quad z = 0,$$

sind nach (3) für das Ellipsoid und das einschalige Hyperboloid reell und nach (4') bezüglich außerhalb (Fig. 131) und innerhalb (Fig. 132) der zweiten Hauptbrennpunkte gelegen.

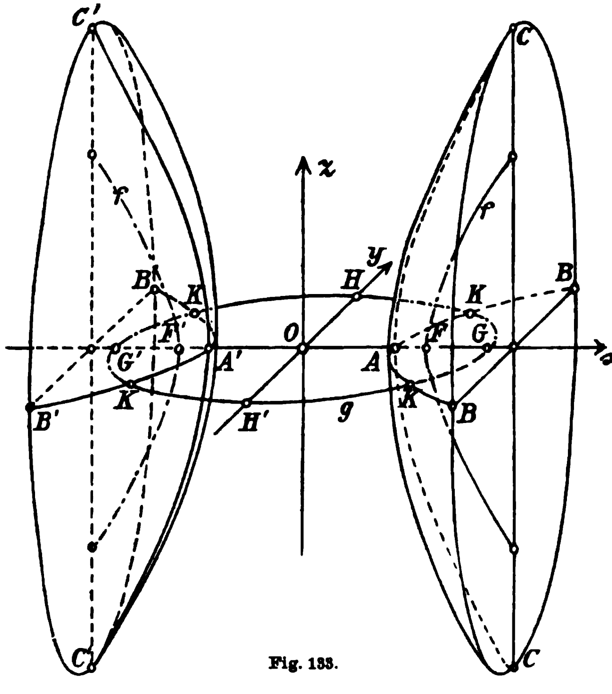


Fig. 133.

Die *dritten Scheitelpunkte:*

(5'') $$C, C' : x = 0, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{a^2 - e^2}$$

sind nur mehr für das Ellipsoid reell (Fig. 131).

5. Hauptachsenlängen. Wir setzen, unter a^2, b^2, c^2 positive Größen verstehend, für das Ellipsoid (§ 1, (12)):

(6) $$a^2 - d^2 = b^2, \quad a^2 - e^2 = c^2; \quad a^2 > b^2 > c^2;$$

für das einschalige Hyperboloid:

(6') $$a^2 - d^2 = b^2, \quad e^2 - a^2 = c^2; \quad a^2 > b^2;$$

für das zweischalige Hyperboloid:

(6'') $$d^2 - a^2 = b^2, \quad e^2 - a^2 = c^2; \quad b^2 < c^2.$$

Die Gleichungen der drei Flächen werden dann[8]):

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

(7') $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

(7'') $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und die Schnittpunkte mit den drei Hauptachsen:

$$(8)\qquad A, A': \pm a, 0, 0,\quad B, B': 0, \pm b, 0,\quad C, C': 0, 0, \pm c;$$

$$(8')\qquad A, A': \pm a, 0, 0,\quad B, B': 0, \pm b, 0,\quad 0, 0, \pm ci;$$

$$(8'')\qquad A, A': \pm a, 0, 0,\quad 0, \pm bi, 0,\quad 0, 0, \pm ci.$$

Beim *Ellipsoid* heißen dann $2a$, $2b$, $2c$ (AA', BB', CC' Fig. 131) die *große, mittlere* und *kleine* Hauptachsenlänge *(Hauptachse)*; beim *einschaligen Hyperboloid* $2a$ und $2b$ (AA', BB' Fig. 132) die *große* und *kleine* und $2ci$ die *imaginäre Hauptachse;* beim *zweischaligen Hyperboloid* $2a$ (AA' Fig. 133) die *reelle,* $2bi$ und $2ci$ die *kleine* und *große imaginäre Hauptachse.*

6. Die Fokalkegelschnitte. Die in der ersten und zweiten Hauptebene liegenden Kegelschnitte:

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{e^2} + \dfrac{y^2}{e^2 - d^2} = 1, & z = 0; \\[2ex] \dfrac{x^2}{d^2} - \dfrac{z^2}{e^2 - d^2} = 1, & y = 0 \end{cases}$$

nennen wir die beiden *Fokalkegelschnitte* (Brennlinien) der Fläche (1), die *Fokalellipse* g und die *Fokalhyperbel* f.[144])

Jene hat die inneren Hauptbrennpunkte F, F' als Brennpunkte und die äußeren Hauptbrennpunkte G, G' als Scheitelpunkte, diese umgekehrt G, G' als Brennpunkte und F, F' als Scheitelpunkte. *Die Scheitelpunkte der einen sind die Brennpunkte der andern.* Die zweiten Scheitelpunkte der Fokalellipse sind H, H'.

Alle Punkte der Fokalkegelschnitte werden als *Brennpunkte* der Fläche angesehen.

Für die Flächen (7), (7') und (7'') werden die Gleichungen der Fokalkegelschnitte:

$$(10)\qquad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1,\quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1;$$

$$(10')\qquad \frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{b^2 + c^2} = 1,\quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 1;$$

$$(10'')\qquad \frac{x^2}{a^2 + c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1,\quad \frac{x^2}{a^2 + b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1.$$

7. Die Hauptschnitte der Fläche. Die Schnittlinien der Fläche (1) mit der ersten, zweiten und dritten Hauptebene, die *Hauptschnitte* der Fläche sind[145]):

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - d^2} = 1, & z = 0; \\[2ex] \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - e^2} = 1, & y = 0; \\[2ex] \dfrac{y^2}{a^2 - d^2} + \dfrac{z^2}{a^2 - e^2} = 1, & x = 0. \end{cases}$$

Beim *Ellipsoid* sind alle drei Hauptschnitte *Ellipsen*. Der erste $ABA'B'$ (Fig. 131) ist mit der Fokalellipse $g = GHG'H'$ konfokal (§ 32, 1) und *schließt* sie *ein*; der zweite $ACA'C'$ ist mit der Fokalhyperbel f konfokal und *schneidet* sie (§ 32, (10)) in den vier Punkten:

$$(12) \qquad K: x^2 = \frac{a^2 d^2}{e^2},\ y = 0,\ z^2 = \frac{(a^2 - e^2)(e^2 - d^2)}{e^2}$$

oder in der Bezeichnung (6):

$$(12') \qquad x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2},\ y = 0,\ z^2 = c^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Dies sind also *die auf der Fläche selbst liegenden Brennpunkte.*

Der dritte Hauptschnitt $BCB'C'$ hat die Brennpunkte H, H' in (4').

Beim *einschaligen Hyperboloid* ist der erste Hauptschnitt $ABA'B'$ (Fig. 132) eine *Ellipse*, die beiden andern $ACA'C'$ und $BDB'D'$ *Hyperbeln;* der erste ist mit der Fokalellipse g konfokal und wird von ihr *umschlossen*; der zweite ist mit der Fokalhyperbel f konfokal und wird durch sie vom Mittelpunkt O getrennt.

Beim *zweischaligen Hyperboloid* sind die beiden ersten Hauptschnitte $ABA'B'$ und $ACA'C'$ (Fig. 133) *Hyperbeln*, während die dritte Hauptebene die Fläche nicht schneidet, sondern in *zwei Schalen* trennt; der erste Hauptschnitt ist mit der Fokalellipse g konfokal und *schneidet* sie in den vier *auf der Fläche selbst liegenden Brennpunkten:*

$$(13) \qquad x^2 = \frac{a^2 e^2}{d^2},\ y^2 = \frac{(d^2 - a^2)(e^2 - d^2)}{d^2},\ z = 0$$

oder in der Bezeichnung (6''):

$$(13') \qquad x^2 = a^2 \frac{a^2 + c^2}{a^2 + b^2},\ y^2 = b^2 \frac{c^2 - b^2}{a^2 + b^2},\ z = 0;$$

der zweite Hauptschnitt ist mit der Fokalhyperbel konfokal und *trennt* sie von O.[146])

8. **Erzeugung der Flächen durch elliptische Schnitte.** Eine der xy-Ebene parallele Ebene $z = \pm z_0$ schneidet das Ellipsoid (7) oder einschalige Hyperboloid (7') in der Ellipse:

$$(14) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - z_0^2}{c^2} \quad \text{oder} \quad (14') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + z_0^2}{c^2}$$

mit den Halbachsen:

$$(15) \ \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z_0^2},\ \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z_0^2} \quad (15') \ \frac{a}{c}\sqrt{c^2 + z_0^2},\ \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + z_0^2} \ (a > b).$$

Mit veränderlichem z_0 bleiben die Ellipsen (14) oder (14') ähnlich (§ 14, **10**), da die Halbachsen das von z_0 unabhängige Verhältnis $a : b$ haben.

Beim Ellipsoid ist die Ellipse (14) für $z_0 = 0$ am größten und zieht sich, während z_0^2 von 0 bis c^2 wächst, beständig kleiner werdend, auf einen Punkt C oder C' zusammen, während sie für $z_0^2 > c^2$ nicht mehr reell ist. Daher *ist das Ellipsoid eine geschlossene Fläche, die ganz im Endlichen liegt* (Fig. 131).

Beim einschaligen Hyperboloid ist die Ellipse (14′) für $z_0 = 0$ am kleinsten (Kehlellipse) und dehnt sich, während z_0^2 von 0 bis ∞ wächst, immer weiter aus. Daher *erstreckt sich das einschalige Hyperboloid selbst nach oben und unten unbegrenzt weit* (in Fig. 132 ist es oben und unten durch einen der elliptischen Schnitte (14′), $CDC'D'$, abgeschnitten dargestellt). Der in die y-Achse fallende Durchmesser $BB' = 2b$ ist der kleinste.

Das zweischalige Hyperboloid (7″) wird von einer der yz-Ebene parallelen Ebene $x = \pm x_0$ in der Ellipse:

$$(14'') \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x_0^2 - a^2}{a^2}$$

mit den Halbachsen:

$$(15'') \qquad \frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}, \quad \frac{c}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2} \qquad (b < c)$$

von konstantem Verhältnis geschnitten. Die Ellipse beginnt für $x_0^2 = a^2$ als Punkt A oder A' und dehnt sich, während x_0^2 von a^2 bis ∞ wächst, beständig aus. Daher *erstreckt sich das zweischalige Hyperboloid selbst nach rechts und links unbegrenzt weit* (in Fig. 133 ist es rechts und links durch einen der elliptischen Schnitte (14″), BC und $B'C'$, abgeschnitten).

9. Unendlich ferne Kurven und Asymptotenkegel. In homogenen Koordinaten lauten die Gleichungen (1) und (7), (7′), (7″):

$$(16) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} - t^2 = 0,$$

$$(17) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - t^2 = 0 \qquad (17') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - t^2 = 0$$

$$(17'') \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - t^2 = 0.$$

Die Schnittlinien der Fläche mit der unendlich fernen Ebene $t = 0$ sind daher in laufenden Koordinaten x, y, z in dieser (I § 49, 2)[9]:

$$(18) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - d^2} + \frac{z^2}{a^2 - e^2} = 0$$

$$(19) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (19') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

$$(19'') \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

In laufenden Koordinaten x, y, z im Raume stellen diese Gleichungen *die vom Mittelpunkt O aus über der unendlich fernen Kurve der Flächen errichteten Kegel* (§ 54, (1)), die *Asymptotenkegel* der Flächen dar (§ 1, (18)).

Der Asymptotenkegel des *Ellipsoids* ist *nicht reell*, der des einschaligen Hyperboloids hat die z-Achse, der des zweischaligen Hyperboloids die x-Achse als innere Achse (§ 54, 4). Jener schneidet die Ebene $z = \pm z_0$ in einer Ellipse mit den Halbachsen $\frac{a}{c} z_0$, $\frac{b}{c} z_0$, die daher von der ähnlichen Ellipse (14') umschlossen wird, so daß *der Asymptotenkegel von dem einschaligen Hyperboloid umschlossen wird.* Dieser schneidet die Ebene $x = \pm x_0$ in einer Ellipse mit den Halbachsen $\frac{b x_0}{a}$, $\frac{c x_0}{a}$, die daher die ähnliche Ellipse (14'') einschließt, so daß *der Asymptotenkegel die beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloids einschließt.*[10])

Die Brennlinien § 54, (11) *des Asymptotenkegels* (18) *des ein- oder zweischaligen Hyperboloids sind die Asymptoten der Fokalhyperbel* (9).

10. Begriff konfokaler Ellipsoide und Hyperboloide. Zwei *Mittelpunktsflächen* sind *konfokal und konfokal liegend*, wenn ihre Fokalellipsen und Fokalhyperbeln (9) bezüglich zusammenfallen. Sie sind *konfokal*, wenn sie gleiche Hauptbrennweiten $F'F$ und $G'G$ in (4) besitzen, und können dann auch in konfokale Lage gebracht werden.

Irgend zwei Mittelpunktsflächen, die durch die Gleichung (1) mit zwei verschiedenen Werten a_1 und a_2 von a dargestellt werden, also:

$$(20) \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - d^2} + \frac{z^2}{a_1^2 - e^2} = 1, \\ \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{a_2^2 - d^2} + \frac{z^2}{a_2^2 - e^2} = 1 \end{cases}$$

sind konfokal und konfokal liegend (vgl. (9)). Ihre gleichnamigen Hauptschnitte (11) sind auch je konfokal (§ 32, 1).

Zwei gleich- oder ungleichnamige Mittelpunktsflächen:

$$(21) \qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1,$$

wo b_1^2, c_1^2, b_2^2, c_2^2 wie in (7'); (7'') auch negativ sein können, aber wie in (6), (6'), (6'') algebraisch:

$$(22) \qquad a_1^2 > b_1^2 > c_1^2, \quad a_2^2 > b_2^2 > c_2^2$$

sein soll, sind *konfokal und konfokal liegend* (vgl. (10)), wenn:

$$(23) \qquad a_1^2 - c_1^2 = a_2^2 - c_2^2, \quad b_1^2 - c_1^2 = b_2^2 - c_2^2$$

oder (§ 36, (3)):

$$(24) \qquad a_1^2 - a_2^2 = b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2,$$

also *die Differenzen der gleichnamigen Halbachsenquadrate gleich sind.*[98])

§ 56. Gestalt und Bestandteile der Paraboloide.

1. Unterscheidung der drei Arten. Die Gleichung:

$$(1)\qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} + 2x - p = 0,$$

mit gegebenem positiven e, die für $e = 0$ in § 53, (5) übergeht, umfaßt drei Arten von Flächen, je nachdem:

$$(2)\qquad \infty > p > e \quad \text{oder} \quad e > p > 0 \quad \text{oder} \quad 0 > p > -\infty.$$

Wir bezeichnen die drei Arten mit Rücksicht auf ihre im Folgenden zu beschreibende *Gestalt* und *Lage* bezüglich als *linkes elliptisches, hyperbolisches* und *rechtes elliptisches Paraboloid.*[1])

2. Hauptebenen und Hauptachse. Die Gleichung (1) enthält von y und z nur die Quadrate. Genügt ihr daher ein Punkt x, y, z, so genügen ihr alle vier Punkte $x, \pm y, \pm z$. Die Fläche ist somit gegen die xy- und xz-Ebene symmetrisch; sie geht durch Spiegelung an einer dieser Ebenen in sich über. Die Ebenen heißen daher die beiden *Hauptebenen* der Fläche, bezüglich die *erste* und *zweite Hauptebene.*

Die ihnen gemeinsame x-Achse heißt die *Hauptachse* des Paraboloids.[5])

3. Hauptbrennpunkte. Die auf der Hauptachse liegenden Punkte:

$$(3)\qquad O = F: x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0;\quad G: x = \frac{e}{2},\quad y = 0,\quad z = 0$$

sollen bezüglich der *linke* und *rechte Hauptbrennpunkt* des Paraboloids genannt werden.[2])

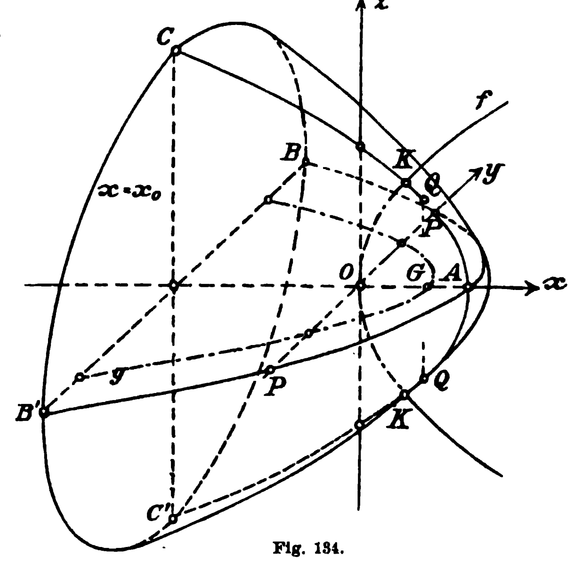


Fig. 134.

4. Scheitelpunkt. Der Schnittpunkt der Fläche mit der Hauptachse:

$$(4)\qquad A: x = \frac{p}{2},\quad y = 0,\quad z = 0$$

heißt ihr *Scheitelpunkt.*

Der Scheitelpunkt A liegt mit Rücksicht auf (2) bei dem *linken elliptischen Paraboloid rechts von den beiden* Hauptbrennpunkten O und G (Fig. 134); bei dem *hyperbolischen Paraboloid zwischen beiden*

(Fig. 135); bei dem *rechten elliptischen Paraboloid links von beiden* (Fig. 136) (§ 55, 4).

5. Die Parameter. Die durch den Brennpunkt O gehende y-Achse schneidet die Fläche (1) in den Punkten:

$$P: x = 0, \quad y = \pm p, \quad z = 0 \tag{5}$$

und die durch den Brennpunkt G parallel zur z-Achse gezogene Gerade in den Punkten:

$$Q: x = \frac{e}{2}, \quad y = 0, \quad z = \pm (p - e). \tag{6}$$

Die absoluten Werte von p und $p - e$ heißen *der erste und zweite Parameter*[15]) des Paraboloids (1) (§ 3, 1).

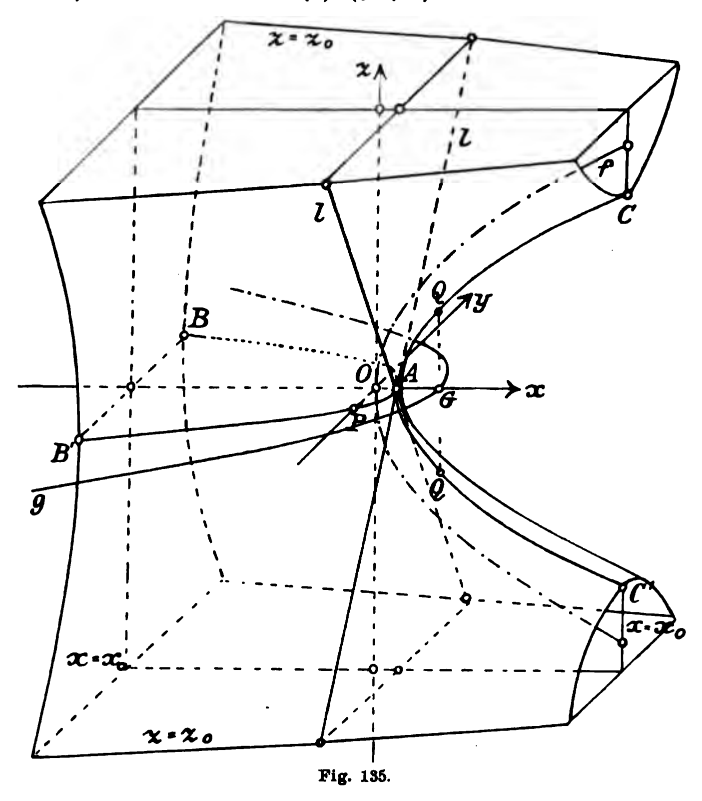


Fig. 135.

6. Brenn- oder Fokalparabeln. Die in der ersten und zweiten Hauptebene liegenden Parabeln:

$$y^2 + 2ex - e^2 = 0, \ z = 0; \quad z^2 - 2ex = 0, \ y = 0, \tag{7}$$

die nur die Größe e, nicht aber p enthalten, nennen wir die *linke* g und *rechte Fokalparabel* f.[144])

Jene ist nach links, diese nach rechts geöffnet (§ 2, 4, 6). Jene hat O als Brennpunkt und G als Scheitelpunkt, diese G als Brennpunkt und O als Scheitelpunkt. *Der Scheitelpunkt der einen ist der Brennpunkt der andern.* Der gemeinsame Parameter beider Parabeln ist e. Sie sind daher *kongruent.*

7. Die Hauptschnitte. Die Schnittlinien der Fläche (1) mit den beiden Hauptebenen, die *Hauptschnitte* der Fläche, haben die Gleichungen[145]):

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{y^2}{p} + 2x - p = 0, \quad z = 0, \\ \frac{z^2}{p - e} + 2x - p = 0, \quad y = 0, \end{cases}$$

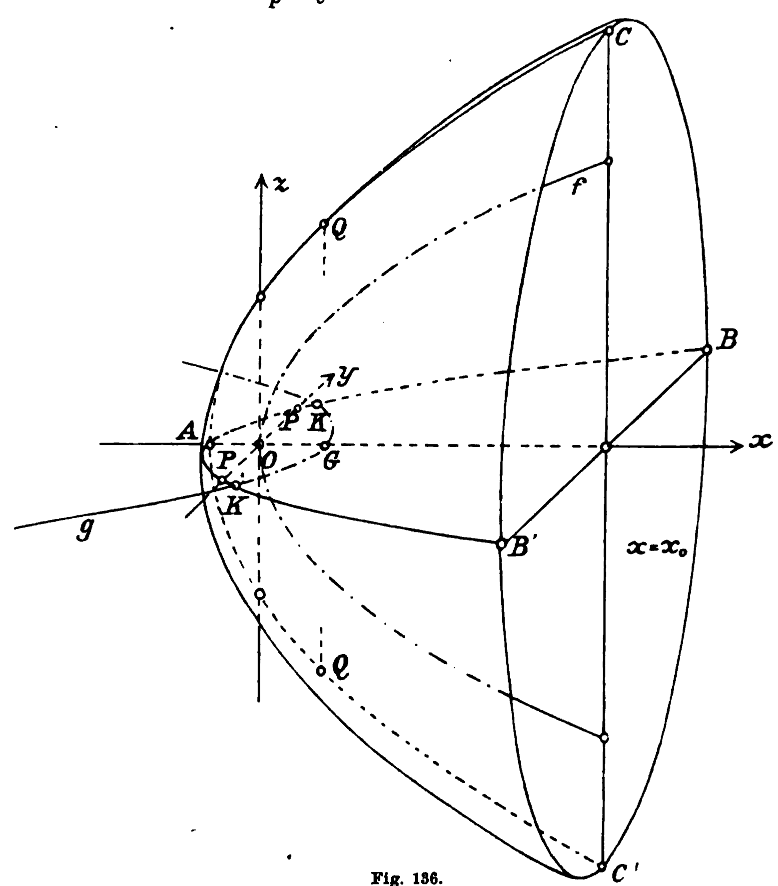


Fig. 136.

Sie sind beide Parabeln, deren Scheitelpunkte in den Scheitelpunkt der Fläche fallen, und deren Brennpunkte bezüglich der linke und

rechte Hauptbrennpunkt (3) der Fläche ist (§ 2, (19)). *Die Hauptschnitte* (8) *sind also mit den Fokalparabeln* (7) *bezüglich konfokal.*

Beim *linken elliptischen Paraboloid* (Fig. 134) sind nach (2) beide Hauptschnitte (8) *linke* Parabeln; der erste, weiter geöffnete ($OP > GQ$), umschließt die linke Fokalparabel; der zweite schneidet die rechte Fokalparabel in den beiden *auf der Fläche selbst liegenden Brennpunkten:*

$$K: x = \frac{p-e}{2}, \quad y = 0, \quad z^2 = e(p-e). \tag{9}$$

Beim *hyperbolischen Paraboloid* (Fig. 135) ist der erste Hauptschnitt (8) eine linke, der zweite eine rechte Parabel; beide werden von den bezüglichen Fokalparabeln eingeschlossen.

Beim *rechten elliptischen Paraboloid* (Fig. 136) sind beide Hauptschnitte (8) rechte Parabeln; der erste schneidet die linke Fokalparabel in den beiden *auf der Fläche liegenden Brennpunkten:*

$$K: x = \frac{p+e}{2}, \quad y^2 = -ep, \quad z = 0, \tag{10}$$

der zweite, weiter geöffnete ($GQ > OP$), umschließt die rechte Fokalparabel.[146])

8. Erzeugung der Flächen durch elliptische und hyperbolische Schnitte. Eine der yz-Ebene parallele Ebene $x = x_0$ schneidet die Fläche (1) in dem Kegelschnitt:

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p-e} = p - 2x_0. \tag{11}$$

Für das *linke elliptische Paraboloid* ist dieser nach (2) eine *Ellipse* $BCB'C'$ (Fig. 134) mit den Halbachsenquadraten:

$$p(p-2x_0), \quad (p-e)(p-2x_0), \tag{12}$$

solange $x_0 < \frac{p}{2}$. Die größere Halbachse BB', die erste in (12), hat die Richtung der y-Achse. Bei veränderlichem x_0 bleibt sich die Ellipse (11) *ähnlich* (§ 14, **10**). Während x_0 von $-\infty$ gegen $\frac{p}{2}$ abnimmt, zieht sie sich mehr und mehr zusammen, bis sie sich für $x_0 = \frac{p}{2}$ auf den Scheitelpunkt (4) reduziert. *Das ganze Paraboloid liegt links von der Ebene* $x = \frac{p}{2}$, *der „Scheiteltangentialebene"*, und erstreckt sich nach links unbegrenzt weit (in Fig. 134 ist es links durch den elliptischen Schnitt $x = x_0$ abgeschnitten).

Für das *hyperbolische Paraboloid* (Fig. 135) ist der Kegelschnitt (11) eine *Hyperbel,* die bei veränderlichem x_0 immer parallele Asymptoten:

(13) $$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{e-p} = 0$$

behält. *Die durch den Scheitel gehende Ebene* $x = \frac{p}{2}$, *die „Scheiteltangentialebene"*, *schneidet die Fläche in diesem Linienpaar* (13), den *„Scheitelerzeugenden"*, (ll in Fig. 135).[7])

Für $x_0 < \frac{p}{2}$ ist von den Halbachsenquadraten (12) das erste positiv und das zweite negativ, für $x_0 > \frac{p}{2}$ umgekehrt. Je nachdem daher die schneidende Ebene $x = x_0$ links oder rechts von der Ebene $x = \frac{p}{2}$ liegt, hat die reelle Achse der Hyperbel (11) die Richtung der y-Achse (BB' in Fig. 135) oder der z-Achse (CC' in Fig. 135). Das Paraboloid erstreckt sich unbegrenzt weit (in Fig. 135 ist es links und rechts durch zwei hyperbolische Schnitte $x = x_0$, unten und oben durch zwei parabolische Schnitte $z = z_0$ abgeschnitten).

Für das *rechte elliptische Paraboloid* (Fig. 136) ist der Kegelschnitt (11) eine *Ellipse* $BCB'C'$ mit den Halbachsenquadraten (12), solange $x_0 > \frac{p}{2}$. Die *größere* Halbachse CC', die zweite in (12), hat die Richtung der *z-Achse.* Während x_0 von $+\infty$ gegen $\frac{p}{2}$ abnimmt, zieht sich die Ellipse mehr und mehr zusammen, bis sie sich für $x_0 = \frac{p}{2}$ auf den Scheitelpunkt (4) reduziert. *Das ganze Paraboloid liegt rechts von der Ebene* $x = \frac{p}{2}$, *der „Scheiteltangentialebene"*, und erstreckt sich nach rechts unbegrenzt weit.

9. Scheitelgleichung des elliptischen und hyperbolischen Paraboloids. Das linke und rechte elliptische Paraboloid sind nur der Lage nach verschieden, ebenso wie die beiden elliptischen Kegel in § 54, **3**. *Sie schließen beide in der Hauptebene der größeren Öffnung* ($p > p - e$ für das linke und $e - p > -p$ für das rechte) *die eine Fokalparabel ein und werden von der anderen, in der Hauptebene der kleineren Öffnung liegenden durchschnitten.*

Indem wir daher das rechte fallen lassen, setzen wir für das linke:

(14) $$p = b^2, \quad p - e = c^2$$

und für das hyperbolische nach (2):

(15) $$p = b^2, \quad p - e = -c^2$$

und verschieben außerdem den Koordinatenanfangspunkt O, indem wir x durch $x + \frac{p}{2}$ ersetzen (I § 37, (1)) nach dem Scheitelpunkt A.

Dann werden die Gleichungen des (linken) elliptischen und hyperbolischen Paraboloids[8]):

$$(16)\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2x=0,\qquad (16')\quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+2x=0.$$

Die beiden *Hauptbrennpunkte* (3) sind in der neuen Bezeichnung für die beiden Flächen:

$$(17)\begin{cases}F: x=-\frac{b^2}{2},\ y=0,\ z=0;\\ G: x=\frac{-c^2}{2},\ y=0,\ z=0\end{cases}\qquad (17')\begin{cases}F: x=-\frac{b^2}{2},\ y=0,\ z=0;\\ G: x=\frac{c^2}{2},\ y=0,\ z=0,\end{cases}$$

und die beiden *Fokalparabeln* werden nach (7) bezüglich:

$$(18)\begin{cases}\frac{y^2}{b^2-c^2}+2x+c^2=0,\\ \frac{z^2}{b^2-c^2}-2x-b^2=0\end{cases}\qquad (18')\begin{cases}\frac{y^2}{b^2+c^2}+2x-c^2=0,\\ \frac{z^2}{b^2+c^2}-2x-b^2=0\end{cases}$$

und die auf dem elliptischen Paraboloid selbst liegenden Brennpunkte K nach (9):

$$(19)\qquad x=-\frac{b^2-c^2}{2},\quad y=0,\ z^2=(b^2-c^2)c^2.$$

10. Begriff konfokaler Paraboloide. Zwei Paraboloide sind *konfokal und konfokal liegend*, wenn ihre Fokalparabeln (7) bezüglich zusammenfallen. Sie sind *konfokal*, wenn die Entfernung FG ihrer Hauptbrennpunkte (3) dieselbe ist.

Je zwei Paraboloide, die durch die Gleichung (1) mit zwei verschiedenen Werten p_1 und p_2 von p dargestellt werden, also:

$$(20)\qquad \frac{y^2}{p_1}+\frac{z^2}{p_1-e}+2x-p_1=0,$$

$$(21)\qquad \frac{y^2}{p_2}+\frac{z^2}{p_2-e}+2x-p_2=0$$

sind konfokal und konfokal liegend (vgl. (7)).[98])

11. Doppelte konfokale Lage konfokaler Paraboloide. Zum Übergang von dem System $Oxyz$ zu einem neuen $O'x'y'z'$, dessen Anfangspunkt $O'=G=\frac{e}{2}, 0, 0$ ist und dessen Achsen x', y', z' die Richtungskosinus $-1, 0, 0$; $0, 0, 1$; $0, 1, 0$ haben, also beziehungsweise mit $-x, z, y$ gleichgerichtet sind (Fig. 134), dienen die Formeln (I § 37, (13)):

$$(22)\qquad x=\frac{e}{2}-x',\quad y=z',\quad z=y'.$$

Die Gleichungen der Fokalparabeln (7) und der Fläche (20) werden in dem neuen System:

(23) $z'^2 - 2ex' = 0,\ y' = 0;\ y'^2 + 2ex' - e^2 = 0,\ z' = 0,$

(24) $$\frac{y'^2}{e-p_1} + \frac{z'^2}{-p_1} + 2x' - (e-p_1) = 0.$$

Denkt man sich diese drei Gebilde mit dem System $O'x'y'z'$ starr verbunden und bringt dieses durch Umdrehung mit $Oxyz$ zur Deckung, so kommen die beiden Fokalparabeln (23) und (7) miteinander vertauscht zur Deckung, während das Paraboloid (24) oder (20) mit demjenigen konfokalen Paraboloid (21) zur Deckung kommt, für das $p_2 = e - p_1$ ist.

Jedes Paraboloid kann also zu sich selbst in konfokale, nicht kongruente Lage gebracht werden.

Daraus folgt sofort weiter:

Zwei konfokale Paraboloide können auf zwei Weisen in konfokale Lage gebracht werden.

12. Konfokale Paraboloide in Scheitelgleichung. Setzt man in den Gleichungen (20) und (21):

(25) $$p_1 = b_1^2,\ p_1 - e = c_1^2;\quad p_2 = b_2^2,\ p_2 - e = c_2^2$$

und schiebt den Scheitel (4) beider Paraboloide mit $x + \frac{p_1}{2}$ und $x + \frac{p_2}{2}$ für x nach dem Anfangspunkt O, so erhält man:

(26) $$\frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} + 2x = 0,\quad \frac{y^2}{b_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} + 2x = 0,$$

wo b_1^2, c_1^2, b_2^2, c_2^2 positiv oder negativ sein können und nur:

(27) $$b_1^2 - b_2^2 = c_1^2 - c_2^2$$

sein muß (§ 55, (24)).

Unter der Bedingung (27) *sind die beiden Paraboloide* (26) *konfokal,* aber nicht mehr konfokal gelegen.

§ 57. Das Strahlengewinde oder der lineare Komplex.

1. Vorbereitende Angaben. Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe bei A den Winkel $\omega = CAB$, der zwischen den Grenzen:

(1) $$\frac{\pi}{2} > \omega > -\frac{\pi}{2}$$

liege (Fig. 137 für positives, Fig. 137′ für negatives ω im Sinne I § 11, 2). Die Höhe $CB = \frac{h}{4}$ soll übereinstimmend mit ω positiv (Fig. 137) oder negativ (Fig. 137′) gelten, während für die Grundlinie AC

Fig. 137.

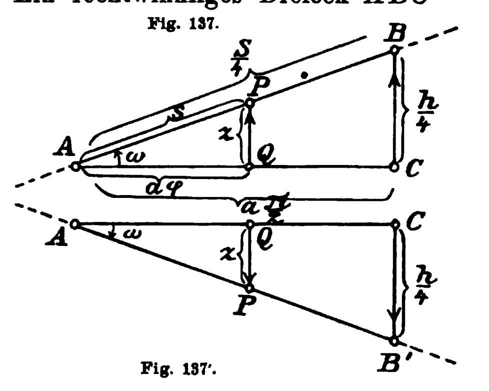


Fig. 137′.

$= a\frac{\pi}{2}$ und die Hypotenuse $AB = \frac{S}{4}$ die Größen a und S positiv gelten sollen. Es ist dann:

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\omega = \frac{2a\pi}{S}\ (>0), & \sin\omega = \frac{h}{S}\ (\gtrless 0), \\ S = \sqrt{(2a\pi)^2 + h^2}, & \operatorname{tg}\omega = \frac{h}{2a\pi}. \end{cases}$$

Ist ferner $QP = z$ die Höhe des laufenden Punktes P der Hypotenuse AB über der Grundlinie AC, aufwärts (Fig. 137) positiv, abwärts (Fig. 137′) negativ gerechnet, so ist, wenn $AQ = a\varphi$ und $AP = s$ gesetzt wird:

$$z : a\varphi = \frac{h}{4} : \frac{a\pi}{2},$$

$$a\varphi : s = \frac{a\pi}{2} : \frac{S}{4}$$

und damit:

$$(3)\qquad z = \frac{h\varphi}{2\pi},$$

$$(4)\qquad \varphi = \frac{2\pi s}{S}.$$

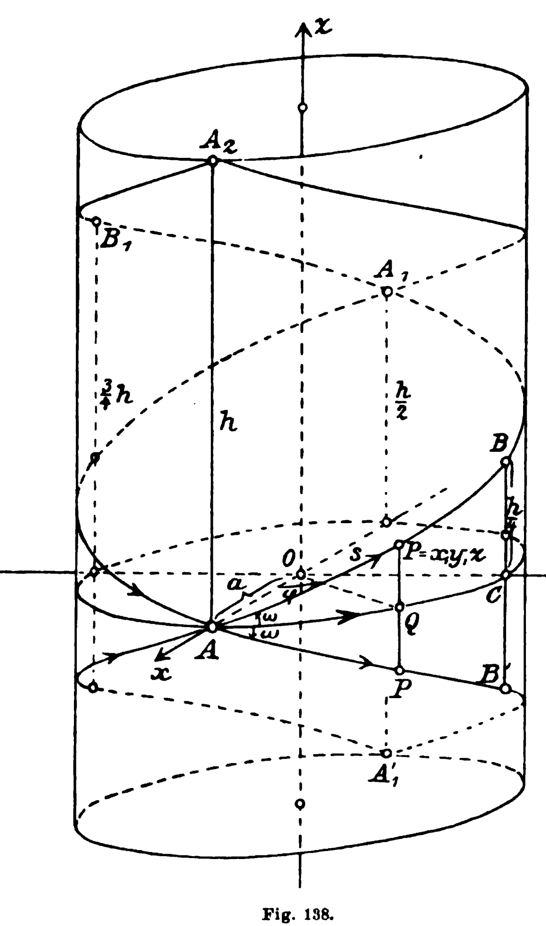


Fig. 138.

2. Entstehung der Schraubenlinie. Wickelt man jetzt die Ebene des Dreiecks auf den Rotationszylinder (§ 53, 9):

$$(5)\qquad x^2 + y^2 = a^2$$

auf, der um die z-Achse des Koordinatensystems $Oxyz$ mit dem Radius a beschrieben ist (Fig. 138), so paßt die Grundlinie AC (Fig. 137) auf den gleichbezeichneten Kreisquadranten AC in der xy-Ebene (Fig. 138) und das Stück AQ (Fig. 137) auf den zum Winkel $\varphi = OA, OQ$ gehörigen Bogen AQ (Fig. 138).

Die Hypotenuse AB (Fig. 137), die nunmehr *beiderseits unbegrenzt verlängert* gedacht werde, erscheint dann (Fig. 138) als *Schraubenlinie*. Man nennt die z-Achse die *Achse*, a den *Radius*, h die *Gang-*

höhe, ω den *Steigwinkel* der Schraubenlinie; S ist die *Bogenlänge* eines *Schraubenganges* $ABA_1B_1A_2$.[147])

3. Parameterdarstellung der Schraubenlinie. Für den laufenden Punkt $P = x, y, z$ der Schraubenlinie folgt, da Q in der Ebene Oxy die Polarkoordinaten a, φ hat (I § 12, 5) und die Formel (3) fortbesteht:

$$(6) \qquad x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \frac{h\varphi}{2\pi},$$

oder indem man mittels (4) die Bogenlänge s der Schraubenlinie einführt:

$$(7) \qquad x = a \cos \frac{2\pi s}{S}, \quad y = a \sin \frac{2\pi s}{S}, \quad z = \frac{hs}{S}.$$

Die Formeln (6) und (7) enthalten *zwei Parameterdarstellungen der Schraubenlinie* (I § 43, 1) mit den schließlich von $-\infty$ bis $+\infty$ laufenden Parametern φ und s.

4. Positiv und negativ gewundene Schraubenlinie. Aus Fig. 137 und Fig. 137′ entstehen zwei verschiedene Schraubenlinien ABA_1 und $AB'A_1'$ in Fig. 138. Jene, für die ω und h positiv sind, nennen wir *positiv*, diese, für die ω und h negativ sind, *negativ gewunden.* Die jeder von beiden in Fig. 138 beigesetzten Pfeilspitzen zeigen den Sinn an, in dem die Schraubenlinie bei *wachsendem* Parameter φ oder s entsteht. Ein in diesem Sinne die Schraubenlinie durchlaufender Punkt P umkreist, ebenso wie der Projektionspunkt Q in der xy-Ebene, die senkrecht stehende z-Achse *stets in positivem,* in Fig. 138 auf dem Kreisbogen AC angedeuteten *Drehungssinn* der xy-Ebene (I § 11, 1), während er gleichzeitig bei der *positiv* gewundenen Schraubenlinie *aufwärts steigt,* bei der *negativ* gewundenen sich *nach abwärts senkt.* Aber auch wenn der Punkt P im entgegengesetzten Sinn der Pfeile die Schraubenlinie durchliefe, würde seine fortschreitende Bewegung bei der positiv gewundenen Schraubenlinie nach derjenigen Seite gehen, von der aus die drehende Bewegung positiv erscheint; und umgekehrt bei der negativ gewundenen Schraubenlinie (I § 32, 7).

Mit dem Vorzeichen von h dreht sich in (6) und (7) das von z um. Daher ist die Schraubenlinie $AB'A_1'$ das *Spiegelbild* der Schraubenlinie ABA_1 *in bezug auf die xy-Ebene* (Fig. 138).

5. Transformation der Schraubenlinie in sich. Dreht man das Koordinatensystem $Oxyz$ um die z-Achse um den Winkel α und verschiebt es zugleich in der Richtung der z-Achse um die Strecke z_0

in die Lage $\Omega\xi\eta\zeta$ (Fig. 139), so gelten zwischen den Koordinaten desselben Punktes in bezug auf die beiden Systeme (I § 14, (10); I § 37, (1)) die Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ \eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ \zeta = z - z_0. \end{cases}$$

Setzt man hierin für x, y, z die Werte (6) ein, so erhält man in bezug auf das neue System $\Omega\xi\eta\zeta$ die Schraubenlinie durch die Gleichungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi = a\cos(\varphi-\alpha), \\ \eta = a\sin(\varphi-\alpha), \\ \zeta = \frac{h(\varphi-\alpha)}{2\pi} - \left(z_0 - \frac{h\alpha}{2\pi}\right) \end{cases}$$

dargestellt. Nimmt man daher:

$$(10)\qquad z_0 = \frac{h\alpha}{2\pi},$$

so unterscheiden sich die Gleichungen (9) rechts, abgesehen von der Bezeichnung des von $-\infty$ bis $+\infty$ gehenden Parameters mit $\varphi-\alpha$ statt mit φ, nicht von den Gleichungen (6). Die Schraubenlinie hat

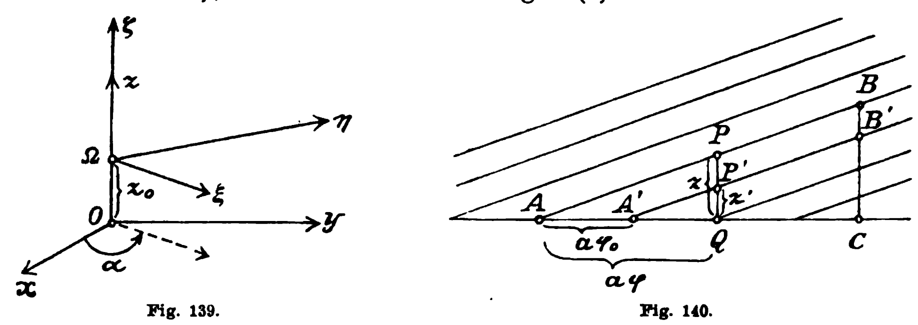


Fig. 139. Fig. 140.

daher gegen das neue System dieselbe Gestalt und Lage, wie gegen das alte, oder wie man auch sagt:

Die Schraubenlinie geht durch die Transformation (8), (10) *bei beliebigem* α *in sich über.*[91])

6. System kongruenter Schraubenlinien auf demselben Zylinder. Fügt man in der Ebene (Fig. 137) zu der Hypotenuse AB ein System von Parallellinien $A'B'$ hinzu (Fig. 140) und wickelt die Ebene wie vorhin auf den Zylinder ab, so entsteht (Fig. 141) ein System kongruenter Schraubenlinien vom Radius a und der Ganghöhe h.

Ist (Fig. 140) für eine Parallele $A'B'$ etwa $AA' = a\varphi_0$ und $QP' = z'$, so ist:

$$z' : z = a(\varphi - \varphi_0) : a\varphi; \quad z' = \frac{z(\varphi - \varphi_0)}{\varphi}$$

und nach (3):

$$z' = \frac{h(\varphi - \varphi_0)}{2\pi}.$$

Für den laufenden Punkt P' der entsprechenden Schraubenlinie $A'B'$ (Fig. 141) ist daher:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z' = \frac{h(\varphi - \varphi_0)}{2\pi}.$$

Die Parallelen $A'B'$ (Fig. 140), für die $AA' > a \cdot 2\pi$, also $\varphi_0 > 2\pi$, decken sich mit schon vorhandenen Schraubenlinien (Fig. 141). Mit Weglassung des Akzentes von z' folgt daher:

Das System der auf dem Zylinder (5) *aufgeschriebenen Schraubenlinien vom Radius a und der Ganghöhe h* (Fig. 141) *ist durch die Parameterdarstellung:*

$$(11) \qquad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h(\varphi - \varphi_0)}{2\pi}$$

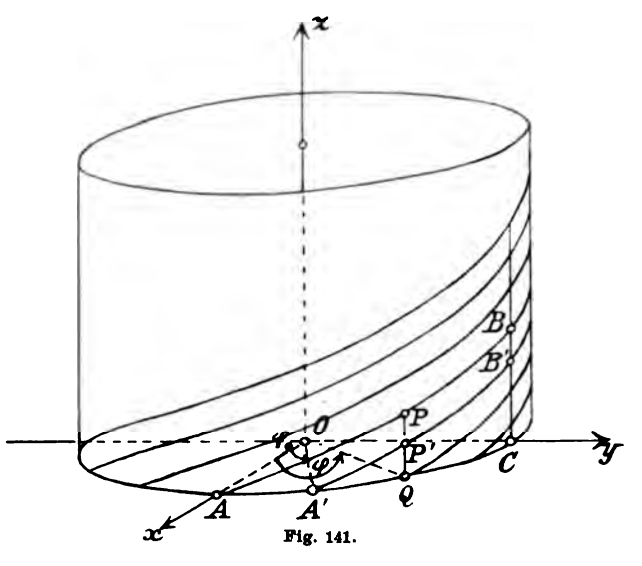


Fig. 141.

gegeben, und die einzelne Schraubenlinie des Systems durch den Wert φ_0 $(0 \leq \varphi_0 < 2\pi)$ *bestimmt.*

Durch jeden Punkt des Zylinders geht eine Schraubenlinie des Systems.

7. Transformation des Systems in sich. Setzt man die Werte (11) in die Substitution (8) ein, so ergibt sich:

$$(12) \qquad \begin{cases} \xi = a\cos(\varphi - \alpha), \quad \eta = a\sin(\varphi - \alpha), \\ \zeta = \frac{h}{2\pi}\left(\varphi - \alpha - \left(\varphi_0 - \alpha + \frac{2\pi}{h} z_0\right)\right). \end{cases}$$

Dies sind aber wieder die Gleichungen (11), nur daß $\varphi - \alpha$ für φ und $\varphi_0 - \alpha + \frac{2\pi}{h} z_0$ für φ_0 eingetreten ist, so daß das System als Ganzes dieselbe Gestalt und Lage gegen $\Omega\xi\eta\zeta$ (Fig. 139) wie gegen $Oxyz$ hat. Man kann dies, da α und z_0 ganz unabhängig voneinander sind, auch so ausdrücken (Fig. 141):

Das System der Schraubenlinien (11) *geht bei jeder Drehung um die z-Achse und bei jeder Verschiebung längs der z-Achse in sich über; es werden nur die einzelnen Linien des Systems untereinander vertauscht.*

8. Die Tangente der Schraubenlinie. Durch Differentiation der Formeln (11) nach φ folgt:

$$x' = -y, \quad y' = x, \quad z' = \frac{h}{2\pi}. \tag{13}$$

Daher hat *die Tangente des Punktes x, y, z irgendeiner der Schraubenlinien* (11) *in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichungen*[148]) (Fig. 142) (I § 43, (3)):

$$X - x : Y - y : Z - z = -y : x : \frac{h}{2\pi}. \tag{14}$$

Übertragen wir den dem wachsenden Parameter φ entsprechenden positiven Sinn der Schraubenlinie (Fig. 138; Fig. 142) auch auf die

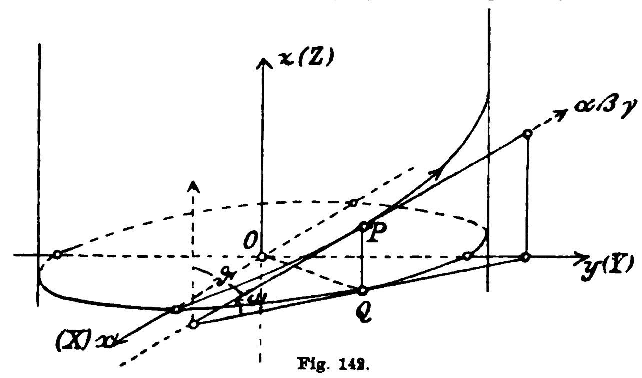


Fig. 142.

Tangente, so daß diese bei der positiv gewundenen Schraubenlinie ($h > 0$) steigt, bei der negativ gewundenen ($h < 0$) fällt, also dort mit der z-Achse einen spitzen, hier einen stumpfen Winkel ϑ (Fig. 142) bildet, so sind ihre Richtungskosinus mit Rücksicht auf (14); (2):

$$\alpha = -\frac{2\pi y}{S}, \quad \beta = \frac{2\pi x}{S}, \quad \gamma = \cos\vartheta = \frac{h}{S} = \sin\omega. \tag{15}$$

Der Neigungswinkel $\omega = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ (I § 32, 3; 4) *der Tangente gegen die xy-Ebene ist daher immer gleich dem Steigwinkel der Schraubenlinie.*

Das *Moment der Tangente gegen die z-Achse* ist bei der für sie festgesetzten Pfeilspitze (I § 44, (12)):

$$M = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & x - 0 \\ 0 & \beta & y - 0 \\ 1 & \gamma & z - 0 \end{vmatrix} = \alpha y - \beta x = -\frac{2\pi a^2}{S} = -a\cos\omega = -a\sin\vartheta, \tag{16}$$

also negativ; zugleich ist: $-a = M : \sin\vartheta$ (I § 44, (22)) der ebenfalls negative *kürzeste Abstand* der Tangente von der z-Achse; der Berührungspunkt der Tangente ist der Fußpunkt dieses kürzesten Abstandes.

9. Die Tangenten der ∞^1 Schraubenlinien (11) und der lineare Komplex. Die Strahlenkoordinaten der Tangente (14) sind (I § 48, (18)):

$$(17)\quad p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{14}:p_{24}:p_{34} = xz - \frac{hy}{2\pi} : yz + \frac{hx}{2\pi} : -a^2 : -y : x : \frac{h}{2\pi}.$$

Daher ist das Verhältnis $p_{12} : p_{34}$ von dem Berührungspunkt x, y, z unabhängig, oder:

$$(18)\quad p_{12} + \frac{2a^2\pi}{h} p_{34} = 0.$$

Sämtliche Tangenten jeder der ∞^1 Schraubenlinien (11) (Fig. 141) *gehören dem linearen Komplex*[149]*:*

$$(19)\quad p_{12} + k p_{34} = 0$$

an, desssen „Parameter“ k den Wert hat:

$$(20)\quad k = \frac{2a^2\pi}{h} = \frac{a}{\operatorname{tg}\omega}.$$

Der Parameter k des Komplexes hat das Vorzeichen von h; je nachdem k positiv oder negativ ist, heißt *der Komplex selbst positiv oder negativ gewunden.*

10. Die Tangenten von ∞^2 Schraubenlinien und der lineare Komplex. Da aber der Parameter k nur von dem Verhältnis $2a^2\pi : h$ abhängt, gehören die Tangenten der Schraubenlinien (11) auch dann noch dem Komplex (19) an, wenn man Radius a und Ganghöhe h derart verändert, daß dieses Verhältnis konstant bleibt.

Sämtliche Tangenten jeder der ∞^2 Schraubenlinien:

$$(21)\quad x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi, \quad z = \frac{h(\varphi - \varphi_0)}{2\pi},$$

für die bei festem k:

$$(22)\quad h = \frac{2a^2\pi}{k}$$

ist, während a und φ_0 zwischen den Grenzen:

$$0 \leqq a \leqq \infty, \quad 0 \leqq \varphi_0 < 2\pi$$

beliebig variieren, gehören dem Komplex (19) *an.*

Mit wachsendem Radius a des Zylinders (Fig. 141), wächst in (22) der absolute Wert der Ganghöhe h und nach (20) des Steigwinkels ω. Für $a = 0$ wird $h = 0$, der Zylinder zieht sich auf die z-Achse zusammen, und die Tangenten werden deren horizontale Transversalen.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Schraubenlinie des Systems (21), (22).

Wir zeigen nunmehr unter **11, 12,** daß der Komplex (19) auch keine andern Strahlen als die Tangenten der ∞^2 Schraubenlinien (21), (22) enthält.

11. Beliebige Gerade als Tangente einer Schraubenlinie. Irgendeine Gerade:

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma \tag{23}$$

des Raumes (Fig. 143) sei dadurch gerichtet, daß ihr Moment gegen die z-Achse negativ ist (I § 44, 4). In diesem Sinne seien:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma = \cos\vartheta\ (0 < \vartheta < \pi)$$

ihre Richtungskosinus. Ihr Neigungswinkel $\omega = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ gegen die xy-Ebene (I § 32, 3) ist dann durch:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \frac{\pi}{2} > \omega > -\frac{\pi}{2} \tag{24}$$

vollkommen bestimmt. Ihr nach der Voraussetzung negatives Moment gegen die z-Achse ist (I § 44, (12)):

$$M = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & x_0 - 0 \\ 0 & \beta & y_0 - 0 \\ 1 & \gamma & z_0 - 0 \end{vmatrix} = \alpha y_0 - \beta x_0 \tag{25}$$

und daher ihr ebenfalls negativer Abstand $-a$ von der z-Achse (I § 44, (22)):

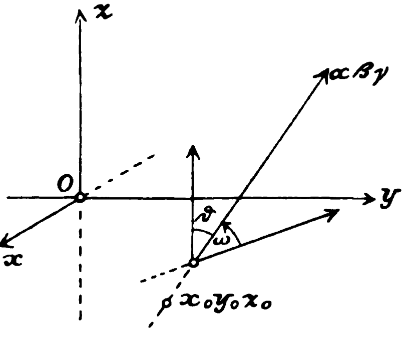


Fig. 143.

$$-a = \frac{M}{\sin\vartheta} = \frac{\alpha y_0 - \beta x_0}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{26}$$

Die beliebig gegebene Gerade ist daher mit Rücksicht auf 8. *Tangente einer Schraubenlinie*, die auf einen Zylinder um die z-Achse von dem durch (26) bestimmten Radius a aufgeschrieben ist, den durch (24) bestimmten Steigwinkel besitzt und durch den **Fußpunkt** des kürzesten Abstandes der Geraden von der z-Achse geht; dieser Fußpunkt ist der Berührungspunkt der Tangente.

Die Schraubenlinie ist positiv oder negativ gewunden, je nachdem $\operatorname{tg}\omega$ in (24) positiv oder negativ ist.

Schneidet die Gerade die z-Achse ($M = 0$), so hat der Zylinder den Radius 0 und reduziert sich, wie die Schraubenlinie selbst, auf die z-Achse.

Ist die Gerade horizontal ($\operatorname{tg} \omega = 0$) oder vertikal ($\operatorname{tg} \omega = \infty$), so reduziert sich die Schraubenlinie auf einen Kreis vom Radius a oder bezüglich auf die Gerade selbst.

12. Identität für eine beliebige Gerade. Das Verhältnis der beiden für eine beliebige Gerade in (24) und (26) bestimmten Größen $-a$ und $\operatorname{tg} \omega$:

$$-\frac{a}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{\alpha y_0 - \beta x_0}{\gamma} \tag{27}$$

ist von der Pfeilspitze der Geraden schließlich unabhängig, da es nur von den Verhältnissen $\alpha : \beta : \gamma$ abhängt. Es kann daher auch durch die Strahlenkoordinaten der Geraden (23) ausgedrückt werden (I § 48, (18)):

$$-\frac{a}{\operatorname{tg} \omega} = \frac{p_{12}}{p_{34}}. \tag{28}$$

Ist daher k eine beliebige Konstante, so folgt:

Für jede Gerade p_{kl} im Raume besteht die identische Gleichung:

$$\frac{p_{12}}{p_{34}} + k = -\frac{a}{\operatorname{tg} \omega} + k, \tag{29}$$

wo a den Radius und ω den Steigwinkel der um die z-Achse beschriebenen Schraubenlinie bedeutet, die die Gerade berührt.

Bei positivem ω ist die Schraubenlinie positiv, bei negativem negativ gewunden (Fig. 138).

13. Der lineare Komplex. Die Bedingung:

$$p_{12} + k p_{34} = 0 \tag{30}$$

ist daher immer dann und nur dann erfüllt, wenn für die Gerade p_{kl} die Bedingung (20) erfüllt ist.

Der lineare Komplex (30) *besteht daher aus den ∞^3 Geraden, die Tangenten der ∞^2 Schraubenlinien* (21), (22) *sind.*

Der Komplex ist gleichzeitig mit diesen Schraubenlinien entweder positiv oder negativ gewunden, je nachdem k positiv oder negativ ist.

Der Parameter k des Komplexes bedeutet nach (20) das Verhältnis der doppelten Fläche der Kreisschnitte der Zylinder a zur Steighöhe der Schraubenlinien oder auch das Verhältnis des Radius zur Tangente des Steigwinkels der Schraubenlinien.

Nach 7. geht der Komplex (30) *bei jeder Drehung um die z-Achse und jeder Verschiebung längs der z-Achse in sich über.*

II. Kapitel.
Die Kreisschnitte und die Kartonmodelle.

§ 58. Kreisschnitte des Ellipsoids.

1. Einführung von drei gleichlangen Durchmessern als Koordinatenachsen. Das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2 > c^2, \tag{1}$$

schneidet die zx-Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$ in der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Die Länge r eines Halbmessers dieser Ellipse, der in bezug auf das Achsensystem Oxz die Richtungskosinus α, γ hat, ist durch die Gleichung (§ 5, (2)):

$$\frac{r^2\alpha^2}{a^2} + \frac{r^2\gamma^2}{c^2} = 1$$

bestimmt. Umgekehrt findet man die Richtungskosinus α, γ *eines Halbmessers von gegebener Länge* $r = b$ aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1, \tag{3}$$

und zwar:

$$\alpha = \frac{a}{b}\frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad \gamma = \frac{c}{b}\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \tag{4}$$

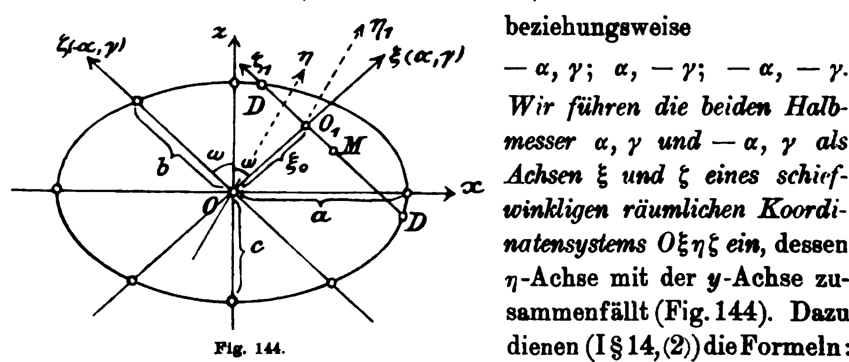


Fig. 144.

beziehungsweise

$-\alpha, \gamma;\ \alpha, -\gamma;\ -\alpha, -\gamma.$ *Wir führen die beiden Halbmesser α, γ und $-\alpha, \gamma$ als Achsen ξ und ζ eines schiefwinkligen räumlichen Koordinatensystems $O\xi\eta\zeta$ ein,* dessen η-Achse mit der y-Achse zusammenfällt (Fig. 144). Dazu dienen (I § 14, (2)) die Formeln:

$$(5)\quad \begin{cases} x = \alpha(\xi - \zeta), \\ y = \eta, \\ z = \gamma(\xi + \zeta); \end{cases} \qquad (5')\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right), \\ \eta = y, \\ \zeta = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right). \end{cases}$$

Die Achsen ξ und η, sowie ζ und η sind zueinander *rechtwinklig*, dagegen bilden $\xi = \alpha, \gamma$ und $\zeta = -\alpha, \gamma$ miteinander einen Winkel 2ω, der von der z-Achse halbiert wird, und für den:

$$\sin\omega = \alpha, \quad \cos\omega = \gamma. \tag{6}$$

2. Die Identität der Kreisschnitte. Wird zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{p}{b^2}, \tag{7}$$

so folgt durch Addition und Subtraktion aus (3), (7) und (4):

$$1 + p = 2\frac{b^2}{a^2}\alpha^2 = 2\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}, \quad 1 - p = 2\frac{b^2}{c^2}\gamma^2 = 2\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \tag{8}$$

und danach:

$$1 - p^2 = 4\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)^2}, \quad p = \frac{-a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2 - c^2}. \tag{9}$$

Zugleich ergibt sich aus (8):

$$-1 < p < +1. \tag{10}$$

Durch die Substitution (5) wird nun mit Rücksicht auf (3) und (7):

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= \frac{\alpha^2(\xi - \zeta)^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2(\xi + \zeta)^2}{c^2}\\ &= \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)(\xi^2 + \zeta^2) + \frac{\eta^2}{b^2} - 2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\xi\zeta\\ &= \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2p\xi\zeta}{b^2}.\end{aligned}$$

Vermöge der Substitution (5) *besteht daher die identische Gleichung:*

$$b^2\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right\} = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2p\xi\zeta - b^2, \tag{11}$$

wo p den Wert (9) *hat.*

3. Zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Gleichung der Fläche (1) in dem neuen Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ lautet nach (11):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2p\xi\zeta - b^2 = 0. \tag{12}$$

Für die Schnittkurve der Fläche mit einer beliebigen, der $\zeta\eta$- oder $\xi\eta$-Ebene parallelen Ebene:

(13) $\xi = \xi_0$ oder (13') $\zeta = \zeta_0$

wird daher bezüglich:

$$\eta^2 + \zeta^2 - 2p\xi_0\zeta + \xi_0^2 - b^2 = 0; \quad \xi^2 + \eta^2 - 2p\zeta_0\xi + \zeta_0^2 - b^2 = 0$$

oder:

$$\eta^2 + (\zeta - p\xi_0)^2 = b^2 - (1 - p^2)\xi_0^2; \tag{14}$$

$$(\xi - p\zeta_0)^2 + \eta^2 = b^2 - (1 - p^2)\zeta_0^2. \tag{14'}$$

Verschiebt man das System $O\xi\eta\zeta$ parallel mit sich in die Lage $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$, wo O_1 die Koordinaten $\xi = \xi_0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ hat und $O_1\xi_1$ in $O\xi$ fällt (Fig. 145), so ist für jeden beliebigen Punkt des *Raumes* (I § 37, (1)):

$$\xi = \xi_0 + \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1.$$

Für einen Punkt P der *Ebene* $\xi = \xi_0$ oder $\xi_1 = 0$ sind daher η, ζ zugleich die Koordinaten η_1, ζ_1 in dem (rechtwinkligen) *ebenen System* $O_1\eta_1\zeta_1$ (I § 31, 4, 8). *Daher kann die Gleichung* (14) *unmittelbar auf dieses bezogen werden.*

Die Schnittkurve (14) und ebenso (14′) ist daher ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt:

(15) $\xi = \xi_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = p\xi_0$ (15′) $\xi = p\zeta_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0$

und dem Radius ϱ, für den:

(16) $\varrho^2 = b^2 - (1 - p^2)\xi_0^2$ (16′) $\varrho^2 = b^2 - (1 - p^2)\zeta_0^2$.

Das Ellipsoid (12) *wird von jeder der* $\eta\zeta$- *oder* $\xi\eta$-*Ebene parallelen Ebene* (13) *oder* (13′) *in einem Kreise geschnitten.*

Bei wechselnden Werten von ξ_0 und ζ_0 erhält man *zwei Scharen je paralleler Kreisschnitte.*[150])

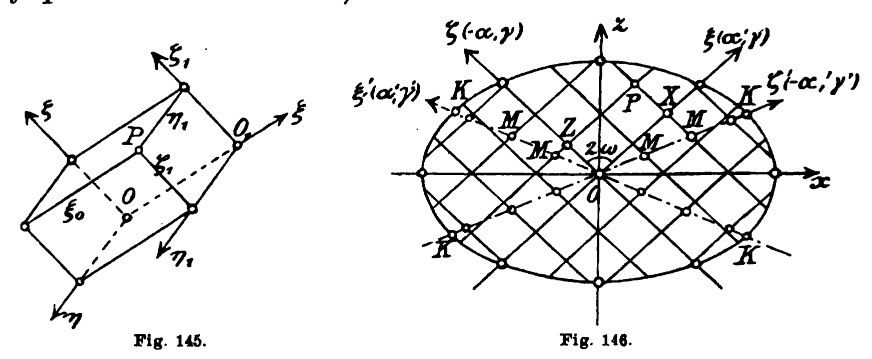


Fig. 145. Fig. 146.

4. Der Ort der Mittelpunkte. Der *Ort der Mittelpunkte* M einer solchen Schar (Fig. 146) ist eine *gerade Linie*, die durch die Gleichungen (15) oder (15′) in dem Parameter ξ_0 oder ζ_0 dargestellt wird (I § 16, (1)).

Sie liegt in der $\zeta\xi$- oder, was dasselbe ist, in der zx-Ebene und ist daher zugleich der Ort der Mittelpunkte der in der zx-Ebene liegenden Durchmesser DD (Fig. 144) der Kreisschnitte, und damit der Sehnen der Ellipse (2), die zur ζ- oder ξ-Achse parallel sind, also (§ 14, 2, I):

Der Ort der Mittelpunkte der der $y\zeta$- *oder* $y\xi$-*Ebene parallelen Kreisschnitte ist der der* ζ- *oder bezüglich* ξ-*Achse konjugierte Durchmesser* ζ' *oder* ξ' (Fig. 145) *der Ellipse* (2).

Für die Richtungskosinus α', γ' des zur ξ-Achse konjugierten Durchmessers ξ' ist daher (§ 14, (4)):

$$(17)\qquad \frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0 \quad\text{oder}\quad \alpha':\gamma'=-\frac{\gamma}{c^2}:\frac{\alpha}{a^2},$$

worauf $-\alpha', \gamma'$ die Richtungskosinus von ζ' sind (Fig. 146).

5. Rückkehr zu dem alten Koordinatensystem. *Die Kreisschnittebenen $\xi=\xi_0$ und $\zeta=\zeta_0$ haben nach (5') in dem alten Koordinatensystem die Gleichungen:*

$$(18)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}\right)=\xi_0 \qquad (18')\quad \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}\right)=\zeta_0,$$

wo α, γ die Werte (4) *haben und ξ_0, ζ_0 beliebige Parameter sind.*

Die Mittelpunkte (15) der Schnittkreise werden nach (5):

$$(19)\quad \begin{cases} x=\alpha(1-p)\xi_0, \\ y=0, \\ z=\gamma(1+p)\xi_0; \end{cases} \qquad (19')\quad \begin{cases} x=-\alpha(1-p)\zeta_0, \\ y=0, \\ z=\gamma(1+p)\zeta_0. \end{cases}$$

Da aber nach (8):

$$\alpha=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1+p}{2}}, \qquad \gamma=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{1-p}{2}},$$

so kann man für (19) schreiben:

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1-p}{2}}\sqrt{1-p^2}\cdot\xi_0, \quad y=0, \quad z=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{1+p}{2}}\sqrt{1-p^2}\cdot\xi_0.$$

Nach (16) wird ferner:

$$\sqrt{b^2-\varrho^2}=\sqrt{1-p^2}\cdot\xi_0,$$

wenn $\sqrt{b^2-\varrho^2}$ das Vorzeichen von ξ_0 hat, so daß:

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1-p}{2}}\sqrt{b^2-\varrho^2}, \quad y=0, \quad z=\frac{c}{b}\sqrt{\frac{1+p}{2}}\sqrt{b^2-\varrho^2}.$$

Somit ergibt sich nach (8):

Die Ebene (18) *oder* (18') *schneidet das Ellipsoid* (1) *in einem Kreise, dessen Radius ϱ sich aus* (16) *und* (16') *bestimmt und dessen Mittelpunkt alsdann die Koordinaten hat:*

$$(20)\quad \begin{cases} x=a\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\sqrt{1-\dfrac{\varrho^2}{b^2}}, \\ y=0, \\ z=c\dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\sqrt{1-\dfrac{\varrho^2}{b^2}}, \end{cases} \qquad (20')\quad \begin{cases} x=-a\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\sqrt{1-\dfrac{\varrho^2}{b^2}}, \\ y=0, \\ z=c\dfrac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}\sqrt{1-\dfrac{\varrho^2}{b^2}}, \end{cases}$$

wo die nicht absolute Wurzel das Vorzeichen von ξ_0 oder ζ_0 hat.

6. Die Hauptkreisschnittebenen. Die beiden durch den *Mittelpunkt* O des Ellipsoids gehenden Kreisschnittebenen heißen *Hauptkreisschnittebenen.* Ihre Gleichungen gehen mit $\xi_0 = 0$ und $\zeta_0 = 0$ aus (18) und (18') hervor. Wir fassen sie in eine Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=0$$

zusammen und erhalten nach (4) den Satz:

Das Paar der beiden Hauptkreisschnittebenen des Ellipsoids (1) *ist durch die Gleichung dargestellt:*

$$(21)\qquad (a^2-b^2)\frac{x^2}{a^2}-(b^2-c^2)\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Die beiden Ebenen verbinden die mittlere Achse (y-*Achse*) *mit denjenigen beiden in der* zx-*Ebene liegenden Durchmessern der Fläche, welche die Länge* $2b$ *der mittleren Achse haben* (Fig. 144). Der Radius der zugehörigen Hauptkreisschnitte ist nach (16) und (16') $\varrho = b$, der *Mittelpunkt* nach (20) und (20') der Mittelpunkt O der Fläche.

Ist das Ellipsoid durch die Gleichung § 55, (1) mit $a^2 > e^2 > d^2$ gegeben, so werden die *Hauptkreisschnittebenen* nach § 55, (6):

$$(21')\qquad d^2\frac{x^2}{a^2}-(e^2-d^2)\frac{z^2}{a^2-e^2}=0.$$

7. Die Kreispunkte des Ellipsoids. Der Radius eines Kreisschnittes nimmt nach (16), da nach (9) $1-p^2>0$ ist, mit wachsendem ξ_0^2 oder ζ_0^2 ab, und zwar von dem größten Werte $\varrho = b$ für ξ_0^2 oder $\zeta_0^2 = 0$ bis zu dem kleinsten Werte $\varrho = 0$ für:

$$\xi_0^2 \text{ oder } \zeta_0^2 = b^2 : (1-p^2).$$

Für $\varrho = 0$ aber reduziert sich der ganze Kreisschnitt auf seinen Mittelpunkt, der dann selbst auf der Fläche liegt. *Ein solcher Punkt der Fläche, der Mittelpunkt eines Kreisschnittes vom Radius* 0 *ist, heißt ein Kreispunkt.*[151])

Mit $\varrho = 0$ folgt daher aus (20) und (20'):

Die Koordinaten der vier Kreispunkte K (Fig. 146) *des Ellipsoids* (1) *entsprechen den Gleichungen:*

$$(22)\qquad x^2 = a^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad y=0,\quad z^2=c^2\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Es sind die Schnittpunkte der Durchmesser ξ' und ζ' (Fig. 146) mit dem zweiten Hauptschnitt. Die Vergleichung der Werte (22) mit § 55, (12') zeigt:

Die Kreispunkte sind die auf dem Ellipsoid selbst liegenden Brennpunkte, seine Schnittpunkte mit der Fokalhyperbel.

8. Umkehrung der Identität der Kreisschnitte. Die Identität (11) führte von der Gleichung (1) zur Gleichung (12). Die Konstanten a^2, b^2, c^2 wurden dabei als gegeben betrachtet und der Bedingung unterworfen: $a^2 > b^2 > c^2$ oder auch, da es nur auf die Auszeichnung der mittleren Achse ankommt: $c^2 > b^2 > a^2$, in welchem Falle die Differenzen unter den Quadratwurzeln (4) in der Form $c^2 - b^2$, $c^2 - a^2$, $b^2 - a^2$ zu schreiben sind. Der Winkel 2ω zwischen den beiden Hauptkreisschnittebenen $O\xi\eta$ und $O\zeta\eta$ ergab sich dann aus (6) und (4). Die Konstante p, die außer b^2 in (12) eingeht, hatte den Wert (9) und erfüllte die Bedingung (10).

Denkt man sich umgekehrt b^2, p, ω mit Rücksicht auf (10) willkürlich gegeben, so folgen aus (6) α und γ und aus (8):

$$a^2 = \frac{2b^2\alpha^2}{1+p}, \quad c^2 = \frac{2b^2\gamma^2}{1-p}. \tag{23}$$

Von diesen beiden Konstanten ist immer die eine $\geqq b^2$, die andere $\leqq b^2$. Denn aus:

$$\frac{2\alpha^2}{1+p} > 1 \quad \text{oder} \quad \alpha^2 = 1 - \gamma^2 > \frac{1+p}{2}$$

folgt:

$$\gamma^2 < \frac{1-p}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{2\gamma^2}{1-p} < 1,$$

und umgekehrt.

Die auf das System $O\xi\eta\zeta$ bezogene und gegebene Fläche (12) *hat daher in bezug auf das System $Oxyz$ die Gleichung:*

$$\frac{1+p}{2b^2}\,\frac{x^2}{\sin^2\omega} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1-p}{2b^2}\,\frac{z^2}{\cos^2\omega} = 1. \tag{24}$$

Diese aber stellt ein *Ellipsoid* dar, für das die y-Achse mit der Länge $2b$ die *mittlere* Achse ist; nur für den besonderen Fall:

$$\sin^2\omega = \frac{1+p}{2}, \quad \cos^2\omega = \frac{1-p}{2} \tag{25}$$

ist die Fläche eine Kugel.

9. Mannigfaltigkeit der erhaltenen Ellipsoide. Während nun die Gleichung (12) nur zwei Konstanten b^2, p enthält, weist die Gleichung (24) noch eine dritte ω auf, die lediglich von dem Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ abhängt, dessen ξ- und ζ-Achse den Winkel 2ω einschließen. Gibt man diesem Winkel andere und andere Werte $\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$, so bekommt das Ellipsoid (24) andere und andere erste und dritte Hauptachsenlängen, ohne daß seine Gleichung (12) und die Gleichungen (14), (14') seiner Kreisschnitte sich ändern.

Dieselbe Gleichung (12) *stellt also bei wechselnden Werten des Winkels 2ω zwischen der ξ- und ζ-Achse des Systems $O\xi\eta\zeta$ ∞^1 Ellip-*

soide (24) *dar, deren Kreisschnittebenen immer den beweglichen* $\xi\eta$- *und* $\eta\zeta$-*Ebenen parallel bleiben.*

10. Das bewegliche Kartonmodell. Um die Kreisschnitte des Ellipsoids (1) durch ein Modell zu veranschaulichen, schneidet man aus Kartonpapier Kreise, welche die der ξ- und ζ-Achse parallelen Sehnen der Ellipse (2) (in Fig. 146 einschließlich der ξ- und ζ-Achse selbst 2×7 Sehnen) als Durchmesser haben und deren Ebenen auf der zx-Ebene senkrecht stehen, und schiebt die Blätter mit beiderseitigen Einschnitten längs der Kreuzungslinien ineinander.

Die Ränder der Kartonkreise veranschaulichen bei hinreichender Anzahl der Blätter die Oberfläche des Ellipsoids (1).

Ändert man jetzt durch einen Druck den Winkel 2ω, den die Blätter miteinander bilden (von Fig. 146 auf Fig. 147), so behält ein Punkt P, der in der zx-Ebene auf der Schnittlinie zweier Blätter liegt, *immer dieselben schiefwinkligen Koordinaten:*

$$\xi = ZP, \quad \eta = 0, \quad \zeta = XP$$

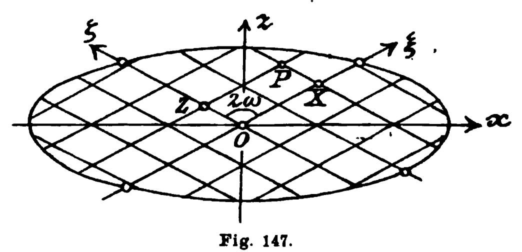


Fig. 147.

(Fig. 146, 147), bezogen auf das mit 2ω *veränderliche* System $O\xi\eta\zeta$, und dasselbe gilt von *jedem* Punkt ξ, η, ζ eines Kartonblattes. Daher bleiben die Ränder der Kartonkreise immer auf dem Ellipsoid (12), welches bei veränderlichem 2ω nach und nach die Gestalt der ∞^1 Ellipsoide (24) annimmt.[152])

11. Ellipsoid mit konjugierten Hauptkreisschnittebenen. Die beiden Achsen ξ und ζ' mit den Richtungskosinus (nach (17)):

$$\alpha, \gamma \quad \text{und} \quad -\alpha' : \gamma' = \frac{\gamma}{c^2} : \frac{\alpha}{a^2}$$

fallen zusammen, wenn:

$$\alpha : \gamma = \frac{\gamma}{c^2} : \frac{\alpha}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0$$

oder nach (7) $p = 0$ ist. Es folgt daher mit Rücksicht auf (9):

Ist bei dem Ellipsoid (1):

$$a^2 - 2b^2 + c^2 = 0, \tag{26}$$

so sind die Schnittlinien der beiden Hauptkreisschnittebenen mit der Ebene des zweiten Hauptschnittes konjugierte Durchmesser des letzteren (die Diagonalen des Rechtecks der Scheiteltangenten § 14, 5, II).[153])

Die Gleichung (12) wird in diesem Falle:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - b^2 = 0. \tag{27}$$

12. Ellipsoid mit senkrechten Hauptkreisschnittebenen. Die beiden Hauptkreisschnittebenen (21) sind zueinander senkrecht, wenn:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{c^2}.$$

Ist bei dem Ellipsoid (1):

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0, \tag{28}$$

so sind die beiden Scharen von Kreisschnittebenen zueinander senkrecht.

§ 59. Die Kreisschnitte des einschaligen Hyperboloids und des Kegels.

1. Einführung von drei gleichlangen Durchmessern als Koordinatenachsen. Das einschalige Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a^2 > b^2, \tag{1}$$

schneidet die yz-Ebene des rechtwinkligen Koordinatensystems $Oxyz$ in der Hyperbel:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Die Richtungskosinus β, γ *eines Halbmessers von gegebener Länge a* (§ 58, (3)) sind durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{3}$$

bestimmt. Sie sind daher:

$$\beta = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{c}{a}\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

oder: $-\beta, \gamma$; $\beta, -\gamma$; $-\beta, -\gamma$. *Wir führen die beiden Halbmesser* β, γ *und* $-\beta, \gamma$ *als Achsen* η *und* ζ *eines schiefwinkligen Koordinatensystems* $O\xi\eta\zeta$ *ein* (Fig. 148), dessen ξ-Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Dazu dienen die Formeln (I § 14, (2)):

Fig. 148.

$$(5)\begin{cases} x = \xi, \\ y = \beta(\eta - \zeta), \\ z = \gamma(\eta + \zeta); \end{cases} \qquad (5')\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right), \\ \zeta = \frac{1}{2}\left(-\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right). \end{cases}$$

Die Achsen η und ζ sind zur Achse ξ beide *rechtwinklig*, bilden aber miteinander einen Winkel 2ω, der von der z-Achse halbiert wird, und für den:

$$(6) \qquad \sin\omega = \beta, \qquad \cos\omega = \gamma.$$

2. Die Identität der Kreisschnitte. Wird zur Abkürzung:

$$(7) \qquad \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{p}{a^2}$$

gesetzt, so folgt aus (3) und (7) durch Addition und Subtraktion:

$$(8) \qquad \frac{1+p}{2} = \frac{a^2}{b^2}\beta^2, \qquad \frac{p-1}{2} = \frac{a^2}{c^2}\gamma^2$$

und daraus mit Rücksicht auf (4):

$$(9) \qquad p = \frac{2a^2 - b^2 + c^2}{b^2 + c^2}.$$

Zugleich folgt aus (8):

$$(10) \qquad p > 1.$$

Durch die Substitution (5) wird nun mit Rücksicht auf (3) und (7):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\beta^2(\eta-\zeta)^2}{b^2} - \frac{\gamma^2(\eta+\zeta)^2}{c^2} \\ &= \frac{\xi^2}{a^2} + \left(\frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)(\eta^2 + \zeta^2) - 2\left(\frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\eta\zeta \\ &= \frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2p\eta\zeta}{a^2}. \end{aligned}$$

Indem wir daher die Fläche (1) selbst ($\varepsilon = 1$) und ihren Asymptotenkegel ($\varepsilon = 0$) zusammenfassen, folgt:

Vermöge der Substitution (5) *besteht die identische Gleichung:*

$$(11) \qquad a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \varepsilon\right) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2p\eta\zeta - \varepsilon a^2,$$

wo p den Wert (9) *hat.*

3. Zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Gleichung der Fläche (1) und ihres Asymptotenkegels in dem neuen Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ lautet nach (11):

$$(12) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2p\eta\zeta - \varepsilon a^2 = 0.$$

Für die Schnittkurve der Fläche mit irgendeiner, der $\xi\zeta$- oder $\xi\eta$-Ebene parallelen Ebene:

$$(13) \qquad \eta = \eta_0 \quad \text{oder} \quad (13') \quad \zeta = \zeta_0$$

wird daher bezüglich:

$$(14) \qquad \xi^2 + (\zeta - p\eta_0)^2 = \varepsilon a^2 + (p^2 - 1)\eta_0^2,$$

$$(14') \qquad \xi^2 + (\eta - p\zeta_0)^2 = \varepsilon a^2 + (p^2 - 1)\zeta_0^2.$$

Die Schnittkurve (14), bezüglich (14'), ist daher (§ 58, 3) ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt:

$$(15) \quad \xi = 0, \quad \eta = \eta_0, \quad \zeta = p\eta_0, \qquad (15') \quad \xi = 0, \quad \eta = p\zeta_0, \quad \zeta = \zeta_0$$

und dem Radius ϱ, für den:

$$(16) \quad \varrho^2 = \varepsilon a^2 + (p^2 - 1)\eta_0^2, \qquad (16') \quad \varrho^2 = \varepsilon a^2 + (p^2 - 1)\zeta_0^2.$$

Das einschalige Hyperboloid ($\varepsilon = 1$), *bezüglich der Kegel* ($\varepsilon = 0$) *in* (12) *wird von jeder der* $\xi\zeta$- *oder* $\xi\eta$-*Ebene parallelen Ebene* (13) *oder* (13') *in einem Kreise geschnitten.*

Bei wechselnden Werten von η_0 und ζ_0 erhält man *zwei Scharen je paralleler Kreisschnitte.*[150])

4. Der Ort der Mittelpunkte. Der Ort der Mittelpunkte M einer solchen Schar ist die durch die Gleichungen (15) oder (15') in den Parametern η_0 oder ζ_0 dargestellte gerade Linie. Sie liegt in der yz-Ebene und ist daher zugleich der Ort der Mittelpunkte der in der yz-Ebene liegenden Durchmesser DD der Kreisschnitte des Hyperboloids, bezüglich $D'D'$ (Fig. 148) des Asymptotenkegels und damit der Sehnen der Hyperbel (2) und ihres Asymptotenpaares, die zur ζ- oder η-Achse parallel sind.

Der Ort der Mittelpunkte der der $\xi\eta$- *oder* $\xi\zeta$-*Ebene parallelen Kreisschnitte ist der der* η- *oder bezüglich* ζ-*Achse konjugierte Durchmesser* η' *oder* ζ' (Fig. 148) *der Hyperbel* (2).

Für die Richtungskosinus β', γ' und $-\beta'$, γ' von η' und ζ' ist daher (§ 14, (4)):

$$(17) \qquad \frac{\beta\beta'}{b^2} - \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \beta' : \gamma' = \frac{\gamma}{c^2} : \frac{\beta}{b^2}.$$

5. Rückkehr zu dem alten Koordinatensystem. Die Kreisschnittebenen $\eta = \eta_0$ und $\zeta = \zeta_0$ haben nach (5') in dem alten Koordinatensystem die Gleichungen:

$$(18) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) = \eta_0, \qquad (18') \quad \frac{1}{2}\left(-\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) = \zeta_0,$$

wo β, γ die Werte (4) haben und η_0, ζ_0 beliebige Parameter sind.

Die Kreisschnittebenen des einschaligen Hyperboloids und seines Asymptotenkegels sind also der großen reellen Achse des Hyperboloids parallel.

Die Mittelpunkte (15), (15') der Schnittkreise werden nach (5):

$$(19)\begin{cases} x = 0, \\ y = \beta(1-p)\eta_0, \\ z = \gamma(1+p)\eta_0; \end{cases} \qquad (19') \begin{cases} x = 0, \\ y = -\beta(1-p)\zeta_0, \\ z = \gamma(1+p)\zeta_0. \end{cases}$$

Da aber nach (8):

$$\beta = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{p+1}{2}}, \qquad \gamma = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{p-1}{2}},$$

so kann man für (19) auch schreiben (vgl. (10)):

$$x = 0, \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{\frac{p-1}{2}}\sqrt{p^2-1}\cdot\eta_0, \quad z = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{p+1}{2}}\sqrt{p^2-1}\cdot\eta_0.$$

Nach (16) wird ferner:

$$\sqrt{\varrho^2 - \varepsilon a^2} = \sqrt{p^2-1}\cdot\eta_0,$$

wenn $\sqrt{\varrho^2 - \varepsilon a^2}$ das Vorzeichen von η_0 hat, so daß die Formeln (19) mit Rücksicht auf (4) und (8) lauten:

$$(20) \qquad x = 0, \quad y = -b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}\sqrt{\frac{\varrho^2}{a^2}-\varepsilon}, \quad z = c\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}\sqrt{\frac{\varrho^2}{a^2}-\varepsilon}$$

und mit umgekehrtem Vorzeichen von y die Formeln (19').

6. Die Hauptkreisschnittebenen. Die beiden durch den Mittelpunkt O des Hyperboloids gehenden *„Hauptkreisschnittebenen"* gehen mit $\eta_0 = 0$ und $\zeta_0 = 0$ aus (18) und (18') hervor:

Das Paar der Hauptkreisschnittebenen des einschaligen Hyperboloids (1) *und seines Asymptotenkegels ist durch die Gleichung dargestellt:*

$$(21) \qquad (a^2-b^2)\frac{y^2}{b^2} - (a^2+c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad a^2 > b^2.$$

Die beiden Ebenen verbinden die große reelle Achse (x-Achse) mit den beiden in der yz-Ebene liegenden Durchmessern der Fläche, welche die Länge $2a$ *der großen reellen Achse haben* (Fig. 148). Der Radius der Hauptkreisschnitte ist a.

Ist das Hyperboloid durch die Gleichung § 55, (1) mit $e^2 > a^2 > d^2$ gegeben, so werden die *Hauptkreisschnittebenen* nach § 55, (6'):

$$(21') \qquad d^2\frac{y^2}{a^2-d^2} - e^2\frac{z^2}{e^2-a^2} = 0.$$

7. Fehlen der Kreispunkte. Der Radius eines Kreisschnittes nimmt nach (16), da nach (10) $p^2 - 1 > 0$ ist, mit wachsendem η_0 oder ζ_0 beständig zu und hat seinen kleinsten Wert $\varrho = a$ beim Hyperboloid und $\varrho = 0$ beim Kegel für die beiden Hauptkreisschnittebenen mit $\eta_0 = 0$ oder $\zeta_0 = 0$. Er kann also bei jenem nicht verschwinden (§ 58, 7).

Das einschalige Hyperboloid hat keine Kreispunkte.

8. Umkehrung der Identität der Kreisschnitte. Denkt man sich a^2, p und 2ω mit Rücksicht auf (10) gegeben, so folgen aus (6) β und γ und aus (8):

$$(22) \qquad b^2 = \frac{2a^2\beta^2}{1+p}, \qquad c^2 = \frac{2a^2\gamma^2}{p-1}.$$

Dabei ist stets $b^2 < a^2$, da:

$$\beta^2 = \sin^2\omega < 1 < \frac{1+p}{2}.$$

Die auf das System $O\xi\eta\zeta$ *bezogene und gegebene Fläche* (12) *hat daher in bezug auf das System* $Oxyz$ *die Gleichung:*

$$(23) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{p+1}{2a^2}\frac{y^2}{\sin^2\omega} - \frac{p-1}{2a^2}\frac{z^2}{\cos^2\omega} = \varepsilon.$$

Sie ist also für $\varepsilon = 1$ ein einschaliges Hyperboloid, für das die x-Achse mit der Länge $2a$ die große reelle Achse ist, für $\varepsilon = 0$ der zugehörige Asymptotenkegel.

9. Das bewegliche Kartonmodell. Wie § 58, **10** kann ein bewegliches Modell des einschaligen Hyperboloids aus zwei Scharen kreisförmiger Kartonblätter zusammengefügt werden, welches das System der Flächen (23) mit veränderlichem ω darstellt.[152])

10. Einschaliges Hyperboloid und Kegel mit senkrechten Kreisschnittebenen. Die beiden Hauptkreisschnittebenen (21) des einschaligen Hyperboloids (1) und seines Asymptotenkegels sind zueinander senkrecht, wenn[153]):

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} = \frac{a^2+c^2}{c^2}$$

oder:

$$(24) \qquad \frac{2}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0.$$

11. Die Kreisschnitte des elliptischen Zylinders. Aus (1) und (21) folgt zugleich mit $c = \infty$:

Das Paar der Hauptkreisschnittebenen des elliptischen Zylinders:

$$(25) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a^2 > b^2$$

hat die Gleichung:

$$(26) \qquad (a^2 - b^2)y^2 - b^2z^2 = 0.$$

§ 60. Die Kreisschnitte des zweischaligen Hyperboloids und des Kegels.

1. Einführung von drei gleichlangen imaginären Durchmessern als Koordinatenachsen. Das auf das Koordinatensystem $Oxyz$ bezogene zweischalige Hyperboloid:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad b^2 < c^2,$$

schneidet die xy-Ebene in der Hyperbel:

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Die Richtungskosinus α, β *eines Halbmessers dieser Hyperbel, dessen Quadrat den gegebenen Wert:* $-c^2$ hat, werden durch die Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = -\frac{1}{c^2}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

bestimmt. Sie sind daher:

$$(4) \qquad \alpha = \frac{a}{c}\frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \beta = \frac{b}{c}\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

oder

$$-\alpha,\ \beta; \quad \alpha,\ -\beta; \quad -\alpha,\ -\beta.$$

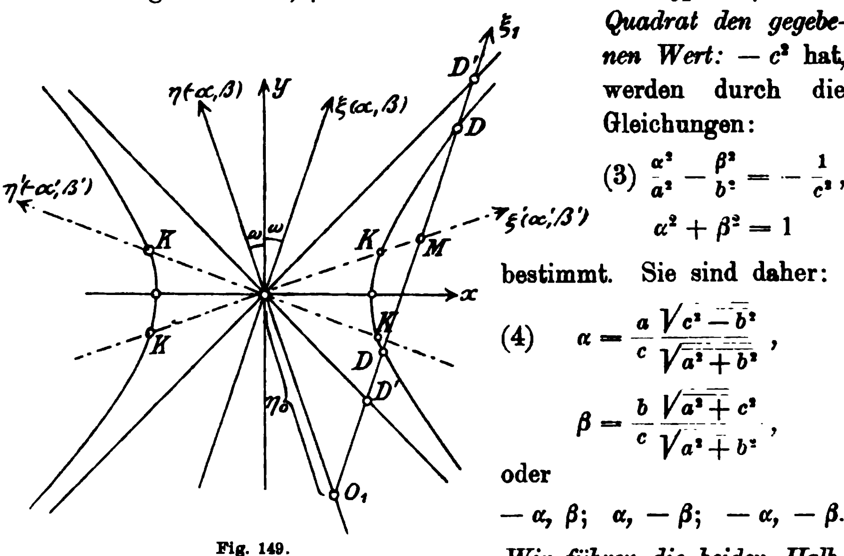


Fig. 149.

Wir führen die beiden Halbmesser α, β *und* $-\alpha$, β *als Achsen* ξ *und* η *eines schiefwinkligen Koordinatensystems* $\Omega\xi\eta\zeta$ (Fig. 149) *ein,* dessen ζ-Achse mit der z-Achse von $Oxyz$ zusammenfällt. Dazu dienen die Formeln:

$$(5) \quad \begin{cases} x = \alpha(\xi - \eta), \\ y = \beta(\xi + \eta), \\ z = \zeta; \end{cases} \qquad (5') \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right), \\ \eta = \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right), \\ \zeta = z. \end{cases}$$

Die Achsen ξ und η sind zur Achse ζ beide rechtwinklig, bilden aber miteinander den Winkel 2ω, der von der y-Achse halbiert wird und für den:

$$(6) \qquad \alpha = \sin\omega, \qquad \beta = \cos\omega.$$

2. Die Identität der Kreisschnitte. Wird zur Abkürzung:

$$(7)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=-\frac{p}{c^2}$$

gesetzt, so folgt aus (3) und (7):

$$(8)\qquad \frac{1+p}{2}=-\frac{c^2\alpha^2}{a^2},\qquad \frac{1-p}{2}=\frac{c^2\beta^2}{b^2}$$

und daraus mit Rücksicht auf (4):

$$(9)\qquad p=\frac{-a^2+b^2-2c^2}{a^2+b^2}.$$

Zugleich folgt aus (8):

$$(10)\qquad p<-1.$$

Durch die Substitution (5) wird nun mit Rücksicht auf (3) und (7):

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=\frac{\alpha^2(\xi-\eta)^2}{a^2}-\frac{\beta^2(\xi+\eta)^2}{b^2}-\frac{\zeta^2}{c^2}\\ &=\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)(\xi^2+\eta^2)-2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)\xi\eta-\frac{\zeta^2}{c^2}\\ &=\frac{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+2p\xi\eta}{c^2}.\end{aligned}$$

Indem wir daher die Fläche (1) selbst ($\varepsilon=1$) und ihren Asymptotenkegel ($\varepsilon=0$) zusammenfassen, sagen wir:

Vermöge der Substitution (5) *besteht die identische Gleichung:*

$$(11)\qquad -c^2\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\varepsilon\right)=\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2p\xi\eta+\varepsilon c^2,$$

wo p den Wert (9) *hat.*

3. Zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Gleichung der Fläche (1) und ihres Asymptotenkegels in dem neuen System $O\xi\eta\zeta$ lautet nach (11):

$$(12)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2p\xi\eta+\varepsilon c^2=0.$$

Für die Schnittkurve der Fläche mit irgendeiner, der $\eta\zeta$- oder $\xi\zeta$-Ebene parallelen Ebene:

$$(13)\qquad \xi=\xi_0\quad\text{oder}\quad \eta=\eta_0$$

ist daher bezüglich (§ 58, 3):

$$(14)\qquad (\eta-p\xi_0)^2+\zeta^2=-\varepsilon c^2+(p^2-1)\xi_0^2,$$

$$(14')\qquad (\xi-p\eta_0)^2+\zeta^2=-\varepsilon c^2+(p^2-1)\eta_0^2.$$

Die Schnittkurve ist daher ein Kreis mit dem Mittelpunkt:

$$(15)\quad \xi=\xi_0,\ \eta=p\xi_0,\ \zeta=0,\qquad (15')\quad \xi=p\eta_0,\ \eta=\eta_0,\ \zeta=0$$

und dem Radius ϱ, für den:

$$(16)\quad \varrho^2=-\varepsilon c^2+(p^2-1)\xi_0^2,\qquad (16')\quad \varrho^2=-\varepsilon c^2+(p^2-1)\eta_0^2.$$

Das zweischalige Hyperboloid ($\varepsilon = 1$), *bezüglich der Kegel* ($\varepsilon = 0$) *in* (12) *wird von jeder der* $\eta\zeta$- *oder* $\xi\zeta$-*Ebene parallelen Ebene* (13) *in einem Kreis geschnitten.*

Bei wechselnden Werten von ξ_0 und η_0 erhält man *zwei Scharen je paralleler Kreisschnitte.*[150])

4. Der Ort der Mittelpunkte. Der Ort der Mittelpunkte M einer solchen Schar liegt nach (15) und (15') in der xy-Ebene und ist zugleich der Ort der Mittelpunkte der Sehnen DD des Hyperboloids und $D'D'$ des Asymptotenkegels (Fig. 149), die in der xy-Ebene liegen und der ξ- oder η-Achse parallel sind.

Der Ort der Mittelpunkte der der $\xi\zeta$- *und* $\eta\zeta$-*Ebene parallelen Kreisschnitte ist der der* ξ- *oder bezüglich* η-*Achse konjugierte Durchmesser* ξ' *und* η' (Fig. 149) *der Hyperbel* (2).

Für die Richtungskosinus α', β' und $-\alpha'$, β' von ξ' und η' ist daher (§ 14, (4)):

$$(17) \qquad \frac{\alpha\alpha'}{a^2} - \frac{\beta\beta'}{b^2} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha' : \beta' = \frac{\beta}{b^2} : \frac{\alpha}{a^2}.$$

5. Rückkehr zu dem alten Koordinatensystem. Die Kreisschnittebenen $\xi = \xi_0$ und $\eta = \eta_0$ haben nach (5) in dem Koordinatensystem $Oxyz$ die Gleichungen:

$$(18) \quad \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) = \xi_0, \qquad (18') \quad \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta}\right) = \eta_0.$$

Die Kreisschnittebenen des zweischaligen Hyperboloids und seines Asymptotenkegels sind daher der großen imaginären Achse parallel.

Die Mittelpunkte der Schnittkreise werden nach (5) und (15):

$$(19) \begin{cases} x = \alpha(1-p)\xi_0, \\ y = \beta(1+p)\xi_0, \\ z = 0; \end{cases} \qquad (19') \begin{cases} x = -\alpha(1-p)\eta_0, \\ y = \beta(1+p)\eta_0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Da aber nach (8):

$$\alpha = \frac{a}{c}\sqrt{-\frac{1+p}{2}}, \qquad \beta = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{1-p}{2}},$$

so kann man für (19) auch schreiben:

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{1-p}{2}}\sqrt{p^2-1}\cdot\xi_0, \qquad y = \frac{b}{c}\sqrt{-\frac{1+p}{2}}\sqrt{p^2-1}\cdot\xi_0, \qquad z = 0.$$

Nach (16) wird ferner:

$$\sqrt{\varrho^2 + \varepsilon c^2} = \sqrt{p^2 - 1}\cdot\xi_0,$$

wenn $\sqrt{\varrho^2 + \varepsilon c^2}$ das Vorzeichen von ξ_0 hat, so daß die Formeln (19)

mit Rücksicht auf (4) und (8) werden:

$$(20)\qquad x = a\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{\varrho^2}{c^2}+\varepsilon}, \quad y = b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}}\sqrt{\frac{\varrho^2}{c^2}+\varepsilon}, \quad z = 0,$$

und mit umgekehrtem Vorzeichen von x die Formeln (19′).

6. Die Hauptkreisschnittebenen. Die beiden durch den Mittelpunkt O des Hyperboloids gehenden „*Hauptkreisschnittebenen*" gehen mit $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 = 0$ aus (18) und (18′) hervor:

Das Paar der Hauptkreisschnittebenen des zweischaligen Hyperboloids (1) *und seines Asymptotenkegels ist durch die Gleichung dargestellt:*

$$(21)\qquad (a^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} - (c^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} = 0, \qquad b^2 < c^2.$$

Die beiden Ebenen verbinden die große imaginäre Achse (z-Achse) mit den beiden in der xy-Ebene liegenden Halbmessern der Fläche, welche die Länge $2ci$ *der großen imaginären Achse haben* (Fig. 149). Der Radius der Hauptkreisschnitte ist ci; die Hauptkreisschnittebenen schneiden die Fläche nicht in einem reellen Kreise.

Ist das Hyperboloid durch die Gleichung § 55, (1) mit $d^2 > a^2$ gegeben, so werden die *Hauptkreisschnittebenen* nach § 55, (6″):

$$(21')\qquad e^2\frac{x^2}{a^2} - (e^2 - d^2)\frac{y^2}{d^2 - a^2} = 0.$$

7. Die Kreispunkte des zweischaligen Hyperboloids. Der Radius ϱ eines Kreisschnittes ist nach (16), da nach (8) $p^2 - 1 > 0$ ist, bei von 0 an wachsendem ξ_0^2 oder η_0^2 zunächst imaginär. Er wird Null bei dem Hyperboloid für ξ_0^2 oder $\eta_0^2 = \varepsilon c^2 : (p^2 - 1)$, beim Asymptotenkegel für ξ_0 oder $\eta_0 = 0$, und wächst alsdann mit weiter wachsendem ξ_0 oder η_0 beständig weiter.

Für $\varrho = 0$ aber reduziert sich der ganze Kreisschnitt auf seinen Mittelpunkt, der dann (vgl. § 58, 7) ein Kreispunkt der Fläche wird und in einen ihrer Schnittpunkte mit den Achsen ξ' und η' fällt.[151]) Aus (20) folgt dann mit $\varrho = 0$, $\varepsilon = 1$:

Die Koordinaten der vier Kreispunkte K (Fig. 149) *des zweischaligen Hyperboloids entsprechen den Gleichungen:*

$$(22)\qquad x^2 = a^2\frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}, \quad y^2 = b^2\frac{c^2-b^2}{a^2+b^2}, \quad z = 0.$$

Nach § 55, (13′) *sind die Kreispunkte die auf dem zweischaligen Hyperboloid selbst liegenden Brennpunkte, seine Schnittpunkte mit der Fokalellipse.*

8. Umkehrung der Identität der Kreisschnitte. Denkt man sich c^2, p und 2ω mit Rücksicht auf (10) gegeben, so folgen aus (6) α und β und aus (8):

$$(23) \qquad a^2 = -\frac{2c^2\alpha^2}{1+p}, \quad b^2 = \frac{2c^2\beta^2}{1-p}.$$

Dabei ist stets $b^2 < c^2$, da:

$$\beta^2 = \cos^2\omega < 1 < \frac{1-p}{2}.$$

Die auf das System $O\xi\eta\zeta$ bezogene und gegebene Fläche (12) *hat daher in bezug auf das System $Oxyz$ die Gleichung:*

$$(24) \qquad -\frac{1+p}{2c^2}\frac{x^2}{\sin^2\omega} - \frac{1-p}{2c^2}\frac{y^2}{\cos^2\omega} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon.$$

Sie ist also für $\varepsilon = 1$ ein zweischaliges Hyperboloid, für das die z-Achse die große imaginäre Achse ist, für $\varepsilon = 0$ der zugehörige Asymptotenkegel.

9. Das bewegliche Kartonmodell. Wie § 58, **10** kann ein bewegliches Modell jeder der beiden Schalen des zweischaligen Hyperboloids aus zwei Scharen kreisförmiger Kartonblätter zusammengefügt werden, welches das System der Flächen (24) mit veränderlichem Winkel 2ω zwischen den beiderlei Kreisschnittebenen darstellt.[152])

10. Zweischaliges Hyperboloid mit senkrechten Kreisschnittebenen. Die beiden Hauptkreisschnittebenen (21) des zweischaligen Hyperboloids (1) und seines Asymptotenkegels sind zueinander *senkrecht,* wenn:

$$\frac{a^2+c^2}{a^2} = \frac{c^2-b^2}{b^2},$$

oder[153]):

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{2}{c^2} = 0.$$

§ 61. Die Kreisschnitte des elliptischen Paraboloids.

1. Einführung eines neuen Koordinatensystems. Das (rechte) elliptische Paraboloid § 56, (16):

$$(1) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0, \quad b^2 > c^2,$$

soll *von dem rechtwinkligen Koordinatensystem $Oxyz$ auf ein neues System $O\xi\eta\zeta$ transformiert werden,* dessen η-Achse mit der y-Achse zusammenfällt und dessen ξ- und ζ-Achse in der xz-Ebene liegen und mit der x-Achse die spitzen Winkel ω bilden (Fig. 150). Die Richtungskosinus der Achsen ξ und ζ in der xz-Ebene seien demnach $\alpha, -\gamma$ und α, γ, wo:

$$(2) \qquad \alpha = \cos\omega, \quad \gamma = \sin\omega.$$

Der Winkel ω aber entspreche den Gleichungen:

$$(3)\qquad \frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{1}{b^2}, \quad \alpha^2 + \gamma^2 = 1,$$

so daß:

$$(4)\qquad \alpha = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b}, \quad \gamma = \frac{c}{b}.$$

Die Transformation geschieht durch die Formeln:

$$(5)\quad \begin{cases} x = \alpha(\xi + \zeta), \\ y = \eta, \\ z = \gamma(-\xi + \zeta); \end{cases} \qquad (5')\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right), \\ \eta = y, \\ \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right). \end{cases}$$

2. Die Identität der Kreisschnitte. Durch die Substitution (5) wird, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$(6)\qquad b\sqrt{b^2 - c^2} = p:$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2x = \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2(-\xi + \zeta)^2}{c^2} - 2\alpha(\xi + \zeta)$$

$$= \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}(\xi^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta) - 2\alpha(\xi + \zeta)$$

$$= \frac{1}{b^2}\{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta - 2p(\xi + \zeta)\}.$$

Vermöge der Substitution (5) *besteht daher die identische Gleichung:*

$$(7)\qquad b^2\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2x\right)$$

$$= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta - 2p(\xi + \zeta),$$

wo p den Wert (6) *hat.*

3. Zwei Scharen von Kreisschnitten. Die Gleichung der Fläche (1) in dem neuen System $O\xi\eta\zeta$ lautet nach (7):

$$(8)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\xi\zeta - 2p(\xi + \zeta) = 0.$$

Für die Schnittkurve der Fläche mit einer beliebigen, der $\eta\zeta$- oder $\xi\eta$-Ebene parallelen Ebene:

$$(9)\quad \xi = \xi_0 \qquad \text{oder} \qquad (9')\quad \zeta = \zeta_0$$

wird daher:

$$(10)\qquad \eta^2 + (\zeta - (p + \xi_0))^2 = p^2 + 4p\xi_0,$$

$$(10')\qquad (\xi - (p + \zeta_0))^2 + \eta^2 = p^2 + 4p\zeta_0.$$

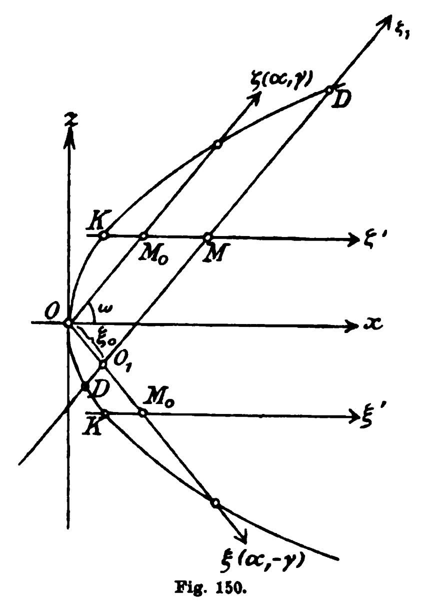


Fig. 150.

Die Schnittkurve ist ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt:

(11) $\xi = \xi_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = p + \xi_0,$ (11′) $\xi = p + \zeta_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \zeta_0$

und dem Radiusquadrat:

(12) $\varrho^2 = p^2 + 4p\xi_0,$ (12′) $\varrho^2 = p^2 + 4p\zeta_0.$

Das elliptische Paraboloid (8) *wird von jeder der* $\eta\zeta$- *oder* $\xi\eta$-*Ebene parallelen Ebene* (9) *oder* (9′) *in einem Kreise geschnitten.*

Bei wechselnden Werten von ξ_0 und ζ_0 erhält man *zwei Scharen je paralleler Kreisschnitte.*[150])

4. Rückkehr zu dem alten Koordinatensystem. Die Kreisschnittebenen (9) und (9′) haben nach (5′) in dem alten System $Oxyz$ die Gleichungen:

(13) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma}\right) = \xi_0,$ (13′) $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right) = \zeta_0.$

Die Mittelpunkte (11) und (11′) aber erhalten die Koordinaten:

(14) $\begin{cases} x = \alpha(p + 2\xi_0), \\ y = 0, \\ z = \gamma p. \end{cases}$ (14′) $\begin{cases} x = \alpha(p + 2\zeta_0), \\ y = 0, \\ z = -\gamma p. \end{cases}$

5. Der Ort der Mittelpunkte. Der Ort der Mittelpunkte jeder der beiden Scharen von Kreisschnitten ist eine der x-Achse parallele und in der xz-Ebene liegende Gerade ζ' und ξ'. Sie ist zugleich der Ort der Mittelpunkte des Systems von Sehnen DD, die der ζ- und ξ-Achse parallel in der xz-Ebene verlaufen und Durchmesser der Kreisschnitte sind (Fig. 150), also der der Richtung ζ und ξ konjugierte Durchmesser der Parabel (§ 14, 8).

6. Die Hauptkreisschnittebenen. Die durch den Scheitelpunkt O des Paraboloids gehenden Kreisschnittebenen nennen wir *Hauptkreisschnittebenen*

Sie gehen mit $\xi_0 = 0$ und $\eta_0 = 0$ aus (13) und (13′) hervor. Nach (4) folgt dann:

Das Paar der Hauptkreisschnittebenen des elliptischen Paraboloids ist durch die Gleichungen dargestellt:

(15) $$c^2x^2 - (b^2 - c^2)z^2 = 0.$$

Die zugehörigen Mittelpunkte M_0 (Fig. 150) sind nach (14) und (14′):

(16) $$x = \alpha p, \quad y = 0, \quad z = \pm\gamma p$$

und der Radius $\varrho = p$.

7. Die Kreispunkte des elliptischen Paraboloids. Der Radius ϱ eines Kreisschnittes wird nach (12) und (12′) Null, wenn:

$$(17)\qquad \xi_0 = -\frac{p}{4} \qquad \text{oder} \qquad (17')\ \zeta_0 = -\frac{p}{4}.$$

Der Mittelpunkt, der dann ein Kreispunkt der Fläche ist, wird damit nach (14), (14′):

$$(18)\qquad x = \tfrac{1}{2}\alpha p, \quad y = 0, \quad z = \pm\gamma p.$$

Mit Rücksicht auf (4) und (6) folgt daher:

Die Koordinaten der beiden Kreispunkte K (Fig. 150) *des elliptischen Paraboloids sind:*

$$(19)\qquad x = \tfrac{1}{2}(b^2 - c^2), \quad y = 0, \quad z^2 = c^2(b^2 - c^2),$$

und nach § 56, (19), wo das Vorzeichen von x in § 56, (16) das umgekehrte wie hier in (1) ist[151]):

Die Kreispunkte sind die auf dem Paraboloid liegenden Brennpunkte, die Schnittpunkte des Paraboloids mit seiner äußeren Fokalparabel. Sie liegen in der Hauptebene der kleineren Öffnung (§ 56, **9**).

8. Umkehrung der Identität der Kreisschnitte. Denkt man sich, von der Gleichung (8) ausgehend, p und ω gegeben, so folgt aus (4) und (6):

$$\sqrt{b^2 - c^2} = b\alpha, \quad c^2 = b^2\gamma^2, \quad b\sqrt{b^2 - c^2} = p,$$

oder:

$$(20)\qquad b^2 = \frac{p}{\alpha}, \quad c^2 = \frac{p\gamma^2}{\alpha}.$$

Beide Ausdrücke sind für $p > 0$ positiv und $b^2 > c^2$.

Die auf das System $O\xi\eta\zeta$ bezogene und gegebene Fläche (8) *hat daher in bezug auf das System $Oxyz$ die Gleichung:*

$$(21)\qquad \frac{\cos\omega}{p}\,y^2 + \frac{\cos\omega}{p}\,\frac{z^2}{\sin^2\omega} - 2x = 0.$$

Sie ist also ein elliptisches Paraboloid.

9. Das bewegliche Kartonmodell. Wie § 58, **10** kann ein bewegliches Modell des elliptischen Paraboloids aus zwei Scharen kreisförmiger Kartonblätter zusammengefügt werden, welches das System der Flächen (21) mit veränderlichem Winkel 2ω zwischen den Kreisschnittebenen darstellt.[152])

10. Ein besonderes elliptisches Paraboloid. Die beiden Richtungen α, γ und $\alpha, -\gamma$ (Fig. 150) stehen zueinander senkrecht, wenn $\alpha^2 - \gamma^2 = 0$.[151])

Die beiden Scharen der Kreisschnitte des Paraboloids (1) *sind zueinander senkrecht, wenn:*

$$(22)\qquad b^2 - 2c^2 = 0.$$

§ 62. Die geradlinigen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids.

1. Einführung eines neuen Koordinatensystems. Das hyperbolische Paraboloid § 56, (16'):

$$(1)\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0$$

schneidet die yz-Ebene in dem Linienpaar:

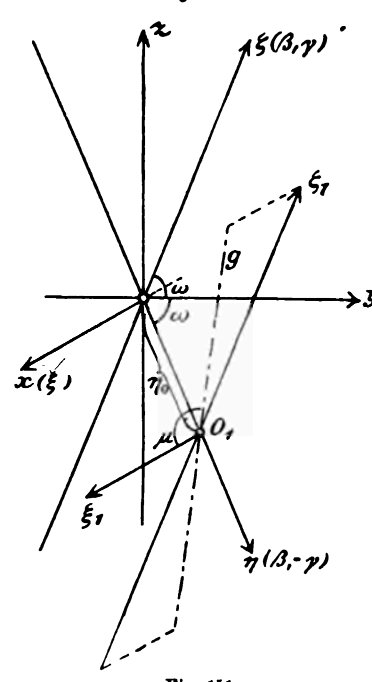


Fig. 151.

$$(2)\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad x = 0,$$

dessen beide Geraden, die Scheitelerzeugenden (§ 56, 8), im System Oyz die Richtungskosinus $\beta, -\gamma$ und β, γ haben (Fig. 151), wo:

$$(3)\qquad \beta = \frac{b}{p} = \cos\omega, \qquad \gamma = \frac{c}{p} = \sin\omega,$$

und zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(4)\qquad p = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Wir führen diese beiden Geraden, die den Winkel 2ω miteinander bilden, als Achsen η und ζ eines Systems $O\xi\eta\zeta$ ein, dessen ξ-Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Es gelten dann die Transformationsformeln:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \xi, \\ y = \frac{b}{p}(\eta + \zeta), \\ z = \frac{c}{p}(-\eta + \zeta); \end{cases} \qquad (5')\qquad \begin{cases} \xi = x, \\ \eta = \frac{p}{2}\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right), \\ \zeta = \frac{p}{2}\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right). \end{cases}$$

2. Die Identität der geradlinigen Schnitte. Durch die Substitution (5) wird nun:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = \frac{1}{p^2}(\eta + \zeta)^2 - \frac{1}{p^2}(\eta - \zeta)^2 - 2\xi = \frac{4\eta\zeta}{p^2} - 2\xi.$$

Vermöge der Substitution (5) *besteht daher die identische Gleichung:*

$$(6)\qquad p^2\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x\right) = 4\eta\zeta - 2p^2\xi,$$

wo p die Bedeutung (4) *hat.*

3. Zwei Scharen geradliniger Schnitte. *Die Gleichung der Fläche* (1) *in dem neuen Koordinatensystem* $O\xi\eta\zeta$ *lautet nach* (6):

(7) $$2\eta\zeta - p^2\xi = 0.$$

Die beiden auch durch die erste Gleichung (2) dargestellten Ebenen $\eta = 0$ und $\zeta = 0$ heißen die *Asymptotenebenen*[10]) *des hyperbolischen Paraboloids*, die Gleichung (7) seine *Asymptotengleichung*.[18]) Für die Schnittlinie der Fläche mit einer beliebigen der $\xi\zeta$- oder $\xi\eta$-Ebene parallelen Ebene:

(10) $\eta = \eta_0$ oder: (10′) $\zeta = \zeta_0$

wird nach (7):

(11) $2\eta_0\zeta - p^2\xi = 0,$ (11′) $2\zeta_0\eta - p^2\xi = 0,$

wo ξ, ζ oder ξ, η gleich als Koordinaten in einem ebenen rechtwinkligen System $O_1\xi_1\zeta_1$ oder $O_1\xi_1\eta_1$ gelten können, dessen Achsen, vom Punkte $O_1: \xi = 0,\ \eta = \eta_0,\ \zeta = 0$ oder $\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = \zeta_0$ ausgehend, mit den gleichnamigen Achsen von $O\xi\eta\zeta$ parallel sind (Fig. 151). Die Gleichungen (11), (11′) stellen aber gerade Linien g (Fig. 151) dar, die durch O_1 gehen, und für deren Winkel μ und ν gegen die ξ_1-Achse:

(12) $$\operatorname{tg}\mu = \frac{p^2}{2\eta_0}, \quad \operatorname{tg}\nu = \frac{p^2}{2\zeta_0}.$$

Das hyperbolische Paraboloid (7) *wird von jeder der* $\xi\zeta$- *oder* $\xi\eta$-*Ebene parallelen Ebene in einer geraden Linie geschnitten, welche die* η- *oder bezüglich* ζ-*Achse schneidet und eine wechselnde Neigung* μ *oder* ν *gegen die* ξ-*Achse hat.*[155])

4. Rückkehr zu dem alten Koordinatensystem. Die Ebenen (10) und (10′) der geradlinigen Schnitte haben in dem alten Koordinatensystem die Gleichungen:

(13) $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{2\eta_0}{p},$ (13′) $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{2\zeta_0}{p},$

während die Gleichungen (11) werden:

(14) $\frac{2\eta_0}{p}\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 2x,$ (14′) $\frac{2\zeta_0}{p}\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 2x.$

Die Gleichungen (13) *und* (14) *mit dem Parameter* η_0 *stellen somit* (I § 43, 3) *eine erste und die Gleichungen* (13′) *und* (14′) *mit dem Parameter* ζ_0 *eine zweite Schar gerader Linien dar, die auf der Fläche* (1) *liegen.*

In der Tat geht, wenn man durch Multiplikation der Gleichungen (13) und (14) η_0 eliminiert, wieder die Gleichung (1) hervor, so daß die gerade Linie (13), (14) ganz der Fläche (1) angehört.

5. Umkehrung der Identität der geradlinigen Schnitte. Denkt man sich, von der Gleichung (7) ausgehend, p und ω gegeben, so folgt aus (3):

$$(15)\qquad b = \beta p = p\cos\omega\,,\qquad c = \gamma p = p\sin\omega\,.$$

Die auf das System $O\xi\eta\zeta$ bezogene und gegebene Fläche (7) *hat daher in bezug auf das System $Oxyz$ die Gleichung:*

$$(16)\qquad \frac{y^2}{p^2\cos^2\omega} - \frac{z^2}{p^2\sin^2\omega} - 2x = 0\,,$$

wo 2ω der Winkel zwischen der η- und ζ-Achse ist.

Bei veränderlichem ω stellt die Gleichung (16) ein System von ∞^1 hyperbolischen Paraboloiden dar, die alle in den schiefwinkligen Koordinaten dieselbe Gleichung (7) haben.

Da $p^2\cos^2\omega - (-p^2\sin^2\omega) = p^2$ von ω unabhängig ist, so folgt aus § 56, (27):

Die zu wechselnden Werten von ω gehörigen Paraboloide (16) *sind konfokal, jedoch nicht konfokal liegend.*

6. Bewegliches Kartonmodell. Man denke sich die Ebene $\eta = \eta_0$ durch ein Kartonblatt $ABCD$ (Fig. 152) dargestellt, dessen obere Grenzlinie $g = CD$ die durch (12) von η_0 abhängig gemachte Neigung μ gegen die senkrechte Mittellinie $EO_1 = \xi_1$ hat und stelle dieses Blatt parallel zur $\xi\zeta$-Ebene (Fig. 151) derart auf, daß das Achsensystem $O_1\xi_1\zeta_1$ des Blattes Fig. 152 in das gleichbezeichnete der Fig. 151 fällt. Die Grundlinie AB des Blattes kommt dabei auf eine horizontale Ebene zu stehen, die um EO_1 unterhalb der jetzt horizontal gedachten yz-Ebene der Fig. 151 liegt.

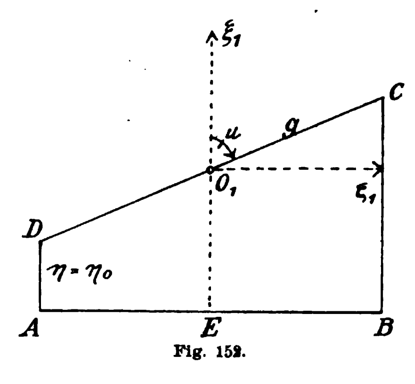


Fig. 152.

In gleicher Weise stellt man eine Schar Blätter $\eta = \eta_0$ her, die sich nur in dem nach (12) veränderten Winkel μ unterscheiden, und ebenso eine Schar Blätter $\zeta = \zeta_0$. Wo die Blätter der beiden je parallelen Scharen sich schneiden, schiebt man sie mittels beiderseitiger Einschnitte ineinander. Die Geraden g bezeichnen dann die Fläche (7), unabhängig von dem Winkel 2ω, den man gewählt hat. Verändert man diesen, so stellt das Modell die verschiedenen Flächen des Systems (16) dar, die konfokal sind.[152])

7. Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid. Wenn für die Fläche (1):

$$b^2 = c^2 \tag{17}$$

ist, so *stehen die beiden Scharen* (13) *und* (13′) *der Ebenen geradliniger Schnitte zueinander senkrecht.*[154])

III. Kapitel.

Die geraden Erzeugenden und die Fadenmodelle.

§ 63. Die geraden Linien des einschaligen Hyperboloids.

1. Begriff und Bedingungsgleichungen einer Erzeugenden. Eine gerade Linie, die in ihrer ganzen Ausdehnung einer Fläche zweiter Ordnung angehört, heißt eine *Erzeugende der Fläche. Das Ellipsoid und zweischalige Hyperboloid können keine Geraden enthalten,* da jenes in der Ebene $t = 0$, dieses in der Ebene $x = 0$ keinen reellen Punkt hat (§ 55, 9; 7), während eine reelle Gerade jede dieser Ebenen in einem Punkte schneiden würde.

Soll eine Gerade (I § 43, (13)):

$$x = \alpha z + \beta, \quad y = \gamma z + \delta \tag{1}$$

in ihrer ganzen Ausdehnung dem *einschaligen Hyperboloid* [oder seinem Asymptotenkegel]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\ [0] \tag{2}$$

angehören, muß die Gleichung:

$$\frac{(\alpha z + \beta)^2}{a^2} + \frac{(\gamma z + \delta)^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\ [0]$$

identisch in z bestehen, also:

Die Gerade (1) *ist immer dann und nur dann eine Erzeugende der Fläche* (2), *wenn zwischen ihren vier Konstanten* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *die drei Gleichungen bestehen*[156]):

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\gamma^2}{b^2} = \frac{1}{c^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\alpha\beta}{a^2} + \frac{\gamma\delta}{b^2} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\delta^2}{b^2} = 1\ [0]. \tag{5}$$

Die bei der Darstellung (1) ausgeschlossenen Geraden, für die $z = z_0$ ist (I § 43, 7), können nicht der Fläche angehören, da jede Ebene $z = z_0$ die Fläche (2) nach § 55, 8 in einer Ellipse schneidet.

2. Erfüllung der Bedingungsgleichungen. Um den drei Gleichungen (3), (4), (5) zu genügen, kann man eine der vier Konstanten,

etwa α, beliebig nehmen und dann β, γ, δ berechnen. Da aber nach (3) $c^2\alpha^2 : a^2$ nicht größer als 1 sein kann, erhält man alle zulässigen Werte von α, wenn man:

$$\alpha = \frac{a}{c} \cos \vartheta$$

setzt und ϑ von 0 bis 2π veränderlich läßt. Dann ist nach (3):

$$\frac{c^2\gamma^2}{b^2} = \sin^2 \vartheta; \quad \gamma = \pm \frac{b}{c} \sin \vartheta.$$

Es genügt jedoch:

$$\gamma = \frac{b}{c} \sin \vartheta$$

zu nehmen, da das umgekehrte Vorzeichen von γ, bei gleichem Vorzeichen von α, schon durch den Übergang von ϑ in $2\pi - \vartheta$ erhalten wird (§ 6, (1)).

Weiter wird nach (4):

$$\frac{\beta}{a} : \frac{\delta}{b} = \frac{\gamma}{b} : -\frac{\alpha}{a} = \frac{\sin \vartheta}{c} : -\frac{\cos \vartheta}{c}$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor ε:

$$\frac{\beta}{a} = \varepsilon \sin \vartheta, \quad \frac{\delta}{b} = -\varepsilon \cos \vartheta.$$

Hiermit folgt aber aus (5):

$$\varepsilon^2 = 1\ [0]; \ \varepsilon = \pm 1\ [0].$$

Es ergeben sich daher aus (1) *alle Erzeugenden der Fläche* (2), *wenn:*

$$(6) \qquad \left| \begin{array}{ll} \alpha = \frac{a}{c} \cos \vartheta, & \beta = \varepsilon a \sin \vartheta\ [0], \\ \gamma = \frac{b}{c} \sin \vartheta, & \delta = -\varepsilon b \cos \vartheta\ [0] \end{array} \right.$$

gesetzt wird und ϑ *von* 0 *bis* 2π *veränderlich ist.*

3. Die beiden Scharen der Erzeugenden. Da ϑ von 0 bis 2π veränderlich ist, so folgt mit Substitution der Werte (6) in (1):

Auf dem einschaligen Hyperboloid:

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gibt es, den beiden Werten $\varepsilon = \pm 1$ *entsprechend, zwei Scharen von Erzeugenden*[157]*):*

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos \vartheta + \varepsilon \sin \vartheta, \\ \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin \vartheta - \varepsilon \cos \vartheta. \end{array} \right.$$

Für den Asymptotenkegel:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{9}$$

fallen diese in die einzige Schar:

$$\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\vartheta,\quad \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\vartheta \tag{10}$$

zusammen.

Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (8) folgt in der Tat wieder die Gleichung (7).

4. Gleichnamige und ungleichnamige Erzeugende. Zwei Gerade:

$$\begin{cases} x=\alpha z+\beta, \\ y=\gamma z+\delta \end{cases} \quad\text{und}\quad \begin{cases} x=\alpha' z+\beta', \\ y=\gamma' z+\delta' \end{cases}$$

schneiden sich oder schneiden sich nicht, je nachdem (I § 44, (6)):

$$\varDelta=\begin{vmatrix} \alpha-\alpha' & \beta-\beta' \\ \gamma-\gamma' & \delta-\delta' \end{vmatrix}=0 \text{ oder } \neq 0.$$

Für zwei Gerade, die den Werten ϑ und ϑ' in (6) *bei gleichem* ε entsprechen, ist nun:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} \frac{a}{c}(\cos\vartheta-\cos\vartheta') & \varepsilon a(\sin\vartheta-\sin\vartheta') \\ \frac{b}{c}(\sin\vartheta-\sin\vartheta') & -\varepsilon b(\cos\vartheta-\cos\vartheta') \end{vmatrix}$$

$$=-\varepsilon\frac{ab}{c}\{(\cos\vartheta-\cos\vartheta')^2+(\sin\vartheta-\sin\vartheta')^2\}\neq 0,$$

wenn nicht $\cos\vartheta=\cos\vartheta'$ und $\sin\vartheta=\sin\vartheta'$, also $\vartheta=\vartheta'$ bis auf Vielfache von 2π.

Für zwei Gerade, die den Werten ϑ und ϑ' *bei ungleichem* ε entsprechen, ist:

$$\varDelta=\begin{vmatrix} \frac{a}{c}(\cos\vartheta-\cos\vartheta') & \varepsilon a(\sin\vartheta+\sin\vartheta') \\ \frac{b}{c}(\sin\vartheta-\sin\vartheta') & -\varepsilon b(\cos\vartheta+\cos\vartheta') \end{vmatrix}$$

$$=-\varepsilon\frac{ab}{c}\{(\cos^2\vartheta-\cos^2\vartheta')+(\sin^2\vartheta-\sin^2\vartheta')\}=0.$$

Irgend zwei Erzeugende, die derselben Schar angehören (zwei gleichnamige), schneiden sich niemals; irgend zwei Erzeugende, die verschiedenen Scharen angehören (zwei ungleichnamige), schneiden sich stets.[158])

5. Die Richtungskosinus der Erzeugenden. Die Richtungskosinus α, β, γ (α, β, γ in anderer Bedeutung wie in (6) genommen) der Er-

zeugenden (8) sowohl wie (10) entsprechen (I § 43, (14)) der Proportion:

$$(11) \qquad \alpha : \beta : \gamma = a \cos\vartheta : b \sin\vartheta : c.$$

Da sie unabhängig von ε sind, folgt:

Je zwei ungleichnamige Erzeugende des Hyperboloids (7), *die zu demselben ϑ gehören, sind parallel (haben einen unendlich fernen Schnittpunkt) und sind auch der zu demselben ϑ gehörigen Erzeugenden des Asymptotenkegels* (9) *parallel.*[159])

Sie schneiden nach (8) die Ebene $z = 0$ in zwei gegen O *diametralen* Punkten x, y und $-x, -y$.

6. Erzeugende durch einen Punkt. Die Auflösung der Gleichungen (8) nach $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ gibt:

$$(12) \quad \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\cos\vartheta = \frac{x}{a}\frac{z}{c} - \varepsilon\frac{y}{b}, \quad \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\sin\vartheta = \frac{y}{b}\frac{z}{c} + \varepsilon\frac{x}{a}.$$

Man erhält also für jeden Punkt x, y, z, sofern er der Fläche (7) angehört, mit $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ je einen bis auf Vielfache von 2π bestimmten Wert von ϑ.

Durch jeden Punkt des Hyperboloids (7) *geht stets eine Erzeugende der einen und eine Erzeugende der andern Schar.*[158])

7. Fadenmodell des einschaligen Hyperboloids. Die Gerade (8) schneidet die der xy-Ebene parallelen Ebenen:

$$(13) \quad z = z_0 = c\frac{\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0}, \qquad (13') \quad z = -z_0 = -c\frac{\cos\vartheta_0}{\sin\vartheta_0},$$

wo ϑ_0 eine Konstante $\left(\frac{\pi}{2} > \vartheta_0 > 0\right)$ ist, in den Punkten:

$$(14) \quad \begin{cases} x = a'\cos(\vartheta - \varepsilon\vartheta_0), \\ y = b'\sin(\vartheta - \varepsilon\vartheta_0), \end{cases} \qquad (14') \quad \begin{cases} x = a'\cos(\vartheta + \varepsilon\vartheta_0 + \pi), \\ y = b'\sin(\vartheta + \varepsilon\vartheta_0 + \pi), \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(15) \qquad a' = a : \sin\vartheta_0, \quad b' = b : \sin\vartheta_0.$$

Führt man daher statt ϑ einen neuen laufenden Parameter η ein mit:

$$(16) \qquad \vartheta = \eta + \vartheta_0,$$

so folgt:

Die Erzeugende η, $\varepsilon = 1$ schneidet die Ebenen $z = z_0$ und $z = -z_0$ in den Punkten:

$$(17) \quad \begin{cases} x = a'\cos\eta, \\ y = b'\sin\eta, \end{cases} \qquad (17') \quad \begin{cases} x = a'\cos(\eta + 2\vartheta_0 + \pi), \\ y = b'\sin(\eta + 2\vartheta_0 + \pi), \end{cases}$$

und die Erzeugende η, $\varepsilon = -1$ schneidet diese Ebenen in den Punkten:

$$(18) \quad \begin{cases} x = a'\cos(\eta + 2\vartheta_0), \\ y = b'\sin(\eta + 2\vartheta_0) \end{cases} \qquad (18') \quad \begin{cases} x = a'\cos(\eta + \pi), \\ y = b'\sin(\eta + \pi). \end{cases}$$

Die Koordinaten x, y eines Punktes der Ebene $z = z_0$ können dabei auf das *ebene*, von $O' = 0, 0, z_0$ ausgehende und mit Oxy parallele System bezogen werden.

Dann stellen die Gleichungen (17) nach § 6, (1) eine Ellipse mit den Halbachsen (15) dar. Beschreibt man über deren großer Achse einen Kreis, und sind $a' = O'R$, η die Polarkoordinaten eines Punktes R *des Kreises*, so liegt (Fig. 153) der dem Parameter η entsprechende Punkt (17), P, der Ellipse *auf der Ordinate von* R.

Die n Erzeugenden $\eta = h\frac{2\pi}{n}$, $\varepsilon = 1$ $(h = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ treffen also die Ellipse (17) der Ebene $z = z_0$ in denjenigen n Punkten P, die auf den Ordinaten der n äquidistanten Punkte $R = a'$, $\eta = h\frac{2\pi}{n}$ des Kreises liegen. Sie treffen ferner die kongruente Ellipse (17′) der Ebene $z = -z_0$ in denjenigen n Punkten P, die auf den Ordinaten der Punkte $R = a'$, $\eta + 2\vartheta_0 + \pi$ des zugehörigen Kreises liegen. Ebenso treffen die n Erzeugenden $\eta = h\frac{2\pi}{n}$, $\varepsilon = -1$ der andern Schar nach (18) und (18′) die nämlichen Ellipsen der beiden Ebenen $z = z_0$ und $z = -z_0$ in denjenigen Punkten, die auf den Ordinaten der Punkte $a', \eta + 2\vartheta_0$ und $a', \eta + \pi$ der Kreise liegen.

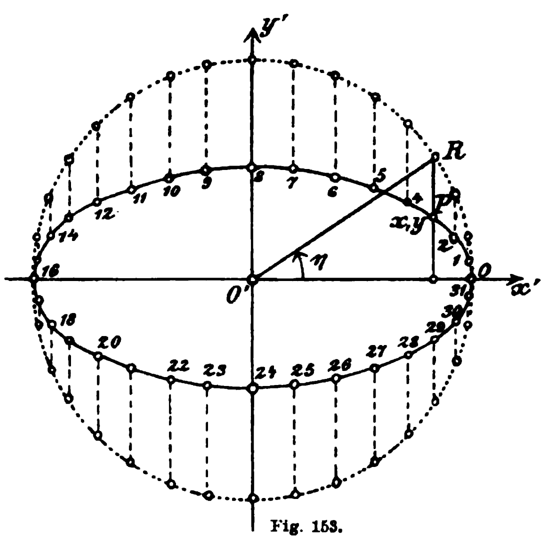


Fig. 153.

Zeichnet man umgekehrt die beiden Ellipsen mit den Halbachsen a' und b' in zwei parallel zueinander im Abstand $2z_0$ befestigten Ebenen von Holz oder Messing und verbindet die in der angegebenen Weise zusammengehörigen Punkte durch Fäden, so stellen diese je n Erzeugende der beiden Scharen dar.[160])

Dabei ist es zweckmäßig, n gerade und $2\vartheta_0$ selbst gleich einem Vielfachen von $\frac{2\pi}{n}$ zu nehmen, damit die vier Wertereihen η, $\eta + 2\vartheta_0$, $\eta + 2\vartheta_0 + \pi$, $\eta + \pi$ $\left(\eta = h\frac{2\pi}{n},\ h = 0, 1, 2, \ldots, n-1\right)$ je in ihrer Gesamtheit dieselben werden. Man erhält dann auf den beiden Ellipsen $z = z_0$ und $z = -z_0$ dieselben Teilpunkte und kann jeden Teilpunkt

zweimal benutzen, für eine Erzeugende der einen und eine der andern Schar.

Wählt man etwa $n = 32$ und $\vartheta_0 = \frac{\pi}{4}$, also:

$$z_0 = c, \quad a' = a\sqrt{2}, \quad b' = b\sqrt{2}, \tag{19}$$

und numeriert in beiden Ellipsen $z = c$ und $z = -c$ die senkrecht übereinander liegenden Punkte P (Fig. 153 und 154) gleichnamig mit $0, 1, 2, \ldots, 31$, so verbinden die Erzeugenden der Schar $\varepsilon = 1$

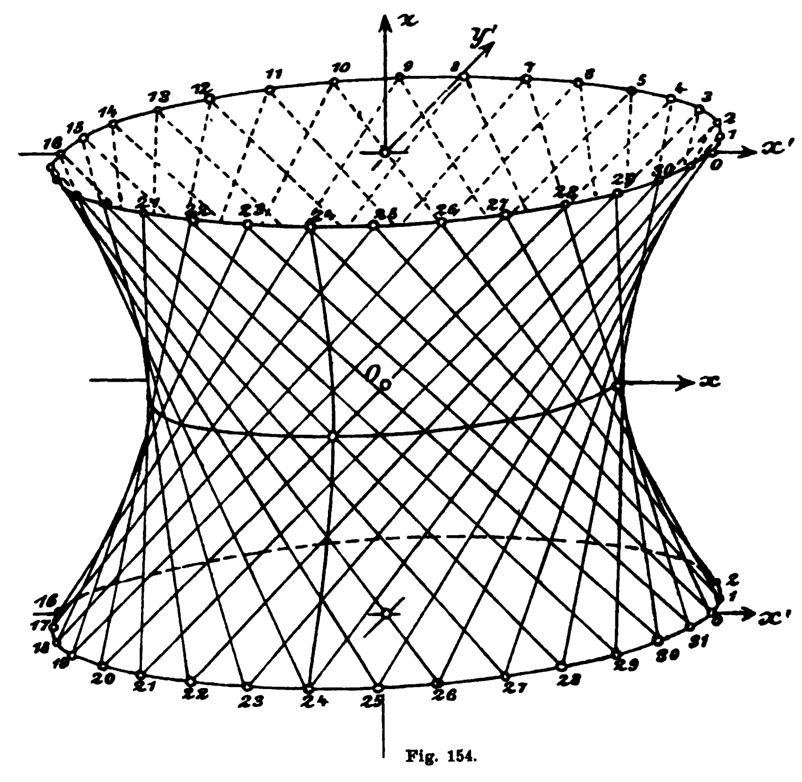


Fig. 154.

die Punkte $0, 1, 2, \ldots, 31$ der oberen Ellipse (Fig. 154) mit den Punkten $24, 25, 26, \ldots, 23$ der unteren und die Erzeugenden $\varepsilon = -1$ die Punkte $8, 9, 10, \ldots, 7$ der oberen mit den Punkten $16, 17, 18, \ldots, 15$ der unteren.

Die Erzeugende $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon = 1$ des Hyperboloids (7), welche nach (8) die Gleichungen hat:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z}{c} + 1\right), \quad \frac{y}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{z}{c} - 1\right), \tag{20}$$

verbindet in der Tat die Punkte:

(21) $x = a\sqrt{2},\ y = 0,\ z = c$ und $x = 0,\ y = -b\sqrt{2},\ z = -c,$

also den oberen Punkt 0 und den unteren Punkt 24 der Fig. 154. Überhaupt verbinden die acht *„Scheitelerzeugenden"* $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; $\varepsilon = \pm 1$ in (8) immer einen Scheitelpunkt der großen Achse der einen Ellipse Fig. 154 mit einem Scheitelpunkt der kleinen Achse der andern.

8. Andere Darstellung der Erzeugenden. Die Gleichung (7) kann als Resultat der Elimination von λ aus den beiden Gleichungen[157]):

$$(22)\qquad \begin{cases} \left(-\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - \lambda\left(\frac{y}{b} - \varepsilon\right) = 0, \\ \left(\frac{y}{b} + \varepsilon\right) - \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

gelten, wo $\varepsilon = \pm 1$ sein kann. Diese stellen daher bei veränderlichem λ und für jeden der beiden Werte ε eine Schar von Geraden dar, die ganz auf der Fläche (7) liegen.

Durch Auflösen der Gleichungen (22) ergibt sich:

$$(23)\qquad \begin{cases} (1 + \lambda^2)\frac{x}{a} = (1 - \lambda^2)\frac{z}{c} + 2\varepsilon\lambda, \\ (1 + \lambda^2)\frac{y}{b} = 2\lambda\frac{z}{c} - \varepsilon(1 - \lambda^2). \end{cases}$$

Daraus gehen aber mit:

$$(24)\qquad \lambda = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2};\quad \vartheta = 2\operatorname{arctg}\lambda$$

wieder die Gleichungen (8) hervor.

Die beiden Scharen der Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids (7) *können sowohl durch die Gleichungen* (8) *als durch die Gleichungen* (22) *dargestellt werden.*

Die Parameter λ und ϑ stehen dabei, und zwar ϑ bis auf Vielfache von 2π, in der wechselseitig eindeutigen Beziehung (24).

9. Schnittpunkt zweier ungleichnamiger Erzeugenden. Die Erzeugende (22) wird nach 4 von der ungleichnamigen:

$$(22')\qquad \begin{cases} \left(-\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) - \lambda'\left(\frac{y}{b} + \varepsilon\right) = 0, \\ \left(\frac{y}{b} - \varepsilon\right) - \lambda'\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

geschnitten. Für den Schnittpunkt folgt aus (22) und (22') mit einem Faktor ϱ:

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2\varrho,\qquad \frac{y}{b} + \varepsilon = 2\varrho\lambda,$$

$$-\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 2\varrho\lambda\lambda',\qquad \frac{y}{b} - \varepsilon = 2\varrho\lambda'$$

und daraus weiter:

$$\frac{x}{a} = \varrho(1 - \lambda\lambda'), \quad \frac{y}{b} = \varrho(\lambda + \lambda'),$$

$$\frac{z}{c} = \varrho(1 + \lambda\lambda'), \quad \varepsilon = \varrho(\lambda - \lambda').$$

Der Schnittpunkt der beiden ungleichnamigen Erzeugenden λ, ε und $\lambda', -\varepsilon$ hat also die Koordinaten[161]*):*

$$(25) \qquad x = \varepsilon a \frac{1 - \lambda\lambda'}{\lambda - \lambda'}, \quad y = \varepsilon b \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda - \lambda'}, \quad z = \varepsilon c \frac{1 + \lambda\lambda'}{\lambda - \lambda'}$$

oder homogen geschrieben:

$$(26) \quad x : y : z : t = a(1 - \lambda\lambda') : b(\lambda + \lambda') : c(1 + \lambda\lambda') : \varepsilon(\lambda - \lambda').$$

Mit $\lambda' = \lambda$ ergibt sich hieraus der Schnittpunkt der beiden nach 5 parallelen *Erzeugenden* λ, ε und $\lambda, -\varepsilon$. Diese haben daher (I § 47, 7) *die Richtungskosinus:*

$$(27) \qquad \alpha = a \cdot \frac{1 - \lambda^2}{l}, \quad \beta = b \cdot \frac{2\lambda}{l}, \quad \gamma = c \cdot \frac{1 + \lambda^2}{l},$$

wo unter willkürlicher Annahme der Pfeilspitze:

$$(28) \quad \begin{cases} l = \sqrt{a^2(1 - \lambda^2)^2 + b^2 \cdot 4\lambda^2 + c^2(1 + \lambda^2)^2} \\ \quad = \sqrt{(a^2 + c^2)(1 + \lambda^2)^2 - 4(a^2 - b^2)\lambda^2}. \end{cases}$$

Bei festem λ und laufendem λ' stellen die Gleichungen (25) oder (26) die Erzeugende λ, ε als Punktreihe dar, indem der laufende Punkt P der Erzeugenden λ, ε durch den Parameter λ' der ungleichnamigen Erzeugenden $\lambda', -\varepsilon$ bestimmt wird, die durch ihn geht (Fig. 155). Dem Werte $\lambda' = 0$ entspricht der Punkt:

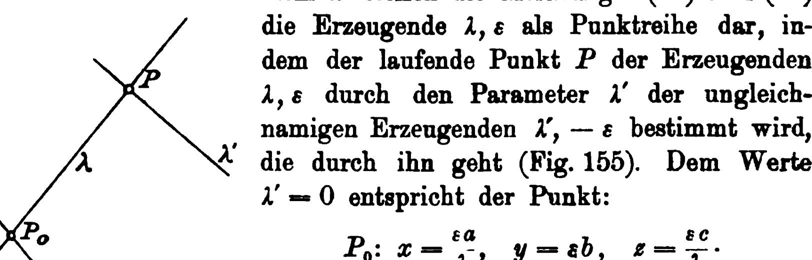
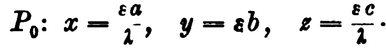


Fig. 155.



$$P_0\colon \; x = \frac{\varepsilon a}{\lambda}, \quad y = \varepsilon b, \quad z = \frac{\varepsilon c}{\lambda}.$$

10. Projektive Punktreihen auf den Erzeugenden. *Die Gleichung des Schnittpunktes* der festen Erzeugenden λ, ε mit der laufenden $\lambda', -\varepsilon$ lautet nach (26) in Ebenenkoordinaten u, v, w, s (I § 47, (4')):

$$(29) \quad a(1 - \lambda\lambda')u + b(\lambda + \lambda')v + c(1 + \lambda\lambda')w + \varepsilon(\lambda - \lambda')s = 0.$$

Daher sind:

$$(30) \quad \begin{cases} (au + b\lambda v + cw + \varepsilon\lambda s) - \lambda'(a\lambda u - bv - c\lambda w + \varepsilon s) = 0, \\ (au + b\lambda_1 v + cw + \varepsilon\lambda_1 s) - \lambda'(a\lambda_1 u - bv - c\lambda_1 w + \varepsilon s) = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der *beiden Punktreihen* (I § 46, (3)), welche auf den

gleichnamigen festen Erzeugenden λ, ε und λ_1, ε von der ungleichnamigen laufenden Erzeugenden $\lambda', -\varepsilon$ ausgeschnitten werden (Fig. 156). Nach der Form der Gleichungen (30) (I § 66, 4 und (10)) sind die Punktreihen projektiv, also[182]):

Irgend zwei Erzeugende der einen Schar werden von denen der andern in projektiven Punktreihen geschnitten (Fig. 156).

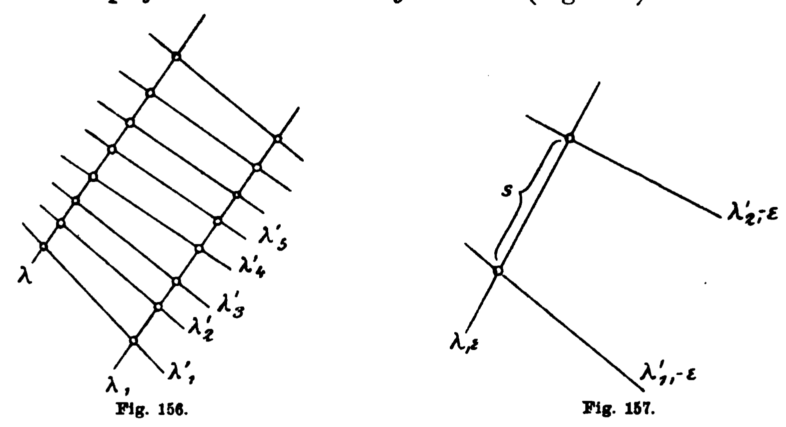


Fig. 156. Fig. 157.

11. Länge auf einer Erzeugenden. Auf der Erzeugenden λ, ε, die in (25) durch den Parameter λ' dargestellt ist, seien zwei Punkte λ_1' und λ_2' (Fig. 157) herausgegriffen. Die Differenzen der gleichnamigen Koordinaten dieser Punkte sind:

$$\varepsilon a\left(\frac{1-\lambda\lambda_2'}{\lambda-\lambda_2'}-\frac{1-\lambda\lambda_1'}{\lambda-\lambda_1'}\right)=\varepsilon a\,\frac{(\lambda_2'-\lambda_1')(1-\lambda^2)}{(\lambda-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')},$$

$$\varepsilon b\,\frac{(\lambda_2'-\lambda_1')2\lambda}{(\lambda-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')},\qquad \varepsilon c\,\frac{(\lambda_2'-\lambda_1')(1+\lambda^2)}{(\lambda-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')}.$$

Für das Quadrat der Entfernung s der beiden Punkte ist daher (I § 34, (7)):

$$s^2=\frac{(\lambda_2'-\lambda_1')^2\{a^2(1-\lambda^2)^2+b^2\cdot 4\lambda^2+c^2(1+\lambda^2)^2\}}{(\lambda-\lambda_1')^2(\lambda-\lambda_2')^2}$$

oder mit Rücksicht auf (28):

$$s=\frac{(\lambda_2'-\lambda_1')l}{(\lambda-\lambda_1')(\lambda-\lambda_2')}. \tag{31}$$

Die Entfernung s zweier Punkte einer Erzeugenden λ, ε, die von zwei Erzeugenden $\lambda_1', -\varepsilon$ und $\lambda_2', -\varepsilon$ ausgeschnitten werden, ist nur von den Parametern $\lambda, \lambda_1', \lambda_2'$ und den Konstantenverbindungen a^2+c^2 und a^2-b^2 in (28) *abhängig.*

12. Das bewegliche Modell konfokaler einschaliger Hyperboloide. Setzt man nun für *zwei Hyperboloide* (7) mit verschiedenen Konstanten a, b, c je eine Erzeugende des einen und eine Erzeugende des

andern einander entsprechend, wenn sie in den entsprechenden Darstellungen (22) der Erzeugenden zu demselben Werte des Parameters λ und zu demselben ε gehören, so sind die Strecken s (Fig. 157), die auf entsprechenden Erzeugenden λ, ε der beiden Hyperboloide von entsprechenden Erzeugenden $\lambda_1', -\varepsilon$ und $\lambda_2', -\varepsilon$ ausgeschnitten werden, *immer dann und nur dann* für alle Werte der betreffenden Parameter λ, λ' einander gleich, wenn die Konstanten $d^2 = a^2 - b^2$ und $e^2 = a^2 + c^2$ für beide Flächen dieselben, also nach § 55, (23), (6') die beiden Flächen *konfokal* sind.

Daher muß ein Gittersystem aus starren (von Draht hergestellten) Erzeugenden der beiden Arten, welche in den Gitterpunkten (Fig. 154) drehbar, aber nicht verschiebbar miteinander verschränkt sind, beweglich sein und bei der Bewegung sich selbst konfokal bleiben.[160]

13. Das aufgeschriebene Sechsseit. Der Schnittpunkt P_{12} der Erzeugenden λ_1, 1 und λ_2, -1 ist nach (29):

(32) $$a(1 - \lambda_1\lambda_2)u + b(\lambda_1 + \lambda_2)v + c(1 + \lambda_1\lambda_2)w + (\lambda_1 - \lambda_2) = 0,$$

der Schnittpunkt P_{45} der Erzeugenden λ_5, 1 und λ_4, -1 ebenso:

(33) $$a(1 - \lambda_4\lambda_5)u + b(\lambda_4 + \lambda_5)v + c(1 + \lambda_4\lambda_5)w - (\lambda_4 - \lambda_5) = 0$$

oder wie § 37, (3) abgekürzt:

(34) $$\begin{cases} U_1 = A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1\lambda_2 + D(\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \\ U_1' = A + B(\lambda_4 + \lambda_5) + C\lambda_4\lambda_5 - D(\lambda_4 - \lambda_5) = 0. \end{cases}$$

Nun ist mit den Werten § 37, (4) von ϱ_1 und ϱ_1':

(35) $$\begin{aligned} K &= \varrho_1(\lambda_1 - \lambda_2) + \varrho_1'(\lambda_4 - \lambda_5) \\ &= -\lambda_1\lambda_2(\lambda_4 - \lambda_5) - \lambda_3\lambda_4(\lambda_6 - \lambda_1) - \lambda_5\lambda_6(\lambda_2 - \lambda_3) \\ &\quad - \lambda_4\lambda_5(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_6\lambda_1(\lambda_3 - \lambda_4) - \lambda_2\lambda_3(\lambda_5 - \lambda_6) \end{aligned}$$

und daher mit der Abkürzung:

(36) $$U = AL + BM + CN + DK$$

wie § 37, (5):

(37) $$\varrho_1 U_1 - \varrho_1' U_1' = U,$$

wo L, M, N die Bedeutung § 37, (7) haben. Ebenso wird:

(37') $$\begin{cases} \varrho_2 U_2 - \varrho_2' U_2' = U, \\ \varrho_3 U_3 - \varrho_3' U_3' = U, \end{cases}$$

wenn $U_2 = 0$, $U_2' = 0$, $U_3 = 0$, $U_3' = 0$ die Gleichungen der Schnittpunkte P_{34}, P_{61}, P_{56}, P_{23} der Erzeugenden λ_3, 1 und λ_4, -1, λ_1, 1 und λ_6, -1, λ_5, 1 und λ_6, -1, λ_3, 1 und λ_2, -1 bedeuten. Die drei identischen Gleichungen (37), (37') besagen aber (I § 51, (7')),

daß die Punktepaare P_{12}, P_{45}; P_{34}, P_{61} und P_{56}, P_{23} je mit dem Punkte $U = 0$ in gerader Linie liegen.[158])

Jedes einem einschaligen Hyperboloid aufgeschriebene Sechsseit, dessen Seiten abwechselnd der einen und andern Schar der Erzeugenden angehören, hat die Eigenschaft, daß die Verbindungslinien der Gegeneckenpaare durch einen Punkt gehen (ist ein windschiefes Brianchonsches Sechsseit, vgl. § 37, **1**).

§ 64. Das gleichseitige und das orthogonale Hyperboloid.

1. Ort der Punkte mit senkrechten Erzeugenden. Auf dem einschaligen Hyperboloid [und seinem Asymptotenkegel]:

$$\text{(1)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,[0], \quad a^2 > b^2,$$

schneiden sich zwei ungleichnamige Erzeugende ϑ, ε und $\vartheta', -\varepsilon$ in § 63, (8) nach § 63, (11) senkrecht, wenn[159]):

$$\text{(2)} \qquad a^2 \cos\vartheta \cos\vartheta' + b^2 \sin\vartheta \sin\vartheta' + c^2 = 0.$$

Für ihren Schnittpunkt x, y, z ist dann nach § 63, (12):

$$a^2\left(\frac{x^2}{a^2}\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) + b^2\left(\frac{y^2}{b^2}\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) + c^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)^2$$

$$= (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right) - (a^2 + b^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + c^2\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)^2$$

$$= \left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right)\{x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 + c^2\} = 0.$$

Der Ort der Punkte des einschaligen Hyperboloids (1), *durch die zwei zueinander senkrechte Erzeugende gehen, ist der Durchschnitt des Hyperboloids mit der Kugel*[66]):

$$\text{(3)} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Da $2b$ nach § 55, 8 der kleinste Durchmesser der Fläche (1) ist, so kann diese von der Kugel (3) nicht getroffen werden, wenn $a < c$ ist. Für $a = c$ sind nur die durch die Scheitelpunkte $x, y, z = 0, b, 0$ und $0, -b, 0$ der kleinen reellen Achse (§ 55, (8')) gehenden Erzeugenden $\vartheta = 0$, $\varepsilon = -1$; $\vartheta' = \pi$, $\varepsilon = 1$ und bezüglich $\vartheta = 0$, $\varepsilon = 1$, $\vartheta = \pi$, $\varepsilon = -1$ zueinander senkrecht. Erst für $a > c$ gibt es zu einer Erzeugenden, falls sie die Kugel (3) in zwei Punkten schneidet, in jedem Schnittpunkt eine senkrechte Erzeugende der andern Schar, also *zwei* solche.

2. Zwei gleichnamige zueinander senkrechte Erzeugende. Wenn es zu einer Erzeugenden λ, ε in § 63, (22) eine *ungleichnamige* senk-

rechte Erzeugende $\lambda', -\varepsilon$ gibt, so ist nach § 63, (27) auch die *gleichnamige* λ', ε zu ihr senkrecht. *Die Bedingung für zwei gleichnamige senkrechte Erzeugende λ, ε und λ', ε lautet* nach § 63, (27), und zwar nach § 63, (24) übereinstimmend mit (2):

$$(4) \qquad a^2(1-\lambda^2)(1-\lambda'^2) + 4b^2\lambda\lambda' + c^2(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2) = 0.$$

Dies gibt bei gegebenem λ, entsprechend der Schlußbemerkung von **1**, eine *quadratische* Gleichung für λ':

$$(5) \quad \{c^2(1+\lambda^2) - a^2(1-\lambda^2)\}\lambda'^2 + 4b^2\lambda\lambda' + \{c^2(1+\lambda^2) + a^2(1-\lambda^2)\} = 0$$

mit der Diskriminante:

$$\begin{aligned} D &= 4b^4\lambda^2 - \{c^4(1+\lambda^2)^2 - a^4(1-\lambda^2)^2\} \\ &= (a^4 - c^4)(1-\lambda^2)^2 + 4(b^4 - c^4)\lambda^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt im Anschluß an das bereits zu (3) Bemerkte:

Für $c > a > b$ gibt es zu keiner Erzeugenden λ eine senkrechte; für $c = a > b$ nur zu $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ (§ 63, (24)) *eine einzige gleichnamige senkrechte; für $a > c > b$ zu den Erzeugenden λ, bei denen $D > 0$ ist, zwei; und erst für $a > b > c$ zu jeder Erzeugenden λ zwei gleichnamige senkrechte.*

3. Drei zueinander senkrechte Erzeugende. Sind $\lambda' = \lambda_1$ und $\lambda' = \lambda_2$ die beiden Wurzeln der Gleichung (5), so ist:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -4b^2\lambda : \{c^2(1+\lambda^2) - a^2(1-\lambda^2)\}, \\ \lambda_1\lambda_2 &= \{c^2(1+\lambda^2) + a^2(1-\lambda^2)\} : \{c^2(1+\lambda^2) - a^2(1-\lambda^2)\}. \end{aligned}$$

Damit nimmt die Bedingung, daß *die beiden zu λ senkrechten Erzeugenden λ_1 und λ_2 auch ihrerseits untereinander senkrecht sind,* nämlich nach (4):

$$a^2(1-\lambda_1^2)(1-\lambda_2^2) + 4b^2\lambda_1\lambda_2 + c^2(1+\lambda_1^2)(1+\lambda_2^2) = 0,$$

die Form an:

$$\begin{aligned} (a^2+c^2)\{c^2(1+\lambda^2) - a^2(1-\lambda^2)\}^2 + 16b^4(c^2-a^2)\lambda^2 \\ + (a^2+c^2)\{c^2(1+\lambda^2) + a^2(1-\lambda^2)\}^2 \\ + 2(2b^2 + (a^2-c^2))\{c^4(1+\lambda^2)^2 - a^4(1-\lambda^2)^2\} = 0, \end{aligned}$$

oder durch einfache Umformungen zusammengezogen:

$$(7) \qquad 4(b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2)\{(a^2+c^2)(1-\lambda^2)^2 + 4(b^2+c^2)\lambda^2\} = 0.$$

Diese Bedingung ist entweder für *kein* λ oder für *alle* λ erfüllt, je nachdem $b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2 \neq 0$ oder $= 0$; im letzteren Falle ist auch, wie am Schluß von **2**:

$$c^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}\,b^2 < b^2 < a^2.$$

Das einschalige Hyperboloid und der elliptische Kegel (1) *haben zu keiner oder zu jeder Erzeugenden* λ, ε *zwei zu dieser und unter sich senkrechte Erzeugende* λ_1, ε *und* λ_2, ε, *je nachdem:*

$$(8) \qquad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2} \neq 0 \quad \text{oder} = 0.$$

4. Gleichseitige Hyperboloide und Kegel. Im letzteren Falle werden die Flächen als *gleichseitiges einschaliges Hyperboloid* und *gleichseitiger Kegel* bezeichnet.[164])

Ist zugleich $a^2 = b^2$, so erhält man in:

$$(9) \qquad \frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{2z^2}{a^2} = 1(0)$$

das *gleichseitige einschalige Rotationshyperboloid* oder den *gleichseitigen Rotationskegel.*

Obwohl es keine geraden Linien enthält, wird auch das *zweischalige Hyperboloid:*

$$(10) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b^2 < c^2,$$

gleichseitig genannt, wenn sein *Asymptotenkegel:*

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gleichseitig ist, also:

$$(12) \qquad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Wegen der Symmetrie der Bedingungen (8) in a^2 und b^2, sowie (12) in b^2 und c^2, sind die Voraussetzungen $a^2 > b^2$ in (1) und $b^2 < c^2$ in (10) für den Charakter der Gleichseitigkeit nicht wesentlich.

5. Kreisschnittebenen senkrecht zu einer Erzeugenden. Eine Hauptkreisschnittebene des einschaligen Hyperboloids oder Kegels (1) hat unter der Voraussetzung $a^2 > b^2$ nach § 59, (21) die Gleichung:

$$(13) \qquad \sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{y}{b} + \delta\sqrt{a^2+c^2}\cdot\frac{z}{c} = 0, \quad \delta = \pm 1.$$

Die Richtungskosinus ihrer Normale verhalten sich (I § 41, (5)), wie:

$$(14) \qquad O : \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} : \delta\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c}$$

und stimmen daher mit den Richtungskosinus § 63, (11) einer Erzeugenden ϑ überein, wenn $\cos\vartheta = 0$, $\sin\vartheta = \delta$ und überdies:

$$(15) \qquad \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} : \delta\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \delta b : c$$

oder

$$(a^2-b^2)\frac{c^2}{b^2}=(a^2+c^2)\frac{b^2}{c^2};\quad a^2(b^4-c^4)+b^2c^2(b^2+c^2)=0;$$

$$b^2c^2-c^2a^2+a^2b^2=0,$$

oder endlich:

(16) $$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0.$$

Den Werten $\cos\vartheta=0$, $\sin\vartheta=\delta$ oder $\vartheta=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ entsprechen beim *Hyperboloid* nach § 63, (8) *die vier Erzeugenden:*

(17) $$\frac{x}{a}=\varepsilon\delta,\quad \frac{y}{b}=\delta\frac{z}{c},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

die durch die Scheitelpunkte der großen reellen Achse gehen; beim *Kegel* nach § 63, (10) *die beiden Erzeugenden in der Hauptebene der kleinsten Öffnung:*

(18) $$\frac{x}{a}=0,\quad \frac{y}{b}=\delta\frac{z}{c}.$$

Die einzigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids oder Kegels (1), *auf denen eine Hauptkreisschnittebene* (13) *senkrecht stehen kann, sind die vier durch die Scheitel der großen Achse gehenden Erzeugenden* (17), *bezüglich die beiden in der Hauptebene der kleinsten Öffnung liegenden* (18), *und auch diese nur unter der Bedingung* (16).

Man nennt, wenn diese Bedingung (16) erfüllt ist, *das einschalige Hyperboloid oder den Kegel* (1) *orthogonal.*[165]) Sie ist nur mit $a^2>b^2$ verträglich.

Das *zweischalige Hyperboloid* (10) mit $b^2<c^2$ heißt *orthogonal*, wenn mit (16) sein Asymptotenkegel (11) orthogonal ist.

6. Senkrechte Ebenenbüschel beim orthogonalen Hyperboloid oder Kegel. Setzt man in den Gleichungen § 63, (8) $\vartheta=\frac{\pi}{2}-\eta$ und $\varepsilon=-\varepsilon'$, so sind sie wie § 63, (23) die Auflösungen der Gleichungen:

(19) $$\begin{cases}\left(-\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)-\mu\left(\frac{x}{a}-\varepsilon'\right)=0,\\ \left(\frac{x}{a}+\varepsilon'\right)-\mu\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$$

nach $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$, falls $\mu=\operatorname{tg}\frac{\eta}{2}$ genommen wird. Die Gleichungen (19) stellen also auch die beiden Scharen der Erzeugenden der Fläche (1) dar, so zwar, daß die Erzeugende ϑ, ε in § 63, (8) mit der Erzeugenden $\eta=\frac{\pi}{2}-\vartheta$, $\varepsilon'=-\varepsilon$ in (19) identisch ist.

Die Gleichungen (19) stellen bei bestimmtem ε' zwei Ebenenbüschel E, E' dar (I § 42, (15)) mit den Achsen:

$$(20)\qquad \begin{cases} g: -\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, & \frac{x}{a} - \varepsilon' = 0; \\ g': \frac{x}{a} + \varepsilon' = 0, & \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

Entsprechende Ebenen E und E' beider Büschel, solche mit gleichem μ, verbinden die Erzeugende $h = \mu, \varepsilon'$, die ihre Durchschnittslinie $\mathsf{E} \times \mathsf{E}'$ ist, je mit einer der beiden Achsen g und g'. Diese Achsen sind aber die mit h *ungleichnamigen* von den Scheitelerzeugenden (17); sie gehen aus (19) unter *Umkehr* des Vorzeichens von ε' mit $\mu = 0$ und $\mu = \infty$ hervor.

Die Bedingung (16) bedeutet nun für die beiden Ebenen (19), daß sie für jeden Wert von μ aufeinander senkrecht stehen (I § 42 (5)). Daher folgt:

Verbindet man beim orthogonalen Hyperboloid die laufende Erzeugende der einen Schar durch zwei Ebenen mit den zwei durch die Scheitel der großen Achse gehenden Erzeugenden der andern Schar, so bleiben diese beiden Ebenen beständig aufeinander senkrecht.[162])

Setzt man in (19) $\varepsilon' = 0$ (§ 63, (10)), so erhält man in gleicher Weise den Satz:

Verbindet man beim orthogonalen Kegel die laufende Erzeugende durch zwei Ebenen mit den in der Hauptebene der kleinsten Öffnung liegenden Erzeugenden, so bleiben diese beiden Ebenen beständig aufeinander senkrecht.

7. **Erzeugnis zweier senkrechter Ebenenbüschel.** Seien jetzt irgend zwei windschiefe Gerade g und g' gegeben. Ihr kürzester Abstand AA' sei $2a$ und O dessen Mittelpunkt (Fig. 158). Legt man die x-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems in den kürzesten Abstand und wählt die y- und z-Achse in der zu AA' senkrecht durch O gelegten Ebene so, daß sie die Winkel der senkrechten Projektionen von g und g' auf diese Ebene halbieren, so haben diese Geraden die Gleichungen (20) mit $\varepsilon' = 1$. Die Gleichungen (19) aber stellen mit $\varepsilon' = 1$ zwei durch g und g' gelegte Ebenenbüschel dar, deren gleichem μ entsprechende Ebenen jedesmal eine Erzeugende des Hyperboloids (1)

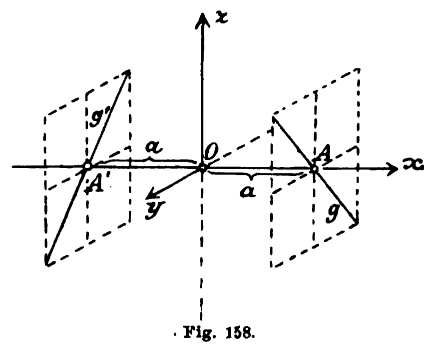


Fig. 158.

bestimmen. Sind diese Ebenen zueinander senkrecht, was unter der Bedingung (16) stattfindet, ist das Hyperboloid orthogonal. Also:

Drehen sich um zwei windschiefe Gerade zwei Ebenen derart, daß sie immer zueinander senkrecht bleiben, so beschreibt ihre Schnittlinie ein orthogonales Hyperboloid, für das die gegebenen Geraden zwei Scheitelerzeugende sind.

Schneiden sich diese Geraden, so entsteht ein orthogonaler Kegel.

§ 65. Die geraden Linien auf dem hyperbolischen Paraboloid.

1. Bedingungen einer Erzeugenden. *Das elliptische Paraboloid* § 61, (1) *kann keine reellen Geraden enthalten,* da es in der Ebene $x = -x_0$, wo $x_0 > 0$, keinen reellen Punkt enthält (§ 63, 1).

Soll die Gerade:

$$(1) \qquad y = \alpha x + \beta, \quad z = \gamma x + \delta$$

ganz auf dem *hyperbolischen Paraboloid* § 62, (1):

$$(2) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0$$

liegen, so muß identisch in x die Gleichung bestehen:

$$\frac{(\alpha x + \beta)^2}{b^2} - \frac{(\gamma x + \delta)^2}{c^2} - 2x = 0.$$

Die Gerade (1) *ist daher immer dann und nur dann eine Erzeugende der Fläche* (2), *wenn zwischen ihren vier Konstanten* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *die drei Gleichungen bestehen*[156]*):*

$$(3) \quad \frac{\alpha^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0 \qquad (4) \quad \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\delta^2}{c^2} = 0 \qquad (5) \quad \frac{\alpha\beta}{b^2} - \frac{\gamma\delta}{c^2} = 1.$$

Bei der Darstellung (1) sind solche Geraden ausgeschlossen, für die $x = x_0$ ist. Unter den Ebenen $x = x_0$ enthält aber (§ 56, 8) nur die Ebene $x = 0$ zwei Gerade der Fläche:

$$(6) \qquad \frac{y}{b} - \varepsilon \frac{z}{c} = 0, \quad x = 0; \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Sie verlaufen in der yz-Ebene, gehen durch den Scheitelpunkt O und heißen nach § 56, 8 die *beiden Scheitelerzeugenden* des Paraboloids.[7])

2. Erfüllung der Bedingungsgleichungen. Um den drei Gleichungen (3), (4), (5) zu genügen, kann man eine der vier Konstanten, etwa β, beliebig nehmen und dann α, γ, δ berechnen. Wir setzen dabei:

$$\beta = \frac{b\lambda}{2},$$

indem wir unter λ einen Parameter verstehen. Dann ist nach (4):

$$\delta = -\varepsilon \frac{c\lambda}{2}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

und damit aus (5):

$$\left(\frac{\alpha}{b} + \varepsilon \frac{\gamma}{c}\right) \frac{\lambda}{2} = 1.$$

Da aber nach (3):

$$\frac{\alpha}{b} = \varepsilon' \frac{\gamma}{c}, \quad \varepsilon' = \pm 1,$$

so wird:

$$(\varepsilon' + \varepsilon) \frac{\gamma}{c} \frac{\lambda}{2} = 1.$$

Daher ist die Annahme $\varepsilon' = -\varepsilon$ ausgeschlossen, und muß $\varepsilon' = \varepsilon$ sein, so daß:

$$\varepsilon \frac{\gamma}{c} \lambda = 1; \quad \gamma = \frac{\varepsilon c}{\lambda}; \quad \alpha = \frac{b}{\lambda}.$$

Es ergeben sich daher aus (1) *alle Erzeugenden der Fläche* (2), *wenn:*

$$(7) \qquad \alpha = \frac{b}{\lambda}, \quad \beta = b \frac{\lambda}{2}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon c}{\lambda}, \quad \delta = -\varepsilon c \frac{\lambda}{2}$$

gesetzt wird.

3. Die beiden Scharen der Erzeugenden. Durch Substitution der Werte (7) in (1) folgt für die Geraden auf der Fläche (2):

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{\lambda} + \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\varepsilon z}{c} = \frac{x}{\lambda} - \frac{\lambda}{2}$$

und durch Kombination dieser Gleichungen:

Auf dem hyperbolischen Paraboloid:

$$(8) \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0$$

gibt es, den beiden Werten $\varepsilon = 1$ *und* $\varepsilon = -1$ *entsprechend, zwei Scharen von Erzeugenden*[157]*):*

$$(9) \qquad \frac{y}{b} - \varepsilon \frac{z}{c} = \lambda, \qquad \lambda\left(\frac{y}{b} + \varepsilon \frac{z}{c}\right) = 2x,$$

oder in homogener Schreibweise:

$$(10) \qquad \frac{y}{b} - \varepsilon \frac{z}{c} = \lambda t, \qquad \lambda\left(\frac{y}{b} + \varepsilon \frac{z}{c}\right) = 2x.$$

Hier sind für $\lambda = 0$ *auch die Scheitelerzeugenden* (6) *und für* $\lambda = \infty$ *die beiden Geraden:*

$$(11) \qquad t = 0, \quad \frac{y}{b} + \varepsilon \frac{z}{c} = 0$$

eingeschlossen, in denen das Paraboloid die unendlich ferne Ebene schneidet[9]*).*

Da die durch die erste Gleichung (9) dargestellten Ebenen eine von λ unabhängige Stellung haben (I § 42, 3), so ergibt sich:

Alle Erzeugenden jeder der beiden Scharen λ, ε sind einer festen Ebene:

$$\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c} = 0, \tag{12}$$

einer Asymptotenebene (§ 62, 3), *parallel.*[159])

Diese geht durch die unendlich ferne Erzeugende der anderen Schar λ, $-\varepsilon$ in (11):

$$t = 0, \quad \frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c} = 0. \tag{13}$$

Die Gleichungen (9) sind die bereits § 62, (13); (14) gefundenen, wo nur $2\eta_0 : p$ und $2\zeta_0 : p$ für λ gesetzt war.

4. Gleichnamige und ungleichnamige Erzeugende. Nimmt man zu der Erzeugenden (10) eine gleichnamige Erzeugende:

$$\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c} = \lambda' t, \qquad \lambda'\left(\frac{y}{b} + \varepsilon\frac{z}{c}\right) = 2x, \tag{10'}$$

so ist die Determinante der Koeffizienten von $2x$, y, z, t in den vier Gleichungen (10) und (10'):

$$2\,\frac{\varepsilon(\lambda - \lambda')^2}{bc} \neq 0.$$

Zwei Erzeugende, die derselben Schar angehören (zwei gleichnamige Erzeugende) schneiden sich also niemals.

Dagegen schneiden sich die Gerade (10) und die Gerade:

$$\frac{y}{b} + \varepsilon\frac{z}{c} = \lambda' t, \qquad \lambda'\left(\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c}\right) = 2x \tag{10''}$$

im Punkte:

$$x : y : z : t = \frac{1}{2}\lambda\lambda' : \frac{b}{2}(\lambda + \lambda') : \frac{\varepsilon c}{2}(\lambda' - \lambda) : 1. \tag{14}$$

Zwei Erzeugende, die verschiedenen Scharen (10) *angehören, schneiden sich stets.*[158])

5. Endlicher Schnittpunkt von zwei ungleichnamigen Erzeugenden. Aus (14) folgt sodann mit Übergang zu nicht homogenen Koordinaten[161]):

Der Schnittpunkt der beiden ungleichnamigen Geraden λ, ε und *λ', $-\varepsilon$* ist:

$$x = \frac{1}{2}\lambda\lambda', \quad y = \frac{b}{2}(\lambda + \lambda'), \quad z = \frac{\varepsilon c}{2}(\lambda' - \lambda). \tag{15}$$

6. Unendlich ferner Schnittpunkt von zwei ungleichnamigen Erzeugenden. Jede endliche Erzeugende λ, ε schneidet die ungleichnamige unendlich ferne Erzeugende $\lambda' = \infty$, $-\varepsilon$. Für den Schnitt-

punkt folgt aus (14), indem rechts durch λ' dividiert und dann $\lambda' = \infty$ gesetzt wird:

Die Erzeugende λ, ε schneidet die ungleichnamige unendlich ferne Erzeugende (13) *im Punkte:*

$$(16) \qquad x : y : z : t = \lambda : b : \varepsilon c : 0.$$

Daher sind die Richtungskosinus α, β, γ der Erzeugenden λ, ε (I § 47, 7):

$$(17) \qquad \alpha = \frac{\lambda}{l}, \quad \beta = \frac{b}{l}, \quad \gamma = \frac{\varepsilon c}{l}, \quad l = \delta\sqrt{b^2 + c^2 + \lambda^2},$$

wo wir mit:

$$(18) \qquad \delta = \text{sign.}\, \lambda$$

die Pfeilspitze der Erzeugenden so wählen, daß sie mit der x-Achse einen spitzen Winkel bildet ($\alpha > 0$).

7. Erzeugende durch einen Punkt der Fläche. Bei gegebenem Punkte x, y, t der Fläche (8) und gegebenem $\varepsilon = +1$ oder -1 bestimmt jede der Gleichungen (9) den Wert λ, und zwar wegen (8) beide denselben Wert.

Durch jeden gegebenen Punkt der Fläche geht je eine Erzeugende aus jeder der beiden Scharen.[158])

8. Parameterdarstellung der Erzeugenden. Die Gleichungen (15) stellen bei festem λ und laufendem λ' die Erzeugende λ, ε in dem Sinne dar, daß der laufende Punkt der Erzeugenden λ, ε durch den Parameter λ' der ungleichnamigen Erzeugenden $\lambda', -\varepsilon$ bestimmt wird, die durch ihn geht. Der Scheitelerzeugenden $\lambda' = 0, -\varepsilon$ entspricht dabei der Punkt:

$$(19) \qquad A : x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{b\lambda}{2}, \quad z_0 = -\frac{\varepsilon c \lambda}{2}.$$

Mittels dieses Punktes (19) und der Richtungkosinus (17) kann aber die Erzeugende λ, ε auch in der Form (I § 43, (2)):

$$(20) \qquad x = \frac{\lambda s}{l}, \quad y = \frac{b\lambda}{2} + \frac{b}{l}s, \quad z = -\frac{\varepsilon c \lambda}{2} + \frac{\varepsilon c}{l}s$$

dargestellt werden, wo $s = AP$ die Länge vom Punkte A bis zu dem laufenden Punkte P ist. Der Vergleich der beiden Parameterdarstellungen (15) und (20) derselben Punktreihe λ, ε zeigt aber, daß die Parameter λ' und s in der Beziehung stehen:

$$(21) \qquad s = \frac{1}{2} l \lambda', \quad \lambda' = \frac{2s}{l}; \quad l = \delta\sqrt{b^2 + c^2 + \lambda^2}.$$

Der Parameter λ' des laufenden Punktes P der Erzeugenden λ, ε ist daher bis auf den nur von λ selbst abhängigen Faktor $\frac{l}{2}$ die ge-

meine Koordinate $s = AP$ (I § 1, (4)) *auf der Erzeugenden, gerechnet von ihrem Schnittpunkt* A *mit der yz-Ebene* (Fig. 159).

9. Ähnliche Punktreihen auf den Erzeugenden. Auf zwei Erzeugenden λ_1, ε und λ_2, ε der einen Schar *„entsprechen sich" gegenseitig zwei solche Punkte* P_1 *und* P_2, *die auf derselben Erzeugenden* $\lambda', -\varepsilon$ *der anderen Schar liegen,* also gleiche Parameter λ' haben. Ihre gemeinen Koordinaten (Fig. 160):

$$s_1 = A_1 P_1 = \tfrac{1}{2} l_1 \lambda', \quad s_2 = A_2 P_2 = \tfrac{1}{2} l_2 \lambda' \tag{22}$$

stehen also in der Beziehung:

$$s_1 : s_2 = l_1 : l_2, \tag{23}$$

also in einem von λ' unabhängigen Verhältnis. Dasselbe gilt daher überhaupt von entsprechenden Strecken (I § 1, (5)). Es folgt also[167]):

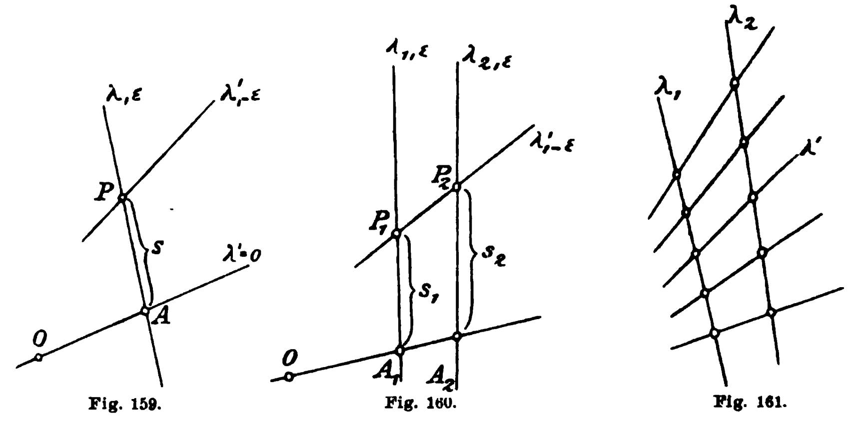


Fig. 159. Fig. 160. Fig. 161.

I. *Irgend zwei Erzeugende der einen Schar werden von den Erzeugenden der anderen Schar in ähnlichen Punktreihen geschnitten* (Fig. 161).

Für $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = -\lambda$ wird nach (17); (18) auch $l_1 = -l_2$, also nach (22) $s_1 = -s_2$. Es folgt daher:

II. *Zwei Erzeugende* λ *und* $-\lambda$ *einer Schar werden von den Erzeugenden der anderen Schar in kongruenten Punktreihen geschnitten.*

Der Satz I folgt auch aus der Form der Gleichungen der beiden Punktreihen, in denen die Erzeugenden λ_1, ε und λ_2, ε von der Erzeugenden $\lambda, -\varepsilon$ geschnitten werden, nämlich nach (14):

$$\begin{cases} (b\lambda_1 v - \varepsilon c \lambda_1 w + 2s) + \lambda(\lambda_1 u + bv + \varepsilon c w) = 0, \\ (b\lambda_2 v - \varepsilon c \lambda_2 w + 2s) + \lambda(\lambda_2 u + bv + \varepsilon c w) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Diese Punktreihen sind projektiv ähnlich, weil die unendlich fernen Punkte beider sich entsprechen (§ 13, **19**).

10. Gleichseitiges Viereck von Erzeugenden. Zu gleichen absoluten Werten von $\lambda (\lambda > 0)$ gehören vier Erzeugende:

$$(25) \quad e_1 = \lambda, +1; \quad e_2 = \lambda, -1; \quad e_3 = -\lambda, +1; \quad e_4 = -\lambda, -1.$$

Sie schneiden die Ebene $x = 0$ nach (19) in den Punkten:

$$(26) \quad \begin{aligned} A_1 &= 0, \frac{b\lambda}{2}, -\frac{c\lambda}{2}; \quad A_2 = 0, \frac{b\lambda}{2}, \frac{c\lambda}{2}, \\ A_3 &= 0, -\frac{b\lambda}{2}, \frac{c\lambda}{2}; \quad A_4 = 0, -\frac{b\lambda}{2}, -\frac{c\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte x, y, z je zweier ungleichnamiger von den Erzeugenden (25) sind nach (15):

$$(27) \quad \begin{cases} E_1 = e_1 \times e_2 = \frac{1}{2}\lambda^2, b\lambda, 0; & E_2 = e_3 \times e_4 = \frac{1}{2}\lambda^2, -b\lambda, 0; \\ E_3 = e_3 \times e_2 = -\frac{1}{2}\lambda^2, 0, c\lambda; & E_4 = e_1 \times e_4 = -\frac{1}{2}\lambda^2, 0, -c\lambda. \end{cases}$$

Vier zusammengehörige Erzeugende $\pm\lambda, \pm 1$ *bilden daher ein räumliches Viereck* $E_1 E_2 E_3 E_4$, *von dessen vier Ecken zwei in der xy- und zwei in der xz-Ebene liegen* (Fig. 162).

Da nach (21) auf jeder der vier Erzeugenden die Länge von ihrem Schnittpunkt (26) mit der yz-Ebene bis zu jedem ihrer beiden Endpunkte (27): $\pm \frac{1}{2} l\lambda$ ist, so folgt:

Die vier Kanten des Vierecks $E_1 E_2 E_3 E_4$ *haben die gemeinsame Länge:*

$$(28) \quad d = l\lambda = \sqrt{b^2 + c^2 + \lambda^2} \cdot \lambda.$$

Jedem Werte λ entspricht ein solches gleichseitiges Viereck mit der Seitenlänge d. Umgekehrt gehört auch *zu jeder gegebenen Seitenlänge* d ein solches Viereck, da aus (28) folgt:

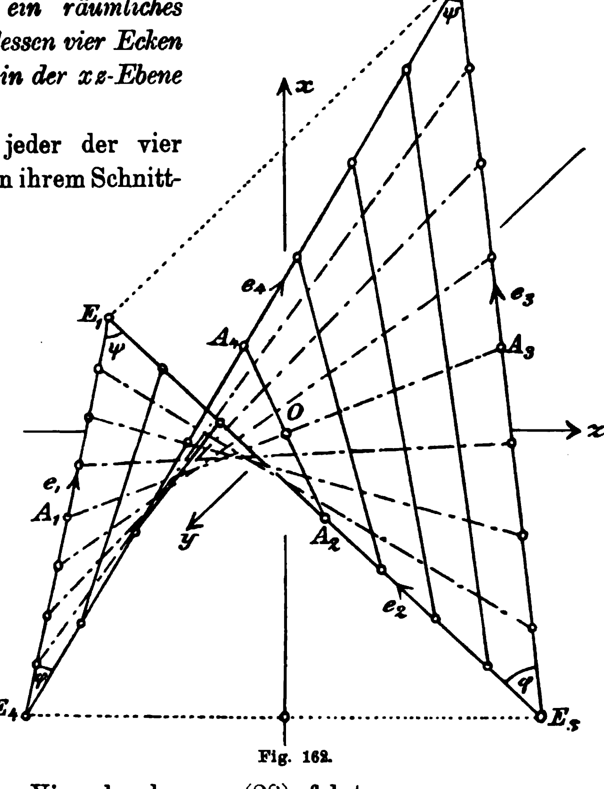


Fig. 162.

$$(29) \quad \lambda^2 = -\frac{b^2 + c^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2 + c^2}{2}\right)^2 + d^2}.$$

11. Fadenmodell des hyperbolischen Paraboloids. Nach 9, II werden die gleichnamigen Seiten e_1 und e_3 in (25) von allen Erzeugenden der Schar $\varepsilon = -1$ und ebenso e_2 und e_4 von allen Erzeugenden der Schar $\varepsilon = +1$ je in kongruenten Punktreihen geschnitten.

Konstruiert man daher das gleichseitige Viereck $E_1E_2E_3E_4$ als festes Drahtgestell, teilt die Seiten in je n gleiche Teile und verbindet die Teilpunkte (Fig. 162) der gegenüberliegenden Seiten durch Fäden, so erhält man ein Fadenmodell der Fläche (8), soweit sie innerhalb des Vierecks liegt.[160])

12. Die Winkel des gleichseitigen Vierecks. Die Richtungskosinus des Seiten des Vierecks $E_1E_2E_3E_4$ sind nach (17); (18) bei *positivem* l:

$$(30)\qquad \begin{aligned} e_1 &= \frac{\lambda}{l},\ \frac{b}{l},\ \frac{c}{l};\quad e_2 = \frac{\lambda}{l},\ \frac{b}{l},\ -\frac{c}{l};\\ e_3 &= \frac{\lambda}{l},\ -\frac{b}{l},\ -\frac{c}{l};\quad e_4 = \frac{\lambda}{l},\ -\frac{b}{l},\ \frac{c}{l}. \end{aligned}$$

Für die Winkel:

$$(31)\qquad \varphi = e_2e_3 = e_1e_4,\quad \psi = e_1e_2 = e_3e_4$$

zweier in der xz-, bezüglich xy-Ebene sich schneidender Seiten ist nach (30):

$$(32)\qquad \cos\varphi = \frac{\lambda^2 - b^2 + c^2}{\lambda^2 + b^2 + c^2},\quad \cos\psi = \frac{\lambda^2 + b^2 - c^2}{\lambda^2 + b^2 + c^2}$$

und weiter mit Benutzung von (21):

$$(33)\qquad \sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{2} = \frac{b^2}{l^2},\quad \sin^2\frac{\psi}{2} = \frac{c^2}{l^2}.$$

Die paarweise gleichen Winkel φ und ψ des Vierecks $E_1E_2E_3E_4$ sind mittels (32) *oder* (33) *durch die Konstanten b^2 und c^2 der Fläche* (8) *und den Parameter λ dargestellt.*

Durch Verbindung der Formeln (33) folgt auch:

$$(34)\qquad 1 - \sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2} = \frac{\lambda^2}{l^2}.$$

13. Darstellung der Konstanten der Flächen durch die Winkel des Vierecks. Durch Elimination von l^2 aus (28) und (34) erhält man:

$$(35)\qquad \lambda^2 = d\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\psi}{2}}.$$

Da aber nach (33) und (28):

$$(36)\qquad b^2 = \frac{d^2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\lambda^2},\quad c^2 = \frac{d^2\sin^2\frac{\psi}{2}}{\lambda^2},$$

so folgt:

Die Konstanten b^2 und c^2 der Gleichung (8) *hängen von der Seitenlänge d und den Winkeln φ und ψ des Vierecks in der Weise* (36) *ab, wo für λ^2 der Wert* (35) *zu setzen ist.*

Da eine gegebene Länge d nach (29) auf jeder Fläche (8) vorkommt, so kann man für das Viereck $E_1 E_2 E_3 E_4$ (Fig. 162) bei beliebig angenommener Seitenlänge d die beiden Winkel φ und ψ willkürlich wählen. Das Modell (Fig. 162) stellt bei jeder Wahl ein hyperbolisches Paraboloid (8) mit den Konstanten (36) dar.

14. Das bewegliche Modell konfokaler hyperbolischer Paraboloide. Da die Länge s in (21) nur von $b^2 + c^2$ abhängt (§ 56, (27)), so folgt ebenso wie in § 63, 12, daß die Fläche (Fig. 162) beweglich und sich selbst konfokal bleibt, wenn man sie aus starren Erzeugenden herstellt, die in den Gitterpunkten drehbar miteinander verschränkt sind.[160])

15. Zwei zueinander senkrechte Erzeugende. Die Bedingung, daß zwei gleichnamige Erzeugende λ, ε und λ', ε oder zwei ungleichnamige λ, ε und $\lambda'', -\varepsilon$ zueinander senkrecht sind, lautet nach (17) bezüglich:

$$(37)\qquad \lambda\lambda' + b^2 + c^2 = 0 \qquad\qquad (38)\qquad \lambda\lambda'' + b^2 - c^2 = 0.$$

I. *Zu jeder Erzeugenden λ, ε gibt es stets eine bestimmte gleichnamige und eine bestimmte ungleichnamige Erzeugende:*

$$(39)\qquad \lambda' = -\frac{b^2 + c^2}{\lambda},\ \varepsilon, \qquad\qquad (40)\qquad \lambda'' = -\frac{b^2 - c^2}{\lambda},\ -\varepsilon,$$

die zu ihr senkrecht ist.

Nur für die beiden Scheitelerzeugenden $\lambda = 0$ würde λ' und, für $b^2 \neq c^2$, auch λ'' (vgl. (11)) ∞.

Bei dem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid § 62, (17), für das:

$$(41)\qquad b^2 = c^2$$

ist, werden die zu λ, ε senkrechten Erzeugenden:

$$(42)\qquad \lambda' = -\frac{2b^2}{\lambda},\ \varepsilon \qquad \text{und} \qquad (43)\qquad \lambda'' = 0,\ -\varepsilon:$$

II. *Beim gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid ist jede endliche Erzeugende zu der ungleichnamigen Scheitelerzeugenden senkrecht.*[159])

16. Ort der Punkte mit senkrechten Erzeugenden. Drück man in der Bedingung (38) mit Rücksicht auf 7 mittels der ersten Gleichung (9) die Parameter λ und λ'' durch die Koordinaten x, y, z

des Punktes aus, durch den die Erzeugenden λ, ε und λ'', $-\varepsilon$ gehen, so nimmt sie die Form an:

$$\left(\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \varepsilon\frac{z}{c}\right) + b^2 - c^2 = 0.$$

Da aber der Punkt x, y, z auf der Fläche (8) liegt, so folgt[66]):

III. *Der Ort der Punkte des hyperbolischen Paraboloids, durch die zwei zueinander senkrechte Erzeugende gehen, ist die Hyperbel, in der es von der Ebene:*

$$x = -\frac{b^2 - c^2}{2} \tag{44}$$

geschnitten wird (vgl. § 64, **1**).

Beim gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid zerfällt diese Hyperbel, in Übereinstimmung mit **15**, II, in die beiden Scheitelerzeugenden.

17. Drei zueinander senkrechte Erzeugende. Die Bedingung, daß die beiden Erzeugenden (39) und (40) ihrerseits aufeinander senkrecht sind, lautet nach (17):

$$(b^2 + c^2 + \lambda^2)(b^2 - c^2) = 0. \tag{45}$$

Auf dem allgemeinen hyperbolischen Paraboloid ($b^2 \neq c^2$) *gibt es keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden; auf dem gleichseitigen bestimmt jede Erzeugende λ, ε mit der gleichnamigen senkrechten* (42) *und der ungleichnamigen Scheitelerzeugenden ein System von drei zueinander senkrechten Erzeugenden* (vgl. § 64, **3**).

II. Abschnitt.

Beziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen zur Fläche zweiter Ordnung oder Klasse.

I. Kapitel.

Die Fläche zweiter Ordnung.

§ 66. Die allgemeine Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in gemeinen Punktkoordinaten.

1. Gleichung in gemeinen Koordinaten. Die Gleichungen § 53, (4); (5); (7); (15); (19); (29); (30); (31); § 54, (1); § 55, (1); § 56, (1) haben das gemeinsame Merkmal, daß sie in den Koordinaten vom zweiten Grade sind.

Wir betrachten daher jetzt die *allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen rechtwinkligen gemeinen Koordinaten* x, y, z [40]):

$$(1)\quad g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

wo die *zehn Koeffizienten* $a_{kl}(k, l = 1, 2, 3, 4)$ beliebige reelle, nicht sämtlich verschwindende Konstanten sind. Für die Bezeichnung soll immer gelten:

$$(2)\qquad a_{kl} = a_{lk}.$$

2. Gleichung in homogenen gemeinen Koordinaten. In homogenen gemeinen Koordinaten (I § 47, (1)) lautet die Gleichung (1):

$$(3)\quad f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0.$$

Zwischen den linken Seiten der Gleichungen (1) und (3) besteht die Beziehung:

$$(4)\qquad f(x, y, z, 1) = g(x, y, z).$$

Der Vorteil der Schreibweise (3) gegenüber (1) besteht schon äußerlich darin, daß die Gleichung (3) immer vom zweiten Grade bleibt, auch wenn $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$ verschwinden. Während dann (1) auf den ersten Grad sinkt, erhält (3) die Form:

$$(2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}t)\,t = 0,$$

stellt also ein Ebenenpaar dar, dessen eine Ebene unendlich fern ist (I § 47, (6)):

Jede durch eine Gleichung von der Form (3) *dargestellte Fläche soll als Fläche zweiter Ordnung gelten* (I § 72, (3)).

3. Die Ableitungen der Funktion f. Die halben partiellen Ableitungen der Funktion f in (3) bezeichnen wir zur Abkürzung mit:

$$\text{(5)}\quad \begin{cases} f_1(x, y, z, t) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ f_2(x, y, z, t) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ f_3(x, y, z, t) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ f_4(x, y, z, t) = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{cases}$$

Danach ist identisch in x, y, z, t:

$$\text{(6)}\quad f_1(x, y, z, t)\, x + f_2(x, y, z, t)\, y + f_3(x, y, z, t)\, z + f_4(x, y, z, t)\, t = f(x, y, z, t)$$

und identisch in x, y, z, t und x', y', z', t':

$$\text{(7)}\quad \begin{cases} f_1(x,y,z,t)\, x' + f_2(x,y,z,t)\, y' + f_3(x,y,z,t)\, z' + f_4(x,y,z,t)\, t' \\ = f_1(x',y',z',t')\, x + f_2(x',y',z',t')\, y + f_3(x',y',z',t')\, z + f_4(x',y',z',t')\, t. \end{cases}$$

4. Die Ableitungen der Funktion g. Die mit $t = 1$ aus (5) entstehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit:

$$\text{(8)}\quad \begin{cases} g_1(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}, \\ g_2(x, y, z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}, \\ g_3(x, y, z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}, \\ g_4(x, y, z) = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}. \end{cases}$$

Mit $t = 1$ folgt daher aus (6):

$$\text{(9)}\quad g_1(x, y, z)\, x + g_2(x, y, z)\, y + g_3(x,y,z)\, z + g_4(x,y,z) = g(x,y,z).$$

5. Die quadratischen Glieder von g. Die Gleichung (1) enthält sechs *quadratische*, drei *lineare* Glieder und ein *konstantes* Glied. Wir setzen zur Abkürzung:

$$\text{(10)}\quad h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy$$

und bezeichnen die halben partiellen Ableitungen von h zur Abkürzung mit:

$$\text{(11)}\quad \begin{cases} h_1(x, y, z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ h_2(x, y, z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ h_3(x, y, z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Dann ist identisch in x, y, z:

$$\text{(12)}\quad h_1(x, y, z)\, x + h_2(x, y, z)\, y + h_3(x, y, z)\, z = h(x, y, z),$$

ferner identisch in x, y, z und x', y', z':

$$(13)\quad h_1(x, y, z)x' + h_2(x, y, z)y' + h_3(x, y, z)z' = h_1(x', y', z')x + h_2(x', y', z')y + h_3(x', y', z')z.$$

Endlich sei:

$$(14)\quad h_4(x, y, z) = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z.$$

6. Die Determinante der Fläche. Die aus den Koeffizienten der linearen Funktionen (5) gebildete, wegen (2) *symmetrische* (I Anm. 1, IV, 6) Determinante vierten Grades:

$$(15)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

nennen wir *die Determinante*[41]) *der Fläche* (1) oder (3). Ihre *Unterdeterminanten dritten Grades* bezeichnen wir (I Anm. 1, III, (2)) mit $A_{kl} = A_{lk}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4)$, ihre *Unterdeterminanten zweiten Grades* (I Anm. 1, III, (4)) mit $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}$ $(k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, endlich die aus den A_{kl} gebildeten Unterdeterminanten zweiten Grades (I Anm. 1, III, (12)) mit A_{kl} $(k, l = 1, 2, \cdots, 6)$.

7. Transformation auf ein schiefwinkliges System. Um die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogene Gleichung (1) auf ein neues *recht- oder schiefwinkliges* System $\Omega\xi\eta\zeta$ überzuführen, dessen Anfangspunkt Ω die Koordinaten x_0, y_0, z_0 hat und dessen Achsen die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben (I § 37, (13)), dienen die Formeln:

$$(16)\quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y = y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = z_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta. \end{cases}$$

Die Gleichung (1) wird daher in dem neuen System:

$$(17)\quad g(x, y, z) = g(x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta,\ y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta,\ z_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta) = 0$$

oder nach ξ, η, ζ geordnet:

$$(18)\quad g(x, y, z) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\zeta^2 + 2a'_{23}\eta\zeta + 2a'_{31}\zeta\xi + 2a'_{12}\xi\eta + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0,$$

wo die neuen Koeffizienten die Werte haben (§ 9, 7):

$$(19)\quad \begin{cases} a'_{11}=h(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=h_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\alpha_1+h_2(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\beta_1+h_3(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\gamma_1,\\ a'_{22}=h(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2),\\ a'_{33}=h(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3),\\ a'_{23}=h_1(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\,\alpha_3+h_2(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\,\beta_3+h_3(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\,\gamma_3,\\ a'_{31}=h_1(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)\,\alpha_1+h_2(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)\,\beta_1+h_3(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)\,\gamma_1,\\ a'_{12}=h_1(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\,\alpha_2+h_2(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\,\beta_2+h_3(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)\,\gamma_2; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} a'_{14}=g_1(x_0,y_0,z_0)\,\alpha_1+g_2(x_0,y_0,z_0)\,\beta_1+g_3(x_0,y_0,z_0)\,\gamma_1\\ \quad\;\; =g_1{}^0\alpha_1+g_2{}^0\beta_1+g_3{}^0\gamma_1,\\ a'_{24}=g_1{}^0\alpha_2+g_2{}^0\beta_2+g_3{}^0\gamma_2,\\ a'_{34}=g_1{}^0\alpha_3+g_2{}^0\beta_3+g_3{}^0\gamma_3; \end{cases}$$

$$(21)\qquad a'_{44}=g(x_0,y_0,z_0)=g^0.$$

Die allgemeine *Form* der Gleichung (1), bezüglich (3) *bleibt* daher *in jedem recht- oder schiefwinkligen Koordinatensystem dieselbe*. Die *Ordnung* der Fläche ist vom Koordinatensystem *unabhängig*.[42])

8. Ordnung der Schnittkurve mit einer Ebene. Die Gleichung (18) liefert mit $\zeta = 0$ (I § 49, 2) in:

$$(22)\qquad a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{12}\xi\eta + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0$$

die Schnittkurve der Fläche (1) mit der $\xi\eta$-Ebene in laufenden Koordinaten ξ, η (§ 9, (19)).

Da aber diese Ebene für (16) neben dem ursprünglichen Koordinatensystem $Oxyz$ ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

Die Fläche zweiter Ordnung wird von einer Ebene in einer Kurve zweiter Ordnung (einem Kegelschnitt) geschnitten.[43])

Eine *Ausnahme* tritt nur ein, wenn alle Koeffizienten der Gleichung (22) verschwinden; die Ebene gehört dann in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche an (vgl. § 53, (31)).

Die Schnittkurve der Fläche mit der unendlich fernen Ebene geht aus (3) mit $t = 0$ hervor:

$$(23)\quad h(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0,$$

dargestellt in laufenden Koordinaten x, y, z dieser Ebene (I § 49, 2). Sie ist ebenfalls von der zweiten Ordnung.[9])

9. Das Schnittpunktpaar mit einer Geraden. Die Gleichung (18) liefert mit $\eta = 0$, $\zeta = 0$ (I § 49, 12) in:

$$(24)\qquad a'_{11}\xi^2 + 2a'_{14}\xi + a'_{44} = 0$$

das Schnittpunktpaar der Fläche (1) mit der ξ-Achse in der Koordinate ξ (§ 7, (9)).

Da diese Achse für (16) neben $Oxyz$ ganz beliebig gewählt werden kann, so folgt:

Die Fläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden in zwei Punkten (einem Punktepaar) geschnitten.[43])

Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn alle Koeffizienten der Gleichung (24) verschwinden; die Gerade gehört dann in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche an (§ 63, **3**).

Die Schnittpunkte mit einer unendlich fernen Geraden gehen aus der homogenen, in ξ, η, ζ, τ geschriebenen Gleichung (18) mit $\zeta = 0$, $\tau = 0$ (I § 49, **12**) hervor:

(25) $$a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 = 0$$

(§ 7, (33)).

10. Fläche zweiter Ordnung durch neun Punkte. Die allgemeine Gleichung (1) der Fläche zweiter Ordnung ist *linear und homogen in den zehn Koeffizienten* a_{kl}. Sind daher *neun* Punkte $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, \ldots, 9)$ der Fläche gegeben, so sind durch die *neun* linearen homogenen Gleichungen $(i = 1, 2, \ldots, 9)$:

(26) $$\begin{aligned} a_{11}x_i^2 + a_{22}y_i^2 + a_{33}z_i^2 + 2a_{23}y_iz_i + 2a_{31}z_ix_i + 2a_{12}x_iy_i \\ + 2a_{14}x_i + 2a_{24}y_i + 2a_{34}z_i + a_{44} = 0 \end{aligned}$$

die neun Verhältnisse der Koeffizienten a_{kl} bestimmt. Man erhält die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung, die durch die gegebenen Punkte geht, indem man aus den zehn Gleichungen (1) und (26) die Koeffizienten eliminiert (§ 9, (27)):

(27) $$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & \ldots \\ x_2^2 & y_2^2 & \ldots \\ \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Die Fläche zweiter Ordnung ist daher im allgemeinen durch neun Punkte bestimmt.[44])

§ 67. Schnittpunkte einer Geraden mit der Fläche, Tangenten und Tangentialebenen.

1. Gleichung des Schnittpunktepaares in gemeiner Koordinate. Neben der *Fläche* § 66, (1):

(1) $$g(x, y, z) = 0$$

sei eine *gerade Linie* durch ihre *Parameterdarstellung* (I § 43, (2)):

(2) $$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s$$

gegeben, wobei $P_0 = x_0, y_0, z_0$ ein fester Punkt, α, β, γ die Richtungskosinus der Geraden und s der relative Abstand P_0P ihres laufenden Punktes $P = x, y, z$ von P_0 ist (Fig. 163). Die *Gleichungen* der Linie (2) sind:

$$(3) \qquad x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma.$$

Die Bedingung, daß der laufende Punkt P der Geraden (2) auf der Fläche (1) liegt:[45])

$$g(x_0 + \alpha s, \quad y_0 + \beta s, \quad z_0 + \gamma s) = 0,$$

gibt entwickelt (§ 66, (16)—(21) und (24) mit $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = s$, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = \alpha, \beta, \gamma$):

$$(4) \qquad h(\alpha, \beta, \gamma)s^2 + 2(g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3{}^0\gamma)s + g^0 = 0.$$

Die Gleichung (4) *ist die Gleichung des Punktepaares, in dem die Gerade* (2) *die Fläche* (1) *schneidet. Ihre Wurzeln* s_1 *und* s_2 *sind die gemeinen Koordinaten der Schnittpunkte* S_1 *und* S_2 *auf der Geraden in bezug auf* P_0 (§ 7, (1); § 10, (4)).

Die Strecke zwischen den beiden reellen oder nicht reellen Punkten S_1 und S_2 heißt eine *Sehne* der Fläche.[46])

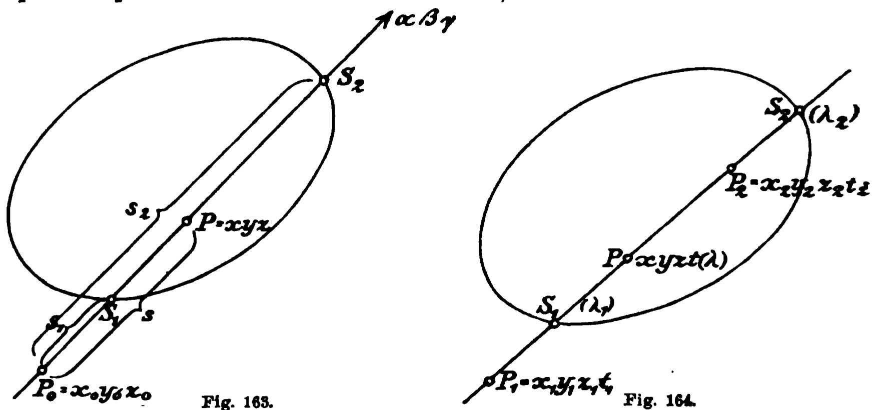


Fig. 163. Fig. 164.

2. Gleichung des Schnittpunktepaares in Verhältniskoordinate. Die Fläche (1) sei in der homogenen Form § 66, (3):

$$(5) \qquad f(x, y, z, t) = 0$$

dargestellt und dementsprechend die gerade Linie durch die homogenen Koordinaten x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 zweier fester Punkte P_1 und P_2 gegeben (Fig. 164). Ihr laufender Punkt hat dann Koordinaten von der Form (I § 47, (26')):

$$(6) \qquad \varrho x = x_1 + \lambda x_2, \quad \varrho y = y_1 + \lambda y_2, \quad \varrho z = z_1 + \lambda z_2, \quad \varrho t = t_1 + \lambda t_2,$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor und λ die multiplizierte Verhältniskoordinate des Punktes P in bezug auf P_1 und P_2 ist.

Für die Parameter der Schnittpunkte der Geraden und der Fläche ist dann:[45])

$$f(x_1 + \lambda x_2,\quad y_1 + \lambda y_2,\quad z_1 + \lambda z_2,\quad t_1 + \lambda t_2) = 0$$

oder:

$$f_{11} + 2 f_{12}\lambda + f_{22}\lambda^2 = 0, \tag{7}$$

wo:

$$f_{11} = f(x_1, y_1, z_1, t_1), \quad f_{22} = f(x_2, y_2, z_2, t_2) \tag{8}$$

und (§ 66, (7)):

$$f_{12} = f_1^{(1)} x_2 + f_2^{(1)} y_2 + f_3^{(1)} z_2 + f_4^{(1)} t_2 = f_1^{(2)} x_1 + f_2^{(2)} y_1 + f_3^{(2)} z_1 + f_4^{(2)} t_1 \tag{9}$$

und hierin:

$$f_1^{(1)} = f_1(x_1, y_1, z_1, t_1), \ldots, \ldots, \ldots;\; f_1^{(2)} = f_1(x_2, y_2, z_2, t_2), \ldots, \ldots, \ldots \tag{10}$$

Die Gleichung (7) *ist die Gleichung des Punktepaares, in dem die Gerade* $P_1 P_2$ *die Fläche* (5) *schneidet. Ihre Wurzeln* λ_1 *und* λ_2 *sind die multiplizierten Verhältniskoordinaten der Schnittpunkte* S_1 *und* S_2 *in bezug auf* P_1 *und* P_2 (§ 7, (30); § 10, (7)).

Mit (I § 47, 9):

$$x_1 = x_0,\, y_1 = y_0,\, z_1 = z_0, t_1 = 1;\; x_2 = \alpha,\, y_2 = \beta,\, z_2 = \gamma,\, t_2 = 0;\; t = 1;\; \lambda = s \tag{11}$$

geht die Darstellung (6) in (2) und die Gleichung (7) in (4) über.

3. Tangente in einem Punkte der Fläche. Eine Gerade, deren beide Schnittpunkte S_1 und S_2 mit der Fläche in einen einzigen Punkt $S_1 = S_2$ zusammenfallen, heißt eine *Tangente* der Fläche in diesem Punkte, der Punkt selbst ihr *Berührungspunkt.*

Fig. 165.

Um die Tangente in einem Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ der Fläche (1) zu erhalten, nehmen wir diesen Punkt (Fig. 165), für den:

$$g^0 = g(x_0, y_0, z_0) = 0 \tag{12}$$

ist, als Anfangspunkt der Geraden (2). Der eine der Schnittpunkte S_1 und S_2 fällt dann in P_0, indem die Gleichung (4) infolge von (12) eine Wurzel $s = 0$ gibt. Soll auch die andere Wurzel $s = 0$ werden, muß sein (§ 10, (13)):

$$g_1^0 \alpha + g_2^0 \beta + g_3^0 \gamma = 0. \tag{13}$$

Die Gerade (2) *ist also Tangente der Fläche* (1) *im Punkte* P_0, *wenn ihre Richtungskosinus der Bedingung* (13) *genügen.*

Auf entsprechende Weise folgt aus (7):

Die Verbindungslinie eines Punktes $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ *der Fläche* (5), *der die Gleichung:*

(14) $$f_{11} = f(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0$$

erfüllt, mit einem anderen Punkte $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ *ist Tangente der Fläche in* P_1, *wenn* P_2 *der Bedingung genügt:*

(15) $$f_{12} = f_1^{(1)} x_2 + f_2^{(1)} y_2 + f_3^{(1)} z_2 + f_4^{(1)} t_2 = 0.$$

Mit (11) geht (15) wieder in (13) über.

4. Die Tangentialebene in einem Punkt der Fläche. Die Gleichung (13) gibt nach (3) für den *laufenden* Punkt einer Tangente in P_0 die Bedingung[47]):

(16) $$g_1^0(x - x_0) + g_2^0(y - y_0) + g_3^0(z - z_0) = 0.$$

I. *Der Ort der im Punkte* $P_0 = x_0, y_0, z_0$ *an die Fläche* (1) *gelegten Tangenten ist daher eine Ebene, die Tangentialebene der Fläche im Punkte* P_0. Der Punkt selbst ist der *Berührungspunkt* der Tangentialebene.

II. *Jede durch den Berührungspunkt einer Tangentialebene in ihr gelegte Gerade ist Tangente.*

III. *Die Tangentialebene der Fläche* (1) *im Punkte* P_0, *der die Bedingung* (12) *erfüllt, ist in laufenden Koordinaten* x, y, z *durch die Gleichung* (16) *dargestellt.*

Indem man auch in (15) den Punkt $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ als laufenden Punkt ansieht und den Index 2 unterdrückt, findet man:

Die Tangentialebene der Fläche (5) *im Punkte* P_1, *der die Bedingung* (14) *erfüllt, ist in laufenden Koordinaten* x, y, z, t *durch die Gleichung dargestellt:*

(17) $$f_1^{(1)} x + f_2^{(1)} y + f_3^{(1)} z + f_4^{(1)} t = 0.$$

Hieraus folgt aber mit $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, $t_1 = 1$; $t = 1$ eine andere Form der Gleichung (16) (vgl. § 66, (9)):

Die Gleichung (16) *der Tangentialebene im Punkte* x_0, y_0, z_0 *kann auch in der Form:*

(18) $$g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0 z + g_4^0 = 0$$

geschrieben werden (auch für *schiefwinklige* Koordinaten, wie § 10, 3).

5. Die Normale der Fläche. Die *Normale der Fläche* (1) *im Punkte* x_0, y_0, z_0, die auf der Tangentialebene senkrecht steht, *hat die Gleichungen* (§ 10, (19)):

(19) $$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = g_1^0 : g_2^0 : g_3^0.$$

6. Tangente von einem beliebigen Punkt an die Fläche. Die beiden Schnittpunkte der Geraden (2) mit der Fläche (1) fallen bei beliebiger Lage von P_0 zusammen (Fig. 166), wenn die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (4) gleich sind, also:

$$g^0 h(\alpha, \beta, \gamma) - (g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3{}^0\gamma)^2 = 0. \tag{20}$$

Unter dieser Bedingung ist die von einem beliebigen Punkte x_0, y_0, z_0 des Raumes in der Richtung α, β, γ ausgehende Gerade eine Tangente der Fläche (1).

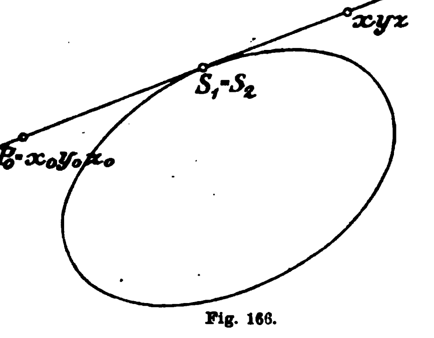


Fig. 166.

Ebenso ist nach (7) die Verbindungslinie zweier Punkte x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 eine Tangente der Fläche (5) unter der Bedingung:

$$f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = 0. \tag{21}$$

7. Berührungskegel an die Fläche. *Der Ort der von einem Punkte an die Fläche gelegten Tangenten, ist der Tangentenkegel oder Berührungskegel.*[48])

Die Gleichung (20) gibt nach (3) für den laufenden Punkt $P = x, y, z$ (Fig. 166) einer durch P_0 gehenden Tangente (§ 10, (21)):

$$g^0 h(x-x_0, y-y_0, z-z_0) - (g_1{}^0(x-x_0) + g_2{}^0(y-y_0) + g_3{}^0(z-z_0))^2 = 0. \tag{22}$$

Diese Gleichung, die in den Differenzen $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$ (I § 37, (1)) homogen ist, stellt (I § 72, (16)) einen Kegel zweiter Ordnung dar (s. auch § 80, (19)).

Der vom Punkte x_0, y_0, z_0 an die Fläche (1) *gelegte Tangentenkegel ist ein Kegel zweiter Ordnung und hat die Gleichung* (22).

Indem man in (21) den Punkt x_2, y_2, z_2, t_2 als laufenden Punkt ansieht und den Index 2 fortläßt, findet man ebenso:

Der vom Punkte x_1, y_1, z_1, t_1 an die Fläche (5) *gelegte Tangentenkegel hat die Gleichung:*

$$f_{11} f(x, y, z, t) - (f_1^{(1)} x + f_2^{(1)} y + f_3^{(1)} z + f_4^{(1)} t)^2 = 0. \tag{23}$$

Hieraus folgt mit $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$, $t_1 = 1$; $t = 1$ mit Rücksicht auf (8); (10) und § 66, (4); (8) eine andere Form der Gleichung (22):

Die Gleichung des Tangentenkegels vom Punkte x_0, y_0, z_0 an die Fläche (1) *kann auch in der Form geschrieben werden* (§ 10, (24)):

$$g^0 g(x, y, z) - (g_1{}^0 x + g_2{}^0 y + g_3{}^0 z + g_4{}^0)^2 = 0. \tag{24}$$

8. Gerade Linien auf der Fläche. Wenn in der Gleichung (4) alle drei Koeffizienten verschwinden, *gehören alle Punkte der Geraden* (3) *der Fläche* (1) *an;* die Gerade ist eine *Erzeugende (Inflexions- oder Haupttangente) der Fläche.*[156]) Zwischen x_0, y_0, z_0 und α, β, γ in (3) bestehen also dann die Gleichungen:

$$(25)\qquad g^0 = 0, \quad g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3{}^0\gamma = 0, \quad h(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Ist x_0, y_0, z_0 irgendein Punkt der Fläche, so ist die erste Bedingung (25) erfüllt, während die beiden anderen Bedingungen (25) eine Gleichung ersten und eine zweiten Grades für die Verhältnisse von α, β, γ darstellen.

Durch einen Punkt x_0, y_0, z_0 der Fläche gehen daher zwei (reelle oder imaginäre) Erzeugende (§ 63, 6)[158]).

Sie gehören nach (12); (13) zu den Tangenten des Punktes.

Ihre Gleichungen sind nach (25) und (3):

$$(26)\quad g_1{}^0(x-x_0)+g_2{}^0(y-y_0)+g_3{}^0(z-z_0)=0,\ h(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0.$$

Sie werden also *aus der Tangentialebene* (16) *durch den Kegel zweiter Ordnung* $h = 0$ (I § 37, (1); I § 72, (16)) *ausgeschnitten* (der vom Punkte x_0, y_0, z_0 über der unendlich fernen Kurve § 66, (23) errichtet ist.)

In *homogenen* Koordinaten sind nach (7) die Bedingungen dafür, daß die *Verbindungslinie zweier Punkte eine Erzeugende* ist:

$$(27)\qquad f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{22} = 0,$$

und sind daher *die Gleichungen der Erzeugenden im Punkte x_1, y_1, z_1, t_1 in laufenden Koordinaten x, y, z, t* mit Rücksicht auf (9):

$$(28)\ f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}z + f_4^{(1)}t = 0,\ f(x, y, z, t) = 0,\ (f(x_1, y_1, z_1, t_1) = 0).$$

Sie erscheinen hier als *Schnittlinien der Fläche selbst mit der Tangentialebene* (17) des Punktes.

9. Begriff des Doppelpunktes der Fläche. Wenn neben (12) die Bedingung (13) identisch in $\alpha : \beta : \gamma$ erfüllt ist, *schneidet jede durch den Punkt x_0, y_0, z_0 der Fläche gehende Gerade die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten und ist in diesem Sinne Tangente.* Der Punkt heißt dann ein *Doppelpunkt* oder *singulärer Punkt* der Fläche. Jede durch ihn gehende Ebene hat nach **4**, I als *Tangentialebene* in ihm zu gelten.

Die *Bedingungen des Doppelpunktes* sind somit:

$$(29)\qquad g_1{}^0 = 0, \quad g_2{}^0 = 0, \quad g_3{}^0 = 0, \quad g^0 = 0$$

oder nach § 66, (9):

$$(30)\qquad g_1{}^0 = 0, \quad g_2{}^0 = 0, \quad g_3{}^0 = 0, \quad g_4{}^0 = 0.$$

Für *homogene* Koordinaten muß neben (14) die Gleichung (15) identisch in $x_2 : y_2 : z_2 : t_2$ bestehen, wenn x_1, y_1, z_1, t_1 ein Doppelpunkt sein soll, so daß die *Bedingungen* lauten:

(31) $$f_1^{(1)} = 0, \quad f_2^{(1)} = 0, \quad f_3^{(1)} = 0, \quad f_4^{(1)} = 0.$$

Sie haben nach § 66, (6) die Bedingung (14) zur Folge. Sie gehen mit $x_1, y_1, z_1, t_1 = x_0, y_0, z_0, 1$ in die Bedingungen (30) über (§ 66, (5); (8)), sind aber insofern allgemeiner als diese, als sie auch *unendlich ferne* Doppelpunkte zulassen. Wir sagen daher unter Weglassung des Index 0 und 1 überhaupt[49]):

Ein Punkt x, y, z, t ist Doppelpunkt der Fläche (5), *wenn er den Bedingungen entspricht* (§ 10, (28)):

(32) $$\begin{cases} f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0, \\ f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = 0, \\ f_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t = 0, \\ f_4 = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t = 0. \end{cases}$$

§ 68. Harmonische Pole, Polarebene eines Punktes, reziproke Polaren.

1. Mittelpunkt und Richtung einer Sehne. Die quadratische Gleichung § 67, (4) hat zwei entgegengesetzt gleiche endliche Wurzeln, wenn:

(1) $$g_1^0\alpha + g_2^0\beta + g_3^0\gamma = 0,$$

ohne daß $h(\alpha, \beta, \gamma)$ verschwindet. Der Punkt P_0 ist dann (§ 7, (23)) der Mittelpunkt der Sehne S_1S_2 (Fig. 167).

Zwischen dem Mittelpunkt x_0, y_0, z_0 und der Richtung α, β, γ einer Sehne der Fläche besteht daher die Gleichung (1) (§ 11, (1)).

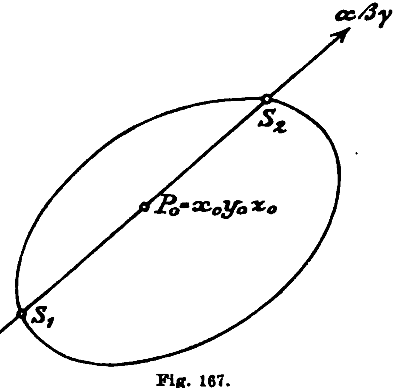
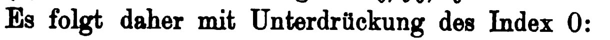


Fig. 167.

2. Die einer Richtung konjugierte Ebene. Bei fester Richtung α, β, γ ist (1) eine lineare Gleichung für x_0, y_0, z_0.


Es folgt daher mit Unterdrückung des Index 0:

Der Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Sehnen von gegebener Richtung α, β, γ ist eine Ebene (§ 11, (2)):

(2) $$\alpha g_1(x, y, z) + \beta g_2(x, y, z) + \gamma g_3(x, y, z) = 0,$$

welche die der Richtung α, β, γ konjugierte Ebene heißt.[50])

Ihre Gleichung kann nach § 66, (8), (11), (14) auch in der Form:

$$\alpha h_1(x, y, z) + \beta h_2(x, y, z) + \gamma h_3(x, y, z) + h_4(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

und nach § 66, (13) in der Form:

$$(3) \quad h_1(\alpha, \beta, \gamma)x + h_2(\alpha, \beta, \gamma)y + h_3(\alpha, \beta, \gamma)z + h_4(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

geschrieben werden.

3. Ebener Schnitt mit gegebenem Mittelpunkt. Bei festem Punkte x_0, y_0, z_0 ist (1), wenn nicht g_1^0, g_2^0, g_3^0 alle verschwinden, eine homogene lineare Gleichung für die Richtungskosinus α, β, γ der Sehne $S_1 S_2$, die für den laufenden Punkt x, y, z der Sehne nach § 67, (3) die Bedingung gibt:

$$g_1^0(x - x_0) + g_2^0(y - y_0) + g_3^0(z - z_0) = 0$$

oder nach § 66, (9):

$$(4) \quad g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0 z + g_4^0 - g^0 = 0.$$

Der Ort der Sehnen, die von einem gegebenen Punkte x_0, y_0, z_0 halbiert werden, ist im allgemeinen eine Ebene (vgl. jedoch 4) oder:

Jeder Punkt x_0, y_0, z_0 ist der Mittelpunkt eines ebenen Schnittes, dessen Ebene die Gleichung (4) *hat* (§ 11, (5)).

Für $g^0 = 0$ wird diese Ebene nach § 67, (18) die Tangentialebene im Punkte x_0, y_0, z_0.

4. Mittelpunkt der Fläche. Wenn die Gleichung (1) identisch in $\alpha : \beta : \gamma$ erfüllt ist, also:

$$(5) \quad g_1^0 = 0, \quad g_2^0 = 0, \quad g_3^0 = 0$$

ist, so *ist der Punkt x_0, y_0, z_0 Mittelpunkt jeder durch ihn gehenden Sehne.* Ein solcher Punkt heißt *Mittelpunkt der Fläche.*[6])

Mit Unterdrückung des Index 0 sagen wir:

Ein Punkt x, y, z ist Mittelpunkt der Fläche (1), *wenn er den Bedingungen entspricht* (§ 11, (7)):

$$(6) \quad \begin{cases} g_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0, \\ g_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0, \\ g_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} = 0. \end{cases}$$

5. Harmonische Pole. Wenn in der quadratischen Gleichung § 67, (7) der mittlere Koeffizient verschwindet, also:

$$(7) \quad f_{12} = 0$$

ist, so sind die beiden Punkte P_1 und P_2, auf die sich die Verhältniskoordinate λ bezieht, nach § 8, (21) zu den Schnittpunkten S_1, S_2 (Fig. 164) *harmonisch.* Die Gleichung (7) kann nach § 67, (9) auch in den beiden Formen:

$$(8) \quad f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}y_2 + f_3^{(1)}z_2 + f_4^{(1)}t_2 = f_1^{(2)}x_1 + f_2^{(2)}y_1 + f_3^{(2)}z_1 + f_4^{(2)}t_1 = 0$$

geschrieben werden und ist in den Koordinaten der beiden Punkte P_1 und P_2 symmetrisch.

Zwei durch die Bedingung (7) *oder* (8) *verknüpfte Punkte* P_1 *und* P_2 *sind also zu den Punkten* S_1 *und* S_2, *in denen ihre Verbindungslinie die Fläche schneidet, harmonisch.* Man nennt sie *harmonische Pole* in bezug auf die Fläche zweiter Ordnung.[51])

6. Unterscheidung endlicher und unendlich ferner Punkte. Ist P_1 *endlich*, kann man $t_1 = 1$ nehmen und erhält statt (8):

$$(9) \quad g_1^{(1)}x_2 + g_2^{(1)}y_2 + g_3^{(1)}z_2 + g_4^{(1)}t_2 = f_1^{(2)}x_1 + f_2^{(2)}y_1 + f_3^{(2)}z_1 + f_4^{(2)} = 0.$$

Bei *endlichem* P_2 kann man hier auch $t_2 = 1$ setzen, bei *unendlich fernem* P_2 aber lautet die Bedingung (9) mit:

$$x_2 = \alpha_2, \; y_2 = \beta_2, \; z_2 = \gamma_2, \; t_2 = 0$$

(I § 47, (14)) mit Rücksicht auf § 66, (5); (11); (14):

$$(10) \quad \begin{aligned} g_1^{(1)}\alpha_2 + g_2^{(1)}\beta_2 + g_3^{(1)}\gamma_2 = h_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)x_1 + h_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)y_1 \\ + h_3(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)z_1 + h_4(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = 0. \end{aligned}$$

Sind *beide* Punkte *unendlich fern*, $x_1, y_1, z_1, t_1 = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, 0$ und $x_2, y_2, z_2, t_2 = \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, 0$, so folgt aus (8):

$$(11) \quad h_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\gamma_2 = 0.$$

7. Involution harmonischer Pole. Auf einer bestimmten geraden Linie, welche die Fläche in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet, bestimmt die Fläche eine *Involution harmonischer Pole*[52]), den Inbegriff aller Punktepaare, die zu S_1 und S_2 harmonisch, also in bezug auf die Fläche harmonische Pole sind (§ 11, **6**).

Da die Schnittpunkte S_1 und S_2 durch die Gleichungen § 67, (4) oder (7) bestimmt werden, lautet die *Gleichung der entsprechenden Involution harmonischer Pole*:

$$(12) \quad h(\alpha, \beta, \gamma)s's'' + (g_1^0\alpha + g_2^0\beta + g_3^0\gamma)(s' + s'') + g^0 = 0$$

oder:

$$(13) \quad f_{11} + f_{12}(\lambda' + \lambda'') + f_{22}\lambda'\lambda'' = 0,$$

wo s', s'' gemeine und λ', λ'' multiplizierte Verhältniskoordinaten entsprechender Punkte der Involution sind (§ 8, (4); (8)).

8. Die Polarebene eines Punktes. Nach (8) ist *der Ort aller harmonischen Pole* P_2 *eines festen Punktes* P_1 *eine Ebene, welche die Polarebene des Punktes* P_1 *heißt.*[53])

Mit Unterdrückung der Index 2 in (8) erhält man:

$$(14) \quad f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}z + f_4^{(1)}t = 0$$

als *Gleichung der Polarebene des Punktes* $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ in bezug auf die Fläche § 67, (5) in laufenden Koordinaten x, y, z, t (§ 11, 7).

Für einen *endlichen* Punkt $x_1, y_1, z_1, t_1 = x_0, y_0, z_0, 1$ kann man dieser Gleichung die auf die Flächengleichung § 67, (1) bezügliche Form geben:

(15) $$g_1^0 x + g_2^0 y + g_3^0 z + g_4^0 t = 0.$$

9. Polarebene und Tangentialebene. Der Punkt P_1 liegt immer dann und nur dann selbst auf seiner Polarebene (14), wenn (§ 66, (6)):

(16) $$f_1^{(1)} x_1 + f_2^{(1)} y_1 + f_3^{(1)} z_1 + f_4^{(1)} t_1 = f(x_1, y_1, z_1, t_1) = f_{11} = 0,$$

also wenn er auf der Fläche liegt. Die Polarebene (14) wird dann nach § 67, (17); (14) seine Tangentialebene. Also:[55])

I. *Ein Punkt liegt immer dann und nur dann mit seiner Polarebene vereinigt, wenn er ein Punkt der Fläche ist;* oder:

II. *Ein Punkt ist immer dann und nur dann sein eigener harmonischer Pol, wenn er auf der Fläche liegt.*

III. *Die Polarebene eines Punktes der Fläche ist seine Tangentialebene.*

Vorausgesetzt ist dabei, daß der Punkt eine bestimmte Polarebene hat (§ 11, 9).

10. Polarebene und Berührungskegel. Jeder Punkt, der sowohl der Fläche § 67, (5) als dem vom Punkte P_1 an sie gelegten Berührungskegel § 67, (23) angehört, genügt auch der Gleichung (14) der Polarebene von P_1, und jeder Punkt, der sowohl der Fläche § 67, (5) als der Polarebene (14) angehört, genügt der Gleichung § 67, (23). Daraus folgt (vgl. § 66, 8):

Der Ort der Berührungspunkte aller von einem Punkte P_1 an die Fläche zweiter Ordnung gelegten Tangenten, die Berührungskurve des Berührungskegels, ist der Kegelschnitt, in dem die Fläche von der Polarebene des Punktes P_1 geschnitten wird (§ 11, **10**).

11. Polarebene und konjugierte Ebene. Die Polarebene des unendlich fernen Punktes $\alpha, \beta, \gamma, 0$ ist nach (10):

(17) $$h_1(\alpha, \beta, \gamma) x + h_2(\alpha, \beta, \gamma) y + h_3(\alpha, \beta, \gamma) z + h_4(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

also die Ebene (3).[50])

I. *Die Polarebene des in der Richtung α, β, γ unendlich fernen Punktes ist die der Richtung konjugierte Ebene* (§ 11, **11**).

Für den Mittelpunkt der Fläche verkürzt sich die Gleichung (15) nach (5) auf $g_4^0 t = 0$, oder falls nicht auch $g_4^0 = 0$ ist (§ 67, (30)), auf $t = 0$.[6])

II. *Die Polarebene des Mittelpunktes der Fläche ist, wenn er kein Doppelpunkt ist, die unendlich ferne Ebene* (§ 11, **12**).

12. Die Koordinaten der Polarebene. Die Koeffizienten der Gleichung (14) sind bis auf einen Faktor ϱ die Koordinaten der Polarebene von $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$, also mit Weglassung des Index 1 (§ 11, (21)):

Die Koordinaten der Polarebene des Punktes $P = x, y, z, t$ in bezug auf die Fläche § 67, (5) *sind:*

$$(18) \qquad \begin{cases} \varrho u = f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \\ \varrho v = f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t, \\ \varrho w = f_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t, \\ \varrho t = f_4 = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf § 67, (32) folgt dabei:

Jeder Punkt des Raumes, der kein Doppelpunkt der Fläche ist, hat eine bestimmte Polarebene.

13. Involutorische Beziehung zweier harmonischer Pole. Die Doppelform (8) der Bedingung zweier harmonischer Pole hat mit Rücksicht auf (14) die Bedeutung:

I. *Von zwei harmonischen Polen liegt jeder in der Polarebene des andern;* oder:

II. *Liegt ein Punkt P_2 in der Polarebene Π_1 des Punktes P_1, so geht die Polarebene Π_2 von P_2 durch P_1.*

Hieraus folgt mit Bezugnahme auf **9**, III:

III. *Die Polarebene eines Punktes einer Tangentialebene geht durch deren Berührungspunkt* (§ 11, **14**).

14. Polarebenen der Punkte einer Punktreihe. Die Polarebenen zweier Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ sind nach (14):

$$(19) \qquad \begin{cases} X_1 = f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}z + f_4^{(1)}t = 0, \\ X_2 = f_1^{(2)}x + f_2^{(2)}y + f_3^{(2)}z + f_4^{(2)}t = 0, \end{cases}$$

wo X_1, X_2 (I § 42, (11)) als Abkürzungen für die linken Seiten dienen. Die Polarebene irgendeines Punktes:

$$P = x_1 + \lambda x_2, \quad y_1 + \lambda y_2, \quad z_1 + \lambda z_2, \quad t_1 + \lambda t_2$$

der Verbindungslinie $P_1 P_2$ (I § 47, (26')) ist mit Rücksicht auf die Bedeutung § 66, (5) der in x, y, z, t linearen Ausdrücke $f_k(x, y, z, t)$:

$$(f_1^{(1)} + \lambda f_1^{(2)})x + (f_2^{(1)} + \lambda f_2^{(2)})y + (f_3^{(1)} + \lambda f_3^{(2)})z + (f_4^{(1)} + \lambda f_4^{(2)})t = 0$$

oder:

(20) $$X_1 + \lambda X_2 = 0.$$

Daraus ergibt sich (I § 66, 4):

I. *Die Polarebenen der Punkte einer Punktreihe bilden einen ihr projektiven Ebenenbüschel*[56]); oder abgekürzt:

II. *Durchläuft einen Punkt einen Strahl, so dreht sich seine Polarebene um eine Achse.*

III. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die beiden Ebenen (19) zwei bestimmte und getrennte Ebenen sind.

15. Reziproke Polaren. Unter der gleichen Voraussetzung entspricht daher einem Strahl p des Raumes eine Achse p', durch welche die Polarebenen aller Punkte von p gehen, und welche die *Polare der Geraden* p heißt. Sie ist bestimmt als Schnittlinie der Polarebenen Π_1 und Π_2 zweier Punkte P_1 und P_2 von p (Fig. 168).[166])

Sind nun P_1' und P_2' zwei Punkte der Achse $p' = \Pi_1 \times \Pi_2$, so gehen deren Polarebenen Π_1' und Π_2' nach **13**, II sowohl durch P_1 als durch P_2, somit auch durch $p = P_1 P_2$. Daher ist p auch die Polare von p'. Die Beziehung zwischen p und p' ist reziprok.

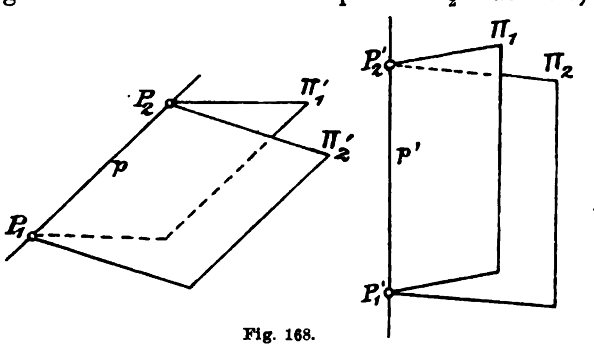


Fig. 168.

I. *Zwei Gerade, von denen jede die Schnittlinie der Polarebenen zweier Punkte der andern ist, heißen reziproke Polaren.*

II. *Die Polarebenen aller Punkte der einen von zwei reziproken Polaren gehen durch die andere.*

III. *Jeder Punkt der einen von zwei reziproken Polaren ist harmonischer Pol jedes Punktes der andern.*

IV. *Jede gemeinsame Transversale von zwei reziproken Polaren wird von diesen und der Fläche harmonisch geteilt.*

Aus I folgt mit Rücksicht auf **9**, III:

V. *Die Verbindungslinie zweier Punkte der Fläche hat als reziproke Polare die Schnittlinie der Tangentialebenen der beiden Punkte.*

Da III auch für die unendlich fernen Punkte der beiden Polaren gilt, so folgt:

VI. *Zwischen den Richtungskosinus* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *und* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *von zwei reziproken Polaren besteht die Beziehung* (11).

16. Sich schneidende reziproke Polaren. Wenn zwei reziproke Polaren p und p' sich in einem Punkte P schneiden, so ist dieser nach **15**, III sein eigner harmonischer Pol, also nach **9**, II ein Punkt der Fläche. Seine Polarebene ist nach **9**, III die Tangentialebene in ihm. Diese geht aber, da P auf p und p' liegt, nach **15**, II durch p' und p. Dann sind nach § 67, **4**, II p und p' Tangenten.

Wenn sich zwei reziproke Polaren schneiden, so liegt ihr Schnittpunkt auf der Fläche und sie selbst sind Tangenten in ihm.

17. Konjugierte Tangenten. Ist t eine *Tangente der Fläche im Punkte* P, so erhält man die reziproke Polare t' von t als Schnittlinie der Polarebene Π von P und der Polarebene Π_1 eines beliebigen andern Punktes P_1 auf t. Da aber Π nach **9**, III die Tangentialebene in P ist und Π_1 nach **13**, III durch P geht, so ist t' auch *Tangente in* P_1.

I. *Die reziproke Polare einer Tangente der Fläche ist wieder Tangente mit gleichem Berührungspunkt.*

II. *Zwei Tangenten, die reziproke Polaren sind, heißen konjugierte Tangenten.*[167])

Die Tangente t ist auch die Verbindungslinie zweier unendlich benachbarter Punkte P und P_1 der Fläche selbst; also ist ihre reziproke Polare die Schnittlinie der unendlich benachbarten Tangentialebenen Π und Π_1, oder:

III. *Verschiebt sich der Berührungspunkt einer Tangentialebene in der Richtung einer Tangente, so dreht sich die Tangentialebene um die konjugierte Tangente.*

18. Analytische Bestimmung konjugierter Tangenten. Da nach **15**, VI zwischen den Richtungskosinus zweier konjugierter Tangenten, wie zwischen denen zweier reziproker Polaren, die Gleichung (11) besteht, so folgt mit Rücksicht auf § 67, (13):

Zwischen den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *und* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *zweier konjugierter Tangenten im Punkte* x_0, y_0, z_0 *der Fläche* $g(x, y, z) = 0$ *bestehen die Beziehungen:*

$$(21)\quad \begin{cases} g^0 = 0, \quad g_1{}^0\alpha_1 + g_2{}^0\beta_1 + g_3{}^0\gamma_1 = 0, \quad g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 + g_3{}^0\gamma_2 = 0, \\ h_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\alpha_2 + h_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\beta_2 + h_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\,\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Sie bestimmen bei gegebenem $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Verhältnisse von $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder umgekehrt.

19. Konjugierte Tangenten und Erzeugende. Eine gemeinsame Transversale $s = PP'$ von zwei konjugierten Tangenten t und t' (Fig. 169) im Punkte P_0 liegt in der Tangentialebene von P_0, die die Fläche nach § 67, 8 in den durch P_0 gehenden Erzeugenden e und e' schneidet. Die Schnittpunkte S und S' von s mit der Fläche liegen daher auf e und e', und da sie nach **15**, IV zu P und P' harmonisch sind, so folgt (I § 5, 6):

I. *Zwei konjugierte Tangenten im Punkte P_0 der Fläche sind zu den beiden Erzeugenden der Fläche die durch ihn gehen, harmonisch;* oder auch (§ 8, **10**):

II. *Die Paare konjugierter Tangenten in einem Punkte der Fläche bilden eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Erzeugenden sind.*

Fig. 169.

20. Konjugierte Tangenten und Berührungskegel. Der vom Punkte P_1 an die Fläche gelegte Berührungskegel (Fig. 170) berührt nach **10** in einem Kegelschnitt k, der in der Polarebene Π_1 liegt. Ist nun P der Berührungspunkt einer Erzeugenden t dieses Kegels, also eine Tangente der Fläche in P, so liegt die konjugierte Tangente t' nach **15**, I sowohl in der Ebene Π_1 als in der Tangentialebene von P, ist also Tangente des Kegelschnittes k in P:

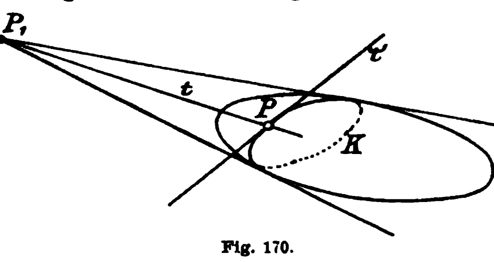


Fig. 170.

I. *Eine Erzeugende eines Berührungskegels und die zugehörige Tangente der Berührungskurve sind konjugierte Tangenten.*

II. *Beschreibt eine Gerade einen Berührungskegel, so umhüllt die reziproke Polare dessen Berührungskurve.*

21. Zusammenfallende reziproke Polaren. Wenn zwei reziproke Polaren zusammenfallen, müssen nach **15**, III alle ihre Punkte ihre eignen harmonischen Pole, also nach **9**, II Punkte der Fläche sein:

I. *Jede Gerade, die mit ihrer reziproken Polaren zusammenfällt, ist eine Erzeugende.*

Da andererseits eine Erzeugende nach § 67, **8** zu den Tangenten irgendeines ihrer Punkte, P_0, gehört, so ist ihre reziproke Polare nach **17**, I ihre konjugierte Tangente in P_0, also nach **19**, II die Erzeugende selbst:

II. *Jede Erzeugende ist ihre eigne reziproke Polare.*

In der Tat gehen auch die Bedingungen (21) mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in die Bedingungen § 67, (25) der Erzeugenden über.[156])

22. Die Koordinaten der Polare. Sind $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ zwei Punkte einer Geraden mit den Strahlenkoordinaten p_{kl}, so sind die Achsenkoordinaten q'_{kl} der Schnittlinie ihrer Polarebenen (19) die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix (I § 48, (3)):

$$\begin{vmatrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Diese stellen sich aber mit Rücksicht auf die Bedeutung von f_1, f_2, f_3, f_4 (§ 66, (5)) nach dem Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 3, (4)) also dar:

$$\begin{vmatrix} f_2^{(1)} & f_3^{(1)} \\ f_2^{(2)} & f_3^{(2)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots,$$

so daß sich als Ausdruck der Definition **15**, I allgemein ergibt (§ 66, **6**):

Sind p_{kl} die Strahlenkoordinaten einer geraden Linie, so sind die Achsenkoordinaten q'_{kl} ihrer reziproken Polaren in bezug auf die Fläche § 67, (5) *mit einem Faktor* ϱ:

$$(22)\quad \begin{cases} \varrho q'_{23} = \varphi_1 = \alpha_{11} p_{23} + \alpha_{12} p_{31} + \alpha_{13} p_{12} + \alpha_{14} p_{14} + \alpha_{15} p_{24} + \alpha_{16} p_{34}, \\ \varrho q'_{31} = \varphi_2 = \alpha_{21} p_{23} + \alpha_{22} p_{31} + \alpha_{23} p_{12} + \alpha_{24} p_{14} + \alpha_{25} p_{24} + \alpha_{26} p_{34}, \\ \varrho q'_{12} = \varphi_3 = \alpha_{31} p_{23} + \alpha_{32} p_{31} + \alpha_{33} p_{12} + \alpha_{34} p_{14} + \alpha_{35} p_{24} + \alpha_{36} p_{34}, \\ \varrho q'_{14} = \varphi_4 = \alpha_{41} p_{23} + \alpha_{42} p_{31} + \alpha_{43} p_{12} + \alpha_{44} p_{14} + \alpha_{45} p_{24} + \alpha_{46} p_{34}, \\ \varrho q'_{24} = \varphi_5 = \alpha_{51} p_{23} + \alpha_{52} p_{31} + \alpha_{53} p_{12} + \alpha_{54} p_{14} + \alpha_{55} p_{24} + \alpha_{56} p_{34}, \\ \varrho q'_{34} = \varphi_6 = \alpha_{61} p_{23} + \alpha_{62} p_{31} + \alpha_{63} p_{12} + \alpha_{64} p_{14} + \alpha_{65} p_{24} + \alpha_{66} p_{34}. \end{cases}$$

Jede Gerade, für welche die hierin nach Analogie von § 66, (5) *mit φ_k bezeichneten linearen Funktionen ihrer Strahlenkoordinaten p_{kl} nicht sämtlich verschwinden, hat eine bestimmte reziproke Polare* (vgl. **12**).

23. Polarebenen der Punkte eines Punktfeldes. Die Polarebenen dreier Punkte $P_i = x_i, y_i, z_i, t_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sind nach (14):

$$(23)\qquad X_i = f_1^{(i)} x + f_2^{(i)} y + f_3^{(i)} z + f_4^{(i)} t = 0.$$

Die Polarebene eines Punktes:

$$x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3, \quad y_1 + \lambda y_2 + \mu y_3, \quad z_1 + \lambda z_2 + \mu z_3, \quad t_1 + \lambda t_2 + \mu t_3$$

der Verbindungsebene $P_1 P_2 P_3$ (I § 53, (3')) ist wie in (20):

$$(24)\qquad X_1 + \lambda X_2 + \mu X_3 = 0.$$

Daraus ergibt sich (I § 53, (2); I § 68, (10) und (1), (11) und (13)):

I. *Die Polarebenen der Punkte eines Punktfeldes bilden ein ihm projektives Ebenenbündel*[56]), oder abgekürzt:

II. *Durchläuft ein Punkt eine Ebene, so dreht sich seine Polarebene um einen Punkt.*

III. Vorausgesetzt ist hierbei, daß die drei Ebenen (23) drei bestimmte Ebenen mit einem bestimmten Schnittpunkt sind.

24. Der Pol einer Ebene. Unter der gleichen Voraussetzung entspricht daher einer Ebene Π des Raumes ein Punkt P, durch den die Polarebenen aller Punkte der Ebene Π gehen und der der *Pol der Ebene* Π heißt (§ 11, **16**).[57])

I. *Der Pol einer Ebene ist der Schnittpunkt der Polarebenen dreier Punkte der Ebene.*

II. *Die Polarebenen aller Punkte einer Ebene gehen durch deren Pol.*

Da hiernach der Pol P der Ebene Π auf der Polarebene Π' jedes Punktes P' von Π liegt, so geht nach **13**, II die Polarebene von P durch jeden Punkt P' von Π, ist also Π selbst:

III. *Eine Ebene ist die Polarebene ihres Poles*, oder:

IV. *Der Pol einer Ebene ist der Punkt, dessen Polarebene sie ist.*

25. Pol und Berührungspunkt. Um den Pol der Tangentialebene Π_0 im Punkte P_0 der Fläche zu finden, hat man nach **24**, I die Polarebenen dreier Punkte P_1, P_2, P_3 von Π_0 zum Durchschnitt zu bringen, wobei man $P_1 = P_0$ wählen kann. Die Polarebene von P_0 ist nach **9**, III Π_0 selbst, und die Polarebenen Π_2 und Π_3 von P_2 und P_3 gehen nach **13**, III durch P_0, so daß P_0 der Schnittpunkt von Π_1, Π_2, Π_3 ist:

Der Pol einer Tangentialebene ist ihr Berührungspunkt.

26. Die Koordinaten des Poles. Sind $P_i = x_i, y_i, z_i, t_i$ drei Punkte einer Ebene mit den Koordinaten u, v, w, s, so sind die Koordinaten des Schnittpunktes ihrer Polarebenen (23) die Unterdeterminanten dritten Grades der Matrix (I § 51, (11)):

$$\left|\begin{matrix} f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \\ f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} \end{matrix}\right|.$$

Für diese aber ergibt sich aus dem Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 3, (3)):

$$\left|\begin{matrix} f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} \\ f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} \\ f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ y_3 & z_3 & t_3 \end{matrix}\right| + \cdots + \cdots + \cdots,$$

so daß sich als Ausdruck der Definition **24**, I allgemein ergibt:

Die Koordinaten des Poles einer Ebene u, v, w, s sind mit einem Faktor σ:

$$(25)\quad \begin{cases} \sigma x = F_1 = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}s, \\ \sigma y = F_2 = A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w + A_{24}s, \\ \sigma z = F_3 = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w + A_{34}s, \\ \sigma t = F_4 = A_{41}u + A_{42}v + A_{43}w + A_{44}s. \end{cases}$$

Jede Ebene, für welche die hierin nach Analogie von § 66, (5) *mit F_k bezeichneten linearen Funktionen ihrer Koordinaten u, v, w, s nicht sämtlich verschwinden, hat einen bestimmten Pol* (vgl. **22**).

Wenn die Determinante A (§ 66, (15)) $\neq 0$ ist, sind die Gleichungen (25) die Auflösungen der Gleichungen (18) entsprechend dem Satze **24**, III (§ 11, **18**).

27. Sich schneidende Gerade. Wenn sich zwei Gerade p_1 und p_2 in einem Punkte P schneiden, so bestimmen sie eine Ebene Π'. Ist nun P_1 ein Punkt auf p_1, und P_2 ein solcher auf p_2, so schneiden sich die Polarebenen Π und Π_1 von P und P_1, bezüglich Π und Π_2 von P und P_2 nach **15**, I in den reziproken Polaren p_1' und p_2' von p_1 und p_2. Diese gehen also durch den Schnittpunkt der drei Ebenen Π, Π_1, Π_2, nach **24**, I, den Pol der Ebene Π'.

I. *Wenn sich zwei Gerade schneiden, so schneiden sich auch ihre reziproken Polaren; der Schnittpunkt des einen Paares ist der Pol der Ebene des andern.*

Ist nun t eine gemeinsame Transversale von zwei reziproken Polaren p und p', und t' ihre reziproke Polare, so schneiden sich nach Voraussetzung t und p, sowie t und p', also nach I auch t' und p', sowie t' und p, also:

II. *Ist eine Gerade t gemeinsame Transversale von zwei reziproken Polaren p und p', so ist ihre reziproke Polare t' auch gemeinsame Transversale von p und p'.*

28. Gleichung des Poles. Wir entnahmen die Koordinaten (18) der Polarebene aus der Gleichung (14) unter Weglassung des Index 1. Umgekehrt können wir aus den Koordinaten (25) des Poles unter Hinzufügung des Index 1 die Gleichung entnehmen:

Die Gleichung des Poles der Ebene $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ in bezug auf die Fläche § 67, (5) *in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s lautet:*

$$(26)\quad F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}w + F_4^{(1)}s = 0.$$

29. Konjugierte Punkte und Ebenen. Geht eine Ebene $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$ durch den Pol der Ebene Π_1, so genügt sie der Gleichung (26), so daß:

$$(27) \qquad F_1^{(1)} u_2 + F_2^{(1)} v_2 + F_3^{(1)} w_2 + F_4^{(1)} s_2 = 0.$$

Diese Gleichung kann aber mit Rücksicht auf die Bedeutung (25) der F_k entsprechend § 66, (7) in der Form geschrieben werden:

$$(27) \qquad F_1^{(2)} u_1 + F_2^{(2)} v_1 + F_3^{(2)} w_1 + F_4^{(2)} s_1 = 0,$$

ist also in u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 symmetrisch. Daher geht Π_1 durch den Pol von Π_2.

I. Wie also die Gleichung (8) nach **13**, I die Beziehung *zweier Punkte P_1 und P_2 ausdrückt, von denen jeder mit der Polarebene des andern vereinigt liegt*, so die Gleichung (27) die Beziehung *zweier Ebenen Π_1 und Π_2, von denen jede mit dem Pol der andern vereinigt liegt* (§ 11, **20**).

II. Wir nennen *zwei solche Punkte* P_1 und P_2, ebenso aber *zwei solche Ebenen* Π_1 und Π_2 *in bezug auf die Fläche konjugiert.* Auch ein *Punkt* und eine *Gerade* heißen *konjugiert*, wenn diese mit der Polarebene jenes, eine *Ebene* und eine *Gerade*, wenn diese mit dem Pol jener vereinigt liegt.[51])

Konjugierte Punkte bedeutet dasselbe, wie harmonische Pole.

30. Die Gleichung der Polare in laufenden Strahlenkoordinaten. Hat die Gerade p_1 die Strahlenkoordinaten $p_{kl}^{(1)}$, so hat ihre reziproke Polare p_1' nach (22) die Achsenkoordinaten:

$$\varrho q_{23}'^{(1)} = \varphi_1^{(1)}, \quad \varrho q_{31}'^{(1)} = \varphi_2^{(1)}, \cdots.$$

Alle Geraden p, welche die reziproke Polare p_1' von p_1 schneiden, genügen daher (I § 48, (21)) der Gleichung:

$$(28) \quad \varphi_1^{(1)} p_{23} + \varphi_2^{(1)} p_{31} + \varphi_3^{(1)} p_{12} + \varphi_4^{(1)} p_{14} + \varphi_5^{(1)} p_{24} + \varphi_6^{(1)} p_{34} = 0.$$

Sie ist (I § 60, (8)) *die Gleichung der reziproken Polare der Geraden p_1 in bezug auf die Fläche* § 67, (5) *in laufenden Strahlenkoordinaten* (vgl. (14); (26)).

31. Konjugierte Gerade. I. *Jede Gerade p_2, welche mit der reziproken Polare p_1' der Geraden p_1 vereinigt liegt* (sie schneidet oder mit ihr zusammenfällt), *heißt zu p_1 konjugiert.* Die Bedingung dafür ist nach (28)[166]):

$$(29) \quad \varphi_{12} = \varphi_1^{(1)} p_{23}^{(2)} + \varphi_2^{(1)} p_{31}^{(2)} + \varphi_3^{(1)} p_{12}^{(2)} + \varphi_4^{(1)} p_{14}^{(2)} + \varphi_5^{(1)} p_{24}^{(2)} + \varphi_6^{(1)} p_{34}^{(2)} = 0.$$

Sie kann mit Rücksicht auf die Bedeutung (22) der φ_k, entsprechend § 66, (7), auch in der Form:

$$(29) \quad \varphi_{12} = \varphi_1^{(2)} p_{23}^{(1)} + \varphi_2^{(2)} p_{31}^{(1)} + \varphi_3^{(2)} p_{12}^{(1)} + \varphi_4^{(2)} p_{14}^{(1)} + \varphi_5^{(2)} p_{24}^{(1)} + \varphi_6^{(2)} p_{34}^{(1)} = 0$$

geschrieben werden, ist also in $p_{kl}^{(1)}$ und $p_{kl}^{(2)}$ symmetrisch. Daraus folgt, wie unter **13**:

II. *Liegt die Gerade p_2 mit der reziproken Polare p_1' der Geraden p_1 vereinigt, so liegt auch p_1 mit der reziproken Polare p_2' von p_2 vereinigt.*

Das Verhältnis der beiden Geraden p_1 und p_2 ist daher gegenseitig; sie bilden *unter der Bedingung* (29) *oder* (30) *ein Paar konjugierter Geraden* (**29**, II).

III. *Von zwei konjugierten Geraden liegt jede mit der reziproken Polare der andern vereinigt.*

Eine Gerade ist nach I *zu sich selbst konjugiert*, wenn sie ihre reziproke Polare schneidet, also mit Rücksicht auf **16** und **17**:

IV. *Eine Gerade ist immer dann und nur dann zu sich selbst konjugiert, wenn sie Tangente der Fläche ist* (vgl. **9**, II).

Zwei konjugierte Tangenten, wie überhaupt zwei reziproke Polaren, sind auch im Sinne von III konjugiert.

§ 69. Die Gleichungen der Kugel.

1. Die Normalform der Gleichung der Kugel. *Die Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt $M = a, b, c$ und dem Radius r lautet* (I § 34, (7)):

$$(1) \qquad k(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

oder entwickelt:

$$(2) \quad k(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + e = 0; \quad e = a^2 + b^2 + c^2 - r^2,$$

wo $k(x, y, z)$, wie § 66, (1), als Abkürzung für die linke Seite der Gleichung dient.

Man nennt die Gleichung in der vorliegenden Form, *wo der Koeffizient von $x^2 + y^2 + z^2$ die Einheit ist, die Normalform*[58]) der Gleichung der Kugel (vgl. § 12, **1**).

2. Quadratische Gleichung der Schnittpunkte mit einer Geraden. Die für die Fläche $g = 0$ § 66, (1) mit g_1, g_2, g_3, g_4; h bezeichneten Ausdrücke § 66, (8); (10) sind hier:

$$(3) \quad \begin{gathered} g_1 = k_1 = x - a,\ g_2 = k_2 = y - b,\ g_3 = k_3 = z - c,\ g_4 = k_4 = -ax - by - cz + e; \\ h = x^2 + y^2 + z^2. \end{gathered}$$

Für drei Richtungskosinus α, β, γ ist daher (I § 33, (18)):

$$(4) \qquad h(\alpha, \beta, \gamma) = 1.$$

Aus § 67, (4) folgt alsdann:

Die gerade Linie:

(5) $$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s$$

schneidet die Kugel* (1) *in zwei Punkten S_1 und S_2, deren gemeine Koordinaten s_1 und s_2 in bezug auf den Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind:

(6) $$s^2 + 2\{(x_0 - a)\alpha + (y_0 - b)\beta + (z_0 - c)\gamma\}s + k(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

3. Begriff der Potenz eines Punktes. Das Produkt der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (6):

(7) $$s_1 s_2 = k(x_0, y_0, z_0)$$

ist nur von a, b, c, r; x_0, y_0, z_0 abhängig, aber *unabhängig von α, β, γ*. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Wurzeln (§ 67, **1**) als relativer Abstände der Punkte S_1 und S_2 von P_0 (§ 12, Fig. 58):

Sind S_1 und S_2 die Schnittpunkte der Kugel mit einer durch den Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ gehenden Geraden von wechselnder Richtung, so hat das Produkt der relativen Abstände P_0S_1 und P_0S_2 einen unveränderlichen Wert:

(8) $$P_0S_1 \cdot P_0S_2 = k(x_0, y_0, z_0).$$

Dieser dem Punkte P_0 eigentümliche Wert heißt *die Potenz des Punktes P_0 in bezug auf die Kugel.*[59])

4. Besondere Darstellungen der Potenz. Ist $P_0M = d$ die Zentraldistanz des Punktes P_0, so ist:

(9) $$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 = d^2,$$

also nach (1):

(10) $$k(x_0, y_0, z_0) = d^2 - r^2.$$

Die Potenz (8) *des Punktes P_0 ist die Differenz der Quadrate der Zentraldistanz P_0M und des Radius.*

Indem man andererseits die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 (Fig. 58) im Berührungspunkt T einer von P_0 an die Kugel gelegten Tangente zusammenfallen läßt, erhält man aus (8):

(11) $$P_0T \cdot P_0T = k(x_0, y_0, z_0).$$

Die Potenz des Punktes P_0 ist das Quadrat der Länge der von P_0 an die Kugel gelegten Tangente.

5. Abhängigkeit der Potenz von der Lage des Punktes. Indem wir den Index 0 fallen lassen, wiederholen wir die Sätze über die Potenz in der folgenden Form:

Wird die linke Seite $k(x, y, z)$ der Normalgleichung (1) *der Kugel für einen beliebigen Punkt $P = x, y, z$ des Raumes gebildet, so gibt sie den Wert der Potenz des Punktes P in bezug auf die Kugel an:*

$$(12) \qquad k(x, y, z) = PS_1 \cdot PS_2 = d^2 - r^2 = (PT)^2.$$

Die Potenz ist als Produkt der relativen Längen PS_1 und PS_2 oder als Differenz $d^2 - r^2$ *positiv* oder *negativ* (Fig. 59), je nachdem P *außerhalb* oder *innerhalb* der Kugel liegt. Für die *Punkte der Kugel* selbst ist die Potenz *Null.*

Die *Potenz des Mittelpunktes M* ist:

$$(13) \qquad k(a, b, c) = -r^2.$$

Bei negativer Potenz ist die Tangentenlänge PT nicht reell (§ 12, 5).

6. Tangentialebene und Polarebene bei der Kugel. Mittels der Ausdrücke (3) ergibt sich aus § 67, (16):

Die Tangentialebene der Kugel (1) *im Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ hat die Gleichung:*

$$(14) \qquad (x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0$$

oder auch nach § 67, (18):

$$(15) \qquad (x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) - r^2 = 0.$$

Für die *Polarebene* eines Punktes P_0 in bezug auf die Kugel ergibt sich aus § 68, (15) ebenfalls die Gleichung (15).

Da die Koeffizienten von x, y, z in dieser den Richtungskosinus der Zentrallinie MP_0 proportional sind (I § 34, (7)), so folgt (I § 41 (5)):

Die Polarebene des Punktes P_0 steht auf der Zentrallinie MP_0 (die Tangentialebene auf dem Radius) senkrecht.

7. Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen. *Der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen der Kugel von gegebener Richtung α, β, γ* ist nach § 68, (2) mit den Werten (3):

$$(16) \qquad \alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0,$$

also *die zur Richtung α, β, γ senkrechte Diametralebene* (I § 41, (5); § 40, (18)).

8. Berührungskegel an die Kugel. Die Gleichung des vom Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ an die Kugel gelegten *Berührungskegels* ist nach § 67, (22) oder (24):

$$(17) \qquad \begin{aligned} &k(x_0, y_0, z_0)\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\} \\ &-\{(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0)\}^2 = 0. \end{aligned}$$

oder:

$$(18) \qquad \begin{aligned} &k(x_0, y_0, z_0) k(x, y, z) \\ &-\{(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) - r^2\}^2 = 0. \end{aligned}$$

Er ist als Kegel über dem Schnittkreis der Kugel mit der Polarebene (§ 68, **10**) und mit Rücksicht auf den Schlußsatz von **6** ein *gerader Kreiskegel* (vgl. den direkten Beweis später § 100, **4**).

9. Die Nullkugel. Mit Rücksicht auf (3) und (1) lauten die Bedingungen des Doppelpunktes § 67, (29) bei der Kugel:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad r = 0,$$

Die Kugel hat einen *Doppelpunkt*, ihren *Mittelpunkt*, wenn ihr *Radius verschwindet.*

Die Kugel mit verschwindendem Radius (§ 12, (18)):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 0 \tag{19}$$

heißt *Punktkugel* oder *Nullkugel* oder *Kugelkegel.* Ihre Gleichung (19) fällt nämlich bei Einführung des Mittelpunktes als Koordinatenanfang (I § 37, (1)) unter die Gleichung des *Kegels* § 54, (14), wenn dort: $a^2 = b^2 = -c^2$ gesetzt wird (vgl. weiterhin § 71, (1)).[60])

10. Die allgemeine Gleichung der Kugel. Im Gegensatz zur Normalgleichung bilden wir mit fünf beliebigen Konstanten A, B, C, D, E die *allgemeine Gleichung der Kugel:*

$$D(x^2 + y^2 + z^2) - 2Ax - 2By - 2Cz + E = 0. \tag{20}$$

Sie kann auf die Form (1) oder (2) gebracht werden mit:

$$a = \frac{A}{D}, \quad b = \frac{B}{D}, \quad c = \frac{C}{D}; \quad e = \frac{E}{D}, \quad r^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - DE}{D^2}. \tag{21}$$

Sie stellt daher für $D \neq 0$ eine *reelle Kugel* oder eine *Punktkugel* oder eine *„imaginäre Kugel“* dar, je nachdem:

$$A^2 + B^2 + C^2 - DE > 0, \quad = 0 \text{ oder } < 0. \tag{22}$$

In homogener Form (§ 66, (3)):

$$D(x^2 + y^2 + z^2) - 2Axt - 2Byt - 2Czt + Et^2 = 0 \tag{23}$$

umfaßt sie außerdem für $D = 0$ ein *Ebenenpaar, das aus einer endlichen Ebene:*

$$2Ax + 2By + 2Cz - Et = 0 \tag{24}$$

und der unendlich fernen Ebene $t = 0$ besteht, und für $D = 0$, $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die *doppelte unendlich ferne Ebene.*

Im ersten Fall ist der Mittelpunkt a, b, c nach (21) in der Richtung $A : B : C$ *unendlich fern,* im zweiten *unbestimmt.*

11. Der imaginäre Kugelkreis. Für $D \neq 0$, also wenn die unendlich ferne Ebene $t = 0$ der Fläche (23) nicht ganz angehört, schneidet sie die Kugel in der eigentlichen Kurve zweiter Ordnung (§ 49, **3**).

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0, \tag{25}$$

die von den Konstanten der Kugel ganz unabhängig ist. Sie ist imaginär, da neben $t = 0$ nicht auch x, y, z alle drei verschwinden können (I § 47, **1**).

Alle Kugeln schneiden die unendlich ferne Ebene in derselben imaginären Linie zweiter Ordnung, dem „imaginären Kugelkreis".[60])

12. Die Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten. Eine *Tangentialebene* der Kugel ist dadurch gekennzeichnet, daß ihr senkrechter Abstand vom Mittelpunkt M gleich dem Radius r ist. Hat nun eine Ebene die homogenen Koordinaten u, v, w, s (I § 47, **1**), so ist ihr Abstand δ vom Punkte $M = a, b, c$, abgesehen vom Vorzeichen (I § 45, (17)):

$$\delta = \frac{au + bv + cw + s}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}. \tag{26}$$

Die Bedingung, daß die Ebene Tangentialebene der Kugel (1) ist, wird daher:

$$\frac{(au + bv + cw + s)^2}{u^2 + v^2 + w^2} = r^2$$

oder (§ 12, (27)):

Die Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt a, b, c und dem Radius r in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s lautet:[61])

$$(au + bv + cw + s)^2 - (u^2 + v^2 + w^2)r^2 = 0. \tag{27}$$

Mit $r = 0$ stellt diese Gleichung, deren linke Seite dann ein vollständiges Quadrat wird, den doppelt gerechneten Mittelpunkt in Ebenenkoordinaten dar (I § 47, (2')).

13. Die Gleichung der Kugel in Linienkoordinaten. Eine *Tangente* der Kugel ist dadurch gekennzeichnet, daß ihr senkrechter Abstand vom Mittelpunkt gleich dem Radius ist. Für das Quadrat des Abstandes δ des Punktes a, b, c von der Geraden:

$$x - x_0 : y - y_0 : z - z_0 = \alpha : \beta : \gamma$$

ist nun (I § 43, (20)):

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\delta^2 = (\beta z_0 - \gamma y_0 - c\beta + b\gamma)^2 + (\gamma x_0 - \alpha z_0 - a\gamma + c\alpha)^2 + (\alpha y_0 - \beta x_0 - b\alpha + a\beta)^2$$

oder in den Strahlenkoordinaten der Geraden geschrieben (I § 48, (18)) und $\delta^2 = r^2$ gesetzt:

$$\begin{cases} (p_{23} - cp_{24} + bp_{34})^2 + (p_{31} - ap_{34} + cp_{14})^2 + (p_{12} - bp_{14} + ap_{24})^2 \\ \qquad - (p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2)^2 r^2 = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Dies ist also die *Bedingung, daß die Gerade p_{kl} Tangente der Kugel mit dem Mittelpunkt a, b, c und dem Radius r sei, oder die Gleichung der Kugel in laufenden Strahlenkoordinaten.*[61])

Sie geht auch aus (17) oder (18) durch Anordnen nach den Strahlenkoordinaten der Verbindungslinie der Punkte x_0, y_0, z_0 und x, y, z (I § 48, (3')) hervor.

14. Bestimmung der Kugel durch vier Punkte. Soll die Kugel (20) durch vier gegebene (endliche) Punkte $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2, 3, 4)$ gehen, müssen die vier Konstantenverhältnisse $D : A : B : C : E$ den vier Gleichungen genügen:

$$D(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2Ax_i - 2By_i - 2Cz_i + E = 0. \tag{29}$$

Die Gleichung der dem Tetraeder der vier Punkte umbeschriebenen Kugel (Umkugel) ist daher:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Die *neun* Punkte, die nach § 66, **10** eine Fläche zweiter Ordnung bestimmen, kommen hier auf *vier* zurück (§ 12, **12**), weil der Kegelschnitt (25) schon *fünf* Punkte vertritt (§ 9, **9**).

§ 70. Tangentialebenen der Ellipsoide, Hyperboloide und Paraboloide.

1. Vereinigte Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide. In die Gleichung des *Ellipsoids* (§ 55, (7)):

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

begreifen wir zugleich die des *ein-* und *zweischaligen Hyperboloids* und des *„imaginären Ellipsoids"*[62]) ein, indem wir statt a^2, b^2, c^2 geschrieben denken $a^2, b^2, -c^2$; $a^2, -b^2, -c^2$ oder $-a^2, -b^2, -c^2$.

Die in § 66, (8); (11) eingeführten Abkürzungen werden für die Gleichung (1):

$$g_1(x, y, z) = h_1(x, y, z) = \frac{x}{a^2}, \; g_2 = h_2 = \frac{y}{b^2}, \; g_3 = h_3 = \frac{z}{c^2}, \; g_4 = -1. \tag{2}$$

Der Anfangspunkt O ist nach § 68, (5) der *Mittelpunkt* der Fläche (1) (vgl. § 55, **2**). Ein *Doppelpunkt* ist nach § 67, (30) *nicht* vorhanden.

2. Gleichung der Tangentialebene. Aus § 67, (18) folgt als *Gleichung der Tangentialebene der Fläche* (1) *im Punkte* x_0, y_0, z_0 (§ 13, **2**):

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1 = 0, \tag{3}$$

wobei (§ 67, (12)):

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{4}$$

Für *die Richtungskosinus* $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ *und die absolute Länge* p_0 *des vom Mittelpunkt O auf die Tangentialebene gefällten Perpendikels* ergibt sich daher (I § 41, (5); (13)):

$$\alpha_0 = \frac{p_0 x_0}{a^2}, \quad \beta_0 = \frac{p_0 y_0}{b^2}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 z_0}{c^2}, \tag{5}$$

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \tag{6}$$

Die *Hessesche Normalform* der Gleichung der Tangentialebene (I § 41, (15)) lautet dann:

$$p_0\left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1\right) = 0. \tag{7}$$

3. Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide in Ebenenkoordinaten. Soll die Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \tag{8}$$

Tangentialebene der Fläche (1) sein, so muß die Gleichung (8) mittels eines der Bedingung (4) genügenden Punktes x_0, y_0, z_0 auf die Form (3) gebracht werden können, also zunächst sein:

$$u = -\frac{x_0}{a^2}, \quad v = -\frac{y_0}{b^2}, \quad w = -\frac{z_0}{c^2}. \tag{9}$$

Durch Elimination von x_0, y_0, z_0 aus (4) und (9) folgt aber:

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 = 0. \tag{10}$$

Dies ist die Bedingung, daß die Ebene u, v, w Tangentialebene der Fläche (1) ist (§ 13, (18)), oder die *Gleichung des Ellipsoids oder Hyperboloids* (1) *in laufenden Ebenenkoordinaten.*[65])

4. Berührungskegel an Ellipsoid oder Hyperboloid. Der von einem Punkte x_0, y_0, z_0 an die Fläche (1) gelegte *Berührungskegel* hat nach § 67, (22) die Gleichung (§ 13, (19)):

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)&\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right) \\ &- \left(\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z-z_0)}{c^2}\right)^2 = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

oder nach § 67, (24):

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} - 1\right)^2 = 0, \tag{12}$$

oder in der Form (11) nach Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ geordnet:

$$(13)\quad \begin{aligned}&\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\left(\frac{z_0^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\frac{(z-z_0)^2}{c^2}\\ &-2y_0z_0\frac{(y-y_0)(z-z_0)}{b^2c^2}-2z_0x_0\frac{(z-z_0)(x-x_0)}{c^2a^2}-2x_0y_0\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{a^2b^2}=0.\end{aligned}$$

Für den *vom Mittelpunkt* $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ *an die Fläche gelegten Berührungskegel* ergibt sich aus (11):

$$(14)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Er ist nach § 55, (19) der *Asymptotenkegel* der Fläche (1).[10])

5. Kugelkegel als Berührungskegel. Die Gleichung (13) erhält die Form:

$$(15)\qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=0,$$

bedeutet also nach § 69, (19) einen *Kugelkegel*, wenn:

$$(16)\qquad y_0z_0=0,\quad z_0x_0=0,\quad x_0y_0=0;$$

$$(17)\qquad \frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)=\frac{1}{b^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right).$$

Die Gleichungen (16) verlangen, daß wenigstens zwei von den Koordinaten x_0, y_0, z_0 verschwinden. Ist aber etwa $y_0 = z_0 = 0$, geben die Gleichungen (17):

$$-\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)$$

oder:

$$b^2=c^2,\quad x_0^2=a^2-b^2.$$

Setzen wir nun voraus, daß in algebraischer Größenfolge:

$$(18)\qquad a^2 \geqq b^2 \geqq c^2,$$

so bleiben die drei Möglichkeiten:

$$(19)\qquad \begin{gathered} b^2=c^2,\ x_0^2=a^2-b^2,\ y_0=z_0=0;\ a^2=b^2,\ x_0=y_0=0,\ z_0^2=-(b^2-c^2);\\ a^2=b^2=c^2,\ x_0=y_0=z_0=0,\end{gathered}$$

die bezüglich auf das verlängerte Rotationsellipsoid und zweischalige Rotationshyperboloid § 53, (13); (14); auf das abgeplattete Rotationsellipsoid und einschalige Rotationshyperboloid § 53, (17); (18); und auf die Kugel führen, also:[2])

Die auf der jedesmaligen Rotationsachse liegenden (reellen oder imaginären) Brennpunkte der Rotationsellipsoide und Rotationshyperboloide, sowie der Mittelpunkt der Kugel haben die Eigenschaft, daß der von ihnen an die Fläche gelegte Berührungskegel ein Kugelkegel ist (vgl. § 13, 8, II, sowie später § 100, 6).

6. Konjugierte Tangenten. Zwischen den Richtungskosinus α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 von *zwei konjugierten Tangenten im Punkte* x_0, y_0, z_0 *der Fläche* (1) besteht nach § 68, (21) neben den drei Bedingungen:

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \dfrac{x_0\alpha_1}{a^2} + \dfrac{y_0\beta_1}{b^2} + \dfrac{z_0\gamma_1}{c^2} = 0, \quad \dfrac{x_0\alpha_2}{a^2} + \dfrac{y_0\beta_2}{b^2} + \dfrac{z_0\gamma_2}{c^2} = 0 \end{cases}$$

die Beziehung:

$$(21)\quad \frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2} = 0.$$

7. Gleichung der Ellipsoide und Hyperboloide in Linienkoordinaten. Die Gleichung (12) ist gleichzeitig die Bedingung, daß die Verbindungslinie des Punktes $P_0 = x_0, y_0, z_0$ und $P = x, y, z$ eine Tangente der Fläche (1) ist. Sie enthält in der Tat, in folgender Form geschrieben:

$$(22)\quad \frac{(y_0 z - z_0 y)^2}{b^2c^2} + \frac{(z_0 x - x_0 z)^2}{c^2a^2} + \frac{(x_0 y - y_0 x)^2}{a^2b^2} - \frac{(x_0 - x)^2}{a^2} - \frac{(y_0 - y)^2}{b^2} - \frac{(z_0 - z)^2}{c^2} = 0,$$

nur die sechs Koordinaten (I § 48, (3')) der Geraden P_0P (vgl. § 13, (23)) und lautet mit Einführung dieser:[168])

$$(23)\quad \frac{p_{23}^2}{b^2c^2} + \frac{p_{31}^2}{c^2a^2} + \frac{p_{12}^2}{a^2b^2} - \frac{p_{14}^2}{a^2} - \frac{p_{24}^2}{b^2} - \frac{p_{34}^2}{c^2} = 0.$$

Es ist die *Bedingung, daß die Gerade* p_{kl} *Tangente ist,* oder die *Gleichung der Fläche* (1) *in laufenden Strahlenkoordinaten (Komplexgleichung der Fläche).*

8. Vereinigte Gleichung der Paraboloide. In die Gleichung des *elliptischen Paraboloids:*

$$(24)\quad g(x, y, z) = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x + a = 0$$

begreifen wir zugleich das *hyperbolische* ein, indem wir $-c^2$ für c^2 geschrieben denken. Die Abkürzungen § 66, (8); (11) werden für die Gleichung (24):

$$(25)\quad g_1(x, y, z) = 1, \quad h_1 = 0, \quad g_2 = h_2 = \frac{y}{b^2}, \quad g_3 = h_3 = \frac{z}{c^2}, \quad g_4 = x + a.$$

Es ist *weder ein Mittelpunkt* (§ 68, (5)), *noch ein Doppelpunkt* (§ 67, (30)) vorhanden.

9. Gleichung der Tangentialebene. Aus § 67, (18) folgt als Gleichung der Tangentialebene des Paraboloids (24) im Punkte x_0, y_0, z_0:

$$(26)\quad \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} + x + x_0 + a = 0,$$

wobei:

$$\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} + 2x_0 + a = 0. \tag{27}$$

Demnach ergibt sich (I § 41, (5)) für die Richtungskosinus $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ der Normale der Fläche:

$$\alpha_0 = p_0, \quad \beta_0 = p_0 \frac{y_0}{b^2}, \quad \gamma_0 = p_0 \frac{z_0}{c^2}, \tag{28}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$p_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \tag{29}$$

10. Gleichung der Paraboloide in Ebenenkoordinaten. Soll die Ebene (8) Tangentialebene der Fläche (24) sein, muß die Gleichung (8) mittels eines der Bedingung (27) genügenden Punktes x_0, y_0, z_0 auf die Form (26) gebracht werden können, also zunächst sein:

$$u : v : w : 1 = 1 : \frac{y_0}{b^2} : \frac{z_0}{c^2} : x_0 + a. \tag{30}$$

Durch Elimination von x_0, y_0, z_0 aus (30) und (27) folgt aber:

$$b^2 v^2 + c^2 w^2 + 2u - a u^2 = 0, \tag{31}$$

oder homogen geschrieben:

$$b^2 v^2 + c^2 w^2 + 2us - a u^2 = 0. \tag{32}$$

Es ist die *Gleichung des Paraboloids* (24) *in laufenden Ebenenkoordinaten* u, v, w oder u, v, w, s.

Da ihr durch die Werte $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$ (I 47, (7)) genügt wird, so folgt:[9])

Das Paraboloid hat die unendlich ferne Ebene als Tangentialebene (§ 13, **14**).

11. Berührungskegel an das Paraboloid. Der von einem Punkte x_0, y_0, z_0 an das Paraboloid (24) gelegte *Berührungskegel* hat nach § 67, (22) die Gleichung:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} + 2x_0 + a\right)\left(\frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right) \\ &- \left((x - x_0) + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z-z_0)}{c^2}\right)^2 = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

oder nach § 67, (24):

$$\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} + 2x_0 + a\right)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x + a\right) - \left(\frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} + x + x_0 + a\right)^2 = 0, \tag{34}$$

oder in der Form (33) nach Potenzen von $x - x_0, y - y_0, z - z_0$ geordnet:

$$(35)\quad -(x-x_0)^2+\left(\frac{z_0^2}{c^2}+2x_0+a\right)\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\left(\frac{y_0^2}{b^2}+2x_0+a\right)\frac{(z-z_0)^2}{c^2}$$
$$-2y_0z_0\frac{(y-y_0)(z-z_0)}{b^2c^2}-2\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)(x-x_0)-2\frac{y_0}{b^2}(x-x_0)(y-y_0)=0.$$

12. Kugelkegel als Berührungskegel. Die Gleichung (35), mit $a=0$ vereinfacht, erhält die Form (15), wenn:

$$(36)\quad y_0=0,\ z_0=0,\ \frac{2x_0}{b^2}=\frac{2x_0}{c^2}=-1;\ b^2=c^2,\ x_0=-\frac{b^2}{2},\ y_0=z_0=0,$$

oder mit Rücksicht auf § 53, (24):

Der auf der Rotationsachse liegende Brennpunkt des Rotationsparaboloids hat die Eigenschaft, daß der von ihm an die Fläche gelegte Berührungskegel ein Kugelkegel ist (vgl. § 13, **16**, II; sowie später § 100, **6**).

13. Konjugierte Tangenten. Zwischen den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ von *zwei konjugierten Tangenten im Punkte* x_0, y_0, z_0 *der Fläche* (24) besteht nach § 68, (21) neben den Bedingungen:

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}+2x_0+a=0, \\ \alpha_1+\dfrac{y_0\beta_1}{b^2}+\dfrac{z_0\gamma_1}{c^2}=0,\quad \alpha_2+\dfrac{y_0\beta_2}{b^2}+\dfrac{z_0\gamma_2}{c^2}=0 \end{cases}$$

die Beziehung:

$$(38)\quad \frac{\beta_1\beta_2}{b^2}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2}=0.$$

Mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1=\alpha_2, \beta_2, \gamma_2=\alpha, \beta, \gamma$ erhält man (§ 68, **21**) für die Richtungkosinus der durch den Punkt x_0, y_0, z_0 des Paraboloids gehenden *Erzeugenden:*

$$(39)\quad \alpha+\frac{y_0\beta}{b^2}+\frac{z_0\gamma}{c^2}=0,\quad \frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}=0.$$

14. Gleichung der Paraboloide in Linienkoordinaten. Die Gleichung (34) kann, im Sinne von (22), in der Form geschrieben werden (vgl. § 13, (47)):

$$(40)\quad \begin{aligned} &\frac{(y_0z-z_0y)^2}{b^2c^2}-2\frac{(x_0y-y_0x)(y_0-y)}{b^2}+2\frac{(z_0x-x_0z)(z_0-z)}{c^2} \\ &\qquad -(x_0-x)^2+a\frac{(y_0-y)^2}{b^2}+a\frac{(z_0-z)^2}{c^2}=0, \end{aligned}$$

oder, wie bei (23):

$$(41)\quad \frac{p_{23}^2}{b^2c^2}-2\frac{p_{12}p_{24}}{b^2}+2\frac{p_{31}p_{34}}{c^2}-p_{14}^2+a\frac{p_{24}^2}{b^2}+a\frac{p_{34}^2}{c^2}=0.$$

Es ist die *Gleichung des Paraboloids* (24) *in laufenden Strahlenkoordinaten.*[168])

Bei Umkehrung des Vorzeichens von x in (24) wechseln in (41) p_{12}, p_{31}, p_{14} ihr Vorzeichen (I § 48, (3')).

§ 71. Tangentialebenen der Kegel; reziproke Kegel.

1. Vereinigte Gleichung des elliptischen und imaginären Kegels. In die Gleichung des *elliptischen Kegels:*

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

begreifen wir zugleich den *imaginären Kegel* ein, indem wir $-c^2$ für c^2 geschrieben denken.

Die Ausdrücke § 66, (8); (11) sind hier:

$$(2) \qquad g_1(x, y, z) = h_1(x, y, z) = \frac{x}{a^2}, \quad g_2 = h_2 = \frac{y}{b^2}, \quad g_3 = h_3 = -\frac{z}{c^2}, \quad g_4 = 0.$$

Der Anfangspunkt O ist der *Mittelpunkt* (§ 68, (5)) und zugleich der *Doppelpunkt* (§ 67, (30)) oder die *Spitze* des Kegels.

2. Gleichungen der Tangentialebene. Aus § 67, (18) folgt als *Gleichung der Tangentialebene des Kegels* (1) *in einem von der Spitze verschiedenen Punkte* x_0, y_0, z_0*:*

$$(3) \qquad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{z_0 z}{c^2} = 0,$$

wobei:

$$(4) \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 0.$$

Da in (3) nur die Verhältnisse $x_0 : y_0 : z_0$ eingehen (I § 33, (14)), so folgt: *Die Tangentialebene des Kegels ist längs jeder geradlinigen Erzeugenden dieselbe.* Sie berührt den Kegel *längs einer Erzeugenden*; man nennt sie auch eine *stationäre* Tangentialebene. Außer solchen Tangentialebenen im *engeren* Sinne müssen nach § 67, 9 alle durch die Spitze gehenden Ebenen als Tangentialebenen im weiteren Sinne gelten (vgl. § 13, 20).

3. Gleichungen des Kegels in Ebenenkoordinaten. Soll eine gegebene Ebene:

$$(5) \qquad ux + vy + wz + s = 0$$

Tangentialebene des Kegels (1) im engeren Sinne sein, muß nach (3) zunächst, wie auch für alle Tangentialebenen im weiteren Sinne (I § 47, (10)):

$$(6) \qquad s = 0$$

sein, ferner aber mit einem der Gleichung (4) genügenden Punkte x_0, y_0, z_0:

(7) $$u : v : w = \frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : -\frac{z_0}{c^2}.$$

Durch Elimination von $x_0 : y_0 : z_0$ aus (4) und (7) folgt dann:

Die Ebene u, v, w, s ist (stationäre) Tangentialebene des Kegels (1) *unter den beiden Bedingungen:*

(8) $a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0$ (9) $s = 0$.

Es sind die *beiden Gleichungen des Kegels in laufenden Ebenenkoordinaten* (§ 13, (58')).[69])

4. Der Kegel und seine unendlich ferne Leitkurve. Die Schnittlinien der stationären Tangentialebenen (8), (9) mit der unendlich fernen Ebene umhüllen *die unendlich ferne Kurve:*

(10) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad t = 0$$

des Kegels (1). Durch jede solche Schnittlinie geht aber (I § 47, **6**) das ganze Büschel derjenigen (parallelen) Ebenen u, v, w, s, für welche die Verhältnisse $u : v : w$ dieselben sind, wie bei der betreffenden stationären Tangentialebene (8), (9). Die ∞^2 solchen Ebenen, welche büschelweise durch die ∞^1 Tangenten der Kurve (10) gehen (§ 53, Fig. 124), bilden *deren Tangentialebenen* (I § 72, (16')). Es bedeuten daher (vgl. § 13, **21**) folgende *Gleichungen in laufenden Punkt- und Ebenenkoordinaten:*

(11) $g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	(11') $a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0$
den Kegel selbst;	*die unendlich ferne Kurve des Kegels*;
(12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad t = 0$	(12') $a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \; s = 0$
die unendlich ferne Kurve des Kegels.	*den Kegel selbst.*

5. Das berührende Ebenenpaar des Kegels. Der von einem Punkte x_0, y_0, z_0 an die Fläche (1) gelegte Berührungskegel hat nach § 67, (22) die Gleichung:

(13) $$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right)\left(\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right)$$
$$- \left(\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} - \frac{z_0(z-z_0)}{c^2}\right)^2 = 0$$

oder nach § 67, (24):

(14) $$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2}\right)^2 = 0$$

oder in anderer Anordnung:

$$(15)\qquad \frac{(y_0 z - z_0 y)^2}{b^2 c^2} + \frac{(z_0 x - x_0 z)^2}{c^2 a^2} - \frac{(x_0 y - y_0 x)^2}{a^2 b^2} = 0.$$

Soll andererseits eine Tangentialebene mit dem Berührungsstrahl $x' : y' : z'$ (vgl. (3), (4)):

$$\frac{x'x}{a^2} + \frac{y'y}{b^2} - \frac{z'z}{c^2} = 0, \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$$

durch den Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ gehen, so muß sein:

$$\frac{x'x_0}{a^2} + \frac{y'y_0}{b^2} - \frac{z'z_0}{c^2} = 0.$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen x', y', z', so erhält man die Bedingung für den laufenden Punkt x, y, z der durch P_0 gehenden Tangentialebenen. Aus der ersten und dritten folgt aber:

$$\frac{x'}{a} : \frac{y'}{b} : -\frac{z'}{c} = \frac{y_0 z - z_0 y}{bc} : \frac{z_0 x - x_0 z}{ca} : \frac{x_0 y - y_0 x}{ab},$$

und durch Substitution dieser Werte in die zweite geht die Gleichung (15) hervor, die somit ein *Ebenenpaar* darstellt. Also (vgl. 2):

Der vom Punkte $P_0 = x_0, y_0, z_0$ an den Kegel (1) *gelegte Berührungskegel* (13), (14) *oder* (15) *besteht aus den beiden durch den Strahl OP_0 an den Kegel gelegten Tangentialebenen.*

6. Gleichung des Kegels in Linienkoordinaten. Aus der Form (15) folgt nun, wie in § 70, 7:[168])

Die Gerade p_{kl} ist Tangente des Kegels (11) *unter der Bedingung:*

$$(16)\qquad a^2 p_{23}^2 + b^2 p_{31}^2 - c^2 p_{12}^2 = 0,$$

welche die *Gleichung des Kegels* (11) *in Strahlenkoordinaten* (Komplexgleichung) ist (I § 72, (24)).

Ihr genügen alle durch die Spitze gehenden Geraden (§ 67, 9), da für diese p_{23}, p_{31}, p_{12} verschwinden (I § 49, (6)), aber auch alle andern Tangenten, die nicht durch die Spitze gehen. Für diejenigen Tangenten, die in der unendlich fernen Ebene liegen, verschwinden außerdem p_{14}, p_{24}, p_{34} (I § 49, (3)), also:

Die Strahlenkoordinaten der Tangenten (*Erzeugenden*) *der unendlich fernen Kurve* (11′) *genügen den Gleichungen:*

$$(17)\qquad a^2 p_{23}^2 + b^2 p_{31}^2 - c^2 p_{12}^2 = 0, \quad p_{14} = 0, \quad p_{24} = 0, \quad p_{34} = 0.$$

Es gibt ∞^1 solche Tangenten; die Identität der Linienkoordinaten (I § 48, (5′)) ist mit (17) schon von selbst erfüllt.

7. Gleichung der unendlich fernen Kurve in Linienkoordinaten. Die Koordinaten p_{kl} einer Geraden, die mit einem unendlich fernen

Punkte $x, y, z, 0$ vereinigt liegt, genügen (I § 47, (14)); § 48, (19)) der Proportion:

(18) $$p_{14} : p_{24} : p_{34} = x : y : z$$

bei beliebigen Werten von p_{23}, p_{31}, p_{12}. *Alle Strahlen also, die durch einen Punkt der Kurve* (12) *gehen, entsprechen der Bedingung:*

(19) $$\frac{p_{14}^2}{a^2} + \frac{p_{24}^2}{b^2} - \frac{p_{34}^2}{c^2} = 0,$$

welche die *Gleichung der unendlich fernen Kurve* (11′) *in Strahlenkoordinaten* (Komplexgleichung) ist (I § 72, (24′)).

Ihr genügen alle in der unendlich fernen Ebene liegenden Geraden, da für diese p_{14}, p_{24}, p_{34} verschwinden (I § 49, (3)), aber auch alle andern Geraden, die sonst die Kurve treffen. Für diejenigen Treffgeraden, die durch den Anfangspunkt O gehen, verschwinden außerdem p_{23}, p_{31}, p_{12} (I § 49, (6)), also:

Die Strahlenkoordinaten der Erzeugenden des Kegels (11) *genügen den Gleichungen:*

(20) $$\frac{p_{14}^2}{a^2} + \frac{p_{24}^2}{b^2} - \frac{p_{34}^2}{c^2} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad p_{31} = 0, \quad p_{12} = 0.$$

Es gibt ∞^1 solche Erzeugende, wie bei (17).

8. Reziprokalkegel. Für den laufenden Punkt x, y, z einer im Punkte O zu der Tangentialebene (3) errichteten Senkrechten ist:

(21) $$x : y : z = \frac{x_0}{a^2} : \frac{y_0}{b^2} : -\frac{z_0}{c^2}.$$

Durch Elimination von x_0, y_0, z_0 hieraus und aus (4) ergibt sich:

(22) $$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0.$$

I. *Der Ort aller Geraden, die in der Spitze des elliptischen Kegels* (1) *senkrecht auf seinen Tangentialebenen errichtet werden, ist wieder ein elliptischer Kegel* (22).

Für den laufenden Punkt einer in O auf einer Tangentialebene:

(23) $a^2x_0x + b^2y_0y - c^2z_0z = 0$, (24) $a^2x_0^2 + b^2y_0^2 - c^2z_0^2 = 0$

des Kegels (22) errichteten Senkrechten ist:

(25) $$x : y : z = a^2x_0 : b^2y_0 : -c^2z_0.$$

Durch Elimination von x_0, y_0, z_0 aus (24) und (25) folgt als Ort dieser Punkte wieder der Kegel (1). Die Beziehung der beiden Kegel (1) und (22) ist *reziprok.*[169])

II. *Jeder der beiden reziproken Kegel* (1) *und* (22) *ist der Ort der Strahlen des Bündels an der gemeinsamen Spitze, die auf den Tangential-*

ebenen des andern senkrecht stehen, oder das Umhüllungsgebilde der Ebenen des Bündels, die auf den Erzeugenden des andern senkrecht stehen.

9. Fokallinien und Kreisschnitte der Reziprokalkegel. Die Fokallinien des Kegels (1) sind für $a^2 > b^2$ nach § 54, (15):

(26) $$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0, \quad y = 0.$$

Die Kreisschnittebenen des Kegels (22), für den dann $1 : b^2 > 1 : a^2$, sind nach § 59, (21) unter Vertauschung von x, y, a^2, b^2, c^2 *mit* $y, x, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{c^2}$:

(27) $$(a^2 - b^2)x^2 - (b^2 + c^2)z^2 = 0.$$

Die Fokallinien eines Kegels sind daher senkrecht zu den Kreisschnittebenen des Reziprokalkegels.

10. Der dual gleichseitige Kegel. Wenn der Kegel (1) unter der Bedingung § 64, (8) gleichseitig ist, also zu jeder Erzeugenden zwei zu dieser und unter sich senkrechte Erzeugende enthält, so besitzt der reziproke Kegel (22) nach 8, II zu jeder Tangentialebene zwei zu dieser und unter sich senkrechte Tangentialebenen und heißt *dual gleichseitig.*[164])

Da die Beziehung der beiden Kegel reziprok ist, kann man jede der beiden Eigenschaften in der Bezeichnung des ursprünglichen Kegels (1) ausdrücken und erhält mit gleichzeitiger Rücksicht auf § 64, 3 die Sätze:

Der elliptische Kegel:

(28) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

ist gleichseitig, wenn:

(29) $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Ein elliptischer Kegel, der ein Tripel rechtwinkliger Erzeugender enthält, enthält ∞^1 *solche Tripel* (ist gleichseitig).

ist dual gleichseitig, wenn:

(30) $$a^2 + b^2 - c^2 = 0.$$

Ein elliptischer Kegel, der ein Tripel rechtwinkliger Tangentialebenen enthält, enthält ∞^1 *solche Tripel* (ist dual gleichseitig).

Unter der Bedingung (30) heißt dann auch das *einschalige Hyperboloid:*

(31) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dual gleichseitig.

11. Das Ebenenpaar. Während der Kegel in Punktkoordinaten durch *eine* Gleichung (11) und in Ebenenkoordinaten durch *zwei*

Gleichungen (12') dargestellt wird, hat das in *Punktkoordinaten* durch die *eine* Gleichung gegebene Ebenenpaar:

(32)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

in *Ebenenkoordinaten drei* Gleichungen:[69])

(33) $a^2u^2 - b^2v^2 = 0,$ (34) $w = 0, \quad s = 0,$

denen die Koordinaten der beiden Ebenen des Paares selbst genügen (vgl. § 13, **20**).

Die Gleichung (33) allein stellt das *Schnittpunktpaar* dieser beiden Ebenen mit der unendlich fernen Geraden der xy-Ebene dar (I § 47, (2')), die Gleichungen (34) bezüglich den unendlich fernen Punkt der z-Achse und den Anfangspunkt (I § 47, (21)).

§ 72. Konjugierte Durchmesser und Diametralebenen der Ellipsoide, Hyperboloide und Kegel.

1. Die zu einem Durchmesser konjugierte Diametralebene. Jede durch den Mittelpunkt O des Ellipsoids oder Hyperboloids oder [Kegels]:

(1)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\;[0]$$

gehende Gerade oder Ebene heißt ein *Durchmesser*, bezüglich eine *Diametralebene.*[50])

Die nach § 68, (2) *der Richtung* α, β, γ *konjugierte Ebene*:

(2)
$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0$$

ist eine Diametralebene. Wir nennen sie hier, da die Richtung α, β, γ durch den Durchmesser dieser Richtung bezeichnet werden kann, *die dem Durchmesser* α, β, γ *konjugierte Diametralebene.*

I. *Die einem Durchmesser konjugierte Diametralebene halbiert alle ihm parallelen Sehnen* (§ 68, **2**).

II. *Sie ist die Polarebene des unendlich fernen Punktes des Durchmessers* (§ 68, **11**, I).

III. *Ihre unendlich ferne Gerade ist die reziproke Polare des Durchmessers* (§ 68, **11**, I; II; § 68, **15**, I).

Jeder Durchmesser hat nach (2) eine *bestimmte* konjugierte Diametralebene.

IV. Einer *Hauptachse* (z. B. $\alpha, \beta, \gamma = 1, 0, 0$) ist die zu ihr senkrechte *Hauptebene* ($x = 0$) konjugiert.

2. Der zu einer Diametralebene konjugierte Durchmesser. Die Gleichung einer beliebigen Diametralebene:

(3) $$ux + vy + wz = 0$$

wird auf die Form (2) gebracht durch die Annahme:

(4) $$\alpha : \beta : \gamma = a^2 u : b^2 v : c^2 w.$$

Damit ist der Durchmesser bestimmt, dessen konjugierte Diametralebene die gegebene (3) ist. Er heißt *der zu der Diametralebene u, v, w konjugierte Durchmesser.*

Jede Diametralebene hat einen *bestimmten* konjugierten Durchmesser. Je ein *Durchmesser* und eine *Diametralebene* entsprechen sich *wechselseitig eindeutig.*[70])

3. Die einer Diametralebene parallelen Tangentialebenen. Die Koordinaten der Schnittpunkte des Durchmessers α, β, γ mit dem Ellipsoid oder Hyperboloid (1), den Kegel ausgeschlossen, sind, wenn ϱ der Radius vector der Schnittpunkte ist (§ 14, 3):

$$x_0 = \varepsilon\varrho\alpha, \quad y_0 = \varepsilon\varrho\beta, \quad z_0 = \varepsilon\varrho\gamma; \quad \varepsilon = \pm 1; \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Die Tangentialebene der Fläche (1) in einem solchen Punkte (§ 70, (3)):

$$\varepsilon\varrho\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}\right) = 1$$

ist der Ebene (2) parallel.

Die in den Endpunkten eines Durchmessers an das Ellipsoid oder Hyperboloid gelegten Tangentialebenen sind der konjugierten Diametralebene parallel.

4. Vereinigte Lage von konjugierten Elementen. Die Gleichungen des Durchmessers α, β, γ sind:

(5) $$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma.$$

Er liegt in der zu ihm konjugierten Diametralebene (2), wenn seine Richtung α, β, γ der Bedingung:

(6) $$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 0$$

oder sein laufender Punkt x, y, z der Bedingung (I § 33, (14)):

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

genügt. Der Durchmesser gehört dann dem Asymptotenkegel (§ 70, (14)) an und die Ebene (2) ist die Tangentialebene dieses Kegels längs des Durchmessers (§ 71, (3)).

I. *Beim Ellipsoid liegt ein Durchmesser niemals in seiner konjugierten Diametralebene.*

II. *Bei dem Hyperboloid liegt ein Durchmesser in der ihm konjugierten Diametralebene, wenn er auf dem Asymptotenkegel* (vgl. § 14, **5**, III) *liegt, worauf die konjugierte Diametralebene die Tangentialebene des Kegels längs des Durchmessers wird.*

5. Zwei einander konjugierte Durchmesser. Die Bedingung:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{c^2} = 0 \tag{8}$$

drückt nach (3) ebensowohl aus, daß der Durchmesser $x:y:z = \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$ in der konjugierten Diametralebene des Durchmessers $x:y:z = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ liegt, als auch, daß dieser in der konjugierten Diametralebene jenes liegt (§ 68, **13**).

I. *Zwei Durchmesser, von denen jeder in der konjugierten Diametralebene des andern liegt, heißen zwei konjugierte Durchmesser.*

II. *Die Gleichung* (8) *ist die Bedingung für zwei konjugierte Durchmesser* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *und* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

III. *Der Ort aller einem Durchmesser konjugierten Durchmesser ist die zu ihm konjugierte Diametralebene.*

IV. *Zwei konjugierte Durchmesser sind* (nach **1**, III) *auch konjugierte Gerade im Sinne von* § 68, **31**.

V. *Ein Durchmesser ist zu sich selbst konjugierter Durchmesser, wenn er auf dem Asymptotenkegel liegt.*

6. Konjugierte Durchmesser eines Diametralschnittes. Da der Mittelpunkt der Fläche (1) alle durch ihn gehenden Sehnen halbiert, so ist er auch Mittelpunkt jedes Diametralschnittes. Da er ferner bei den *Ellipsoiden* und *Hyperboloiden* (1) nicht auf der Fläche, also auch auf keinem Diametralschnitt liegt, so sind *alle Diametralschnitte* der Fläche *Ellipsen* oder *Hyperbeln* oder *Parallellinienpaare* (§ 24, **9**).

Sind d_1 und d_2 zwei konjugierte Durchmesser der Fläche, so daß d_2 in der zu d_1 konjugierten Diametralebene $\varDelta_1$ liegt, die alle zu d_1 parallelen Sehnen halbiert, so halbiert insbesondere d_2 alle zu d_1 parallelen Sehnen des ebenen Schnittes $d_1 d_2$, also nach § 14, **2**, I:

I. *Zwei konjugierte Durchmesser der Fläche sind auch konjugierte Durchmesser der Schnittkurve ihrer Ebene mit der Fläche.*

Sind umgekehrt d_1 und d_2 zwei konjugierte Durchmesser der Schnittkurve ihrer Ebene mit der Fläche, so gehört d_2 nach § 14, **2**, I dem Ort der Mittelpunkte aller zu d_1 parallelen Sehnen, also der zu d_1 konjugierten Diametralebene $\varDelta_1$ an, ist also nach **5**, I auch für die Fläche zu d_1 konjugiert.

II. *Zwei konjugierte Durchmesser der Schnittkurve einer Diametralebene mit der Fläche sind auch konjugierte Durchmesser der Fläche.*

7. System von drei konjugierten Durchmessern. Geht man von einem *nicht dem Asymptotenkegel* (7) *angehörigen* Durchmesser $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aus und wählt in der zu ihm konjugierten Diametralebene, die nach 4, I; II nicht mit ihm vereinigt liegt, zwei getrennte konjugierte Durchmesser $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ der Schnittkurve (§ 14, 4), so erhält man damit ein System von *drei konjugierten Durchmessern der Fläche.*

I. *Jeder von drei konjugierten Durchmessern ist jedem andern konjugiert.*

II. *Die Ebene je zweier von ihnen ist die konjugierte Diametralebene des dritten.*

Ihre Richtungskosinus entsprechen den drei Bedingungen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \frac{\alpha_2\alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_2\beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{c^2} = 0, \\ \frac{\alpha_3\alpha_1}{a^2} + \frac{\beta_3\beta_1}{b^2} + \frac{\gamma_3\gamma_1}{c^2} = 0, \\ \frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2} = 0. \end{cases}$$

III. *Es gibt ∞^3 Systeme von drei konjugierten Durchmessern.*

Mit Rücksicht auf 3 und (8) und § 70, (21) folgt ferner:

IV. *Zieht man im Endpunkt eines von drei konjugierten Durchmessern Parallelen zu den beiden andern, so sind diese konjugierte Tangenten.*

8. Konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen. Geht man mittels der Substitution (I § 37, (2)):

$$(10)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta, \end{cases}$$

von dem System $Oxyz$ der Hauptachsen zu einem konzentrischen schiefwinkligen System $O\xi\eta\zeta$ über, dessen Achsen die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben, so wird die Gleichung der Fläche (1):

$$(11)\qquad \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + 2\varrho\eta\zeta + 2\sigma\zeta\xi + 2\tau\xi\eta = 1[0],$$

wobei:

$$(12)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}, \\ \frac{1}{\mu^2} = \frac{\alpha_2^2}{a^2} + \frac{\beta_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_2^2}{c^2}, \\ \frac{1}{\nu^2} = \frac{\alpha_3^2}{a^2} + \frac{\beta_3^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2}, \end{cases} \qquad (13)\qquad \begin{cases} \varrho = \frac{\alpha_2\alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_2\beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{c^2}, \\ \sigma = \frac{\alpha_3\alpha_1}{a^2} + \frac{\beta_3\beta_1}{b^2} + \frac{\gamma_3\gamma_1}{c^2}, \\ \tau = \frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf (9) und (13) ergibt sich aber[72]):

In bezug auf ein schiefwinkliges Achsensystem $O\xi\eta\zeta$ *erhält die Gleichung* (1) *immer dann und nur dann die Form:*

$$(14) \qquad \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} = 1[0],$$

wenn es aus einem System konjugierter Durchmesser besteht.

So folgt aus der Form der Gleichung § 58, (27), daß die dort benutzten Achsen ξ, η, ζ konjugierte Durchmesser sind.

9. Ort der Mittelpunkte paralleler Schnitte. Da von dem System $O\xi\eta\zeta$ nach **7** keine Achse Erzeugende (keine Ebene Tangentialebene) des Asymptotenkegels sein soll, verschwindet keiner der Koeffizienten (12), wie in (6). Die Fläche (14) wird nun von einer der $\xi\eta$-Ebene parallelen Ebene $\zeta = \zeta_0$ in einem Kegelschnitt:

$$(15) \qquad \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} = 1 - \frac{\zeta_0^2}{\nu^2}$$

geschnitten, dessen Mittelpunkt auf der ζ-Achse liegt (§ 14, (11)). Es folgt daher:

Der Ort der Mittelpunkte aller einer Diametralebene parallelen Schnitte ist der zu ihr konjugierte Durchmesser.

Die Diametralebene darf dabei *keine Tangentialebene des Asymptotenkegels* sein (vgl. später § 74, **2**).

Der Satz ergibt sich auch aus folgender Überlegung: Nach **1**, III sind die ζ-Achse und die unendlich ferne Gerade der $\xi\eta$-Ebene reziproke Polaren. Jede gemeinsame Transversale beider, also jede der $\xi\eta$-Ebene parallele und die ζ-Achse schneidende Sehne der Fläche wird daher nach § 68, **15**, IV von der ζ-Achse halbiert.

Die Schnitte (15) sind nach § 14, **10** *ähnlich und* (in parallelen Ebenen) *ähnlich liegend.*

10. Drei Sätze über die Längen konjugierter Durchmesser. Schreibt man die erste Gleichung (12) und die beiden letzten (13), wo $\varrho = \sigma = \tau = 0$ sei, in der Form:

$$(16) \qquad \begin{cases} \alpha_1 \frac{\alpha_1}{a^2} + \beta_1 \frac{\beta_1}{b^2} + \gamma_1 \frac{\gamma_1}{c^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \\ \alpha_2 \frac{\alpha_1}{a^2} + \beta_2 \frac{\beta_1}{b^2} + \gamma_2 \frac{\gamma_1}{c^2} = 0, \\ \alpha_3 \frac{\alpha_1}{a^2} + \beta_3 \frac{\beta_1}{b^2} + \gamma_3 \frac{\gamma_1}{c^2} = 0, \end{cases}$$

so erhält man durch Auflösen nach $\alpha_1 : a^2$, $\beta_1 : b^2$, $\gamma_1 : c^2$:

$$(17) \qquad \left\{ \Delta \frac{\alpha_1}{a^2} = \frac{\mathrm{A}_1}{\lambda^2}, \quad \Delta \frac{\beta_1}{b^2} = \frac{\mathrm{B}_1}{\lambda^2}, \quad \Delta \frac{\gamma_1}{c^2} = \frac{\Gamma_1}{\lambda^2}, \right.$$

wo Δ die Determinante der neun Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_3$ und $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \ldots, \Gamma_3$ die entsprechenden Unterdeterminanten sind (I § 37, (3); (4)). Unter Hinzufügung der durch zyklische Vertauschung entstehenden Formeln erhält man danach:

$$(18)\quad \begin{cases} \Delta\alpha_1\lambda^2 = \mathsf{A}_1 a^2, & \Delta\alpha_2\mu^2 = \mathsf{A}_2 a^2, & \Delta\alpha_3\nu^2 = \mathsf{A}_3 a^2, \\ \Delta\beta_1\lambda^2 = \mathsf{B}_1 b^2, & \Delta\beta_2\mu^2 = \mathsf{B}_2 b^2, & \Delta\beta_3\nu^2 = \mathsf{B}_3 b^2, \\ \Delta\gamma_1\lambda^2 = \Gamma_1 c^2, & \Delta\gamma_2\mu^2 = \Gamma_2 c^2, & \Delta\gamma_3\nu^2 = \Gamma_3 c^2. \end{cases}$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen erster Zeile (18) mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und Addition usw. folgt (I Anm. 1, II, (6)):

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha_1^2\lambda^2 + \alpha_2^2\mu^2 + \alpha_3^2\nu^2 = a^2, \\ \beta_1^2\lambda^2 + \beta_2^2\mu^2 + \beta_3^2\nu^2 = b^2, \\ \gamma_1^2\lambda^2 + \gamma_2^2\mu^2 + \gamma_3^2\nu^2 = c^2. \end{cases}$$

Die Addition der drei Gleichungen (19) gibt:

$$(20)\quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Durch Gleichsetzen der Determinanten aus den neun linken und den neun rechten Seiten der Gleichungen (18) geht mit Weglassung des Faktors Δ^2 hervor (I Anm. 1, II, (4)):

$$(21)\quad \Delta^2\lambda^2\mu^2\nu^2 = a^2b^2c^2.$$

Multipliziert man die Gleichungen (17) mit $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1$ und addiert, so folgt:

$$\Delta\left(\frac{\alpha_1\mathsf{A}_1}{a^2} + \frac{\beta_1\mathsf{B}_1}{b^2} + \frac{\gamma_1\Gamma_1}{c^2}\right) = \frac{\mathsf{A}_1^2 + \mathsf{B}_1^2 + \Gamma_1^2}{\lambda^2},$$

und ebenso:

$$\Delta\left(\frac{\alpha_2\mathsf{A}_2}{a^2} + \frac{\beta_2\mathsf{B}_2}{b^2} + \frac{\gamma_2\Gamma_2}{c^2}\right) = \frac{\mathsf{A}_2^2 + \mathsf{B}_2^2 + \Gamma_2^2}{\mu^2},$$

$$\Delta\left(\frac{\alpha_3\mathsf{A}_3}{a^2} + \frac{\beta_3\mathsf{B}_3}{b^2} + \frac{\gamma_3\Gamma_3}{c^2}\right) = \frac{\mathsf{A}_3^2 + \mathsf{B}_3^2 + \Gamma_3^2}{\nu^2},$$

und durch Addition:

$$\Delta^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{\mathsf{A}_1^2 + \mathsf{B}_1^2 + \Gamma_1^2}{\lambda^2} + \frac{\mathsf{A}_2^2 + \mathsf{B}_2^2 + \Gamma_2^2}{\mu^2} + \frac{\mathsf{A}_3^2 + \mathsf{B}_3^2 + \Gamma_3^2}{\nu^2},$$

oder da (I § 35, (2); § 37, (4)): $\mathsf{A}_1^2 + \mathsf{B}_1^2 + \Gamma_1^2 = \sin^2\eta\zeta$ usw. ist:

$$\Delta^2\,\frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{\mu^2\nu^2\sin^2\eta\zeta + \nu^2\lambda^2\sin^2\zeta\xi + \lambda^2\mu^2\sin^2\xi\eta}{\lambda^2\mu^2\nu^2}$$

und nach (21):

$$(22)\quad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = \mu^2\nu^2\sin^2\eta\zeta + \nu^2\lambda^2\sin^2\zeta\xi + \lambda^2\mu^2\sin^2\xi\eta.$$

Zwischen den Quadraten λ^2, μ^2, ν^2 der halben Längen von drei konjugierten Durchmessern ξ, η, ζ und den Quadraten a^2, b^2, c^2 der

halben Längen der drei Hauptachsen bestehen die Gleichungen[78]):

$$(23)\quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 + c^2, \\ \mu^2\nu^2 \sin^2 \eta\zeta + \nu^2\lambda^2 \sin^2 \zeta\xi + \lambda^2\mu^2 \sin^2 \xi\eta = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2, \\ \lambda^2\mu^2\nu^2 \sin^2 \xi\eta\zeta = a^2b^2c^2 \qquad (\text{I } \S\, 37, (9)). \end{cases}$$

Die Quadratsumme der Längen von drei konjugierten Durchmessern, die Quadratsumme der Flächen der aus je zweien gebildeten Parallelogramme (I § 15, (3)), *der Rauminhalt des aus ihnen gebildeten Parallelepipedons* (I § 39, (9)) *sind konstant* (§ 14, 7).

11. Die Vorzeichen der Quadrate der Längen. Beim *Ellipsoid* sind a^2, b^2, c^2 alle drei positiv, also nach (12) auch λ^2, μ^2, ν^2 *alle drei positiv.*

Beim *einschaligen Hyperboloid* sind a^2, b^2 positiv, c^2 negativ, also nach (21) das Produkt $\lambda^2\mu^2\nu^2$ negativ, demnach alle drei Faktoren oder einer negativ; das erstere ist nicht möglich, da sonst nach (19) a^2, b^2 negativ wären. Daher sind *zwei der Größen* λ^2, μ^2, ν^2 *positiv und eine negativ.*

Beim *zweischaligen Hyperboloid* sind a^2 positiv und b^2, c^2 negativ, also nach (21) das Produkt $\lambda^2\mu^2\nu^2$ positiv, demnach alle drei Faktoren oder einer positiv; das erstere ist nicht möglich, da sonst nach (19) b^2, c^2 positiv wären. Daher sind *eine der Größen* λ^2, μ^2, ν^2 *positiv und zwei negativ.*

Beim Ellipsoid schneiden von drei konjugierten Durchmessern alle drei die Fläche reell, beim einschaligen Hyperboloid zwei, beim zweischaligen nur einer.

12. Ähnliche Ellipsoide und Hyperboloide. Zwei auf verschiedene oder gleiche rechtwinklige Systeme $Oxyz$ und $O'x'y'z'$ bezogene gleichartige Flächen

$$(24)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (24')\quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

sind *ähnlich*, wenn ihre Halbachsen in demselben Verhältnis $1 : m$ stehen, also:

$$(25)\quad a' = ma, \quad b' = mb, \quad c' = mc.$$

Sie gehen dann durch die *Ähnlichkeitsverwandtschaft* (I § 69, (20)):

$$(26)\quad x' = mx, \quad y' = my, \quad z' = mz; \quad u' = \frac{u}{m}, \quad v' = \frac{v}{m}, \quad w' = \frac{w}{m}$$

der beiden Räume $Oxyz$ und $O'x'y'z'$ Punkt für Punkt und Tangentialebene für Tangentialebene (§ 70, (10)) ineinander über.

Sind die Systeme $Oxyz$ und $O'x'y'z'$ parallel, werden die Flächen *ähnlich und ähnlich liegend*; sind die Systeme identisch, werden die Flächen *konzentrisch, ähnlich und ähnlich liegend*[74]).

Im weiteren Sinne mit im für m können auch ein imaginäres und ein reelles Ellipsoid oder ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid, endlich auch Fläche und Asymptotenkegel als ähnlich gelten (§ 14, **10**).

Da die Bedingung (8) nur von den Verhältnissen $a:b:c$ abhängt, so folgt:

Konzentrische, ähnliche und ähnlich liegende Flächen (auch im weiteren Sinne) haben gemeinsame konjugierte Durchmesser (und Asymptotenkegel).

Hieran schließen sich entsprechende Sätze wie in § 14, **11**.

§ 73. Durchmesser und konjugierte Tangenten der Paraboloide.

1. Die einer Richtung konjugierte Diametralebene. Bei dem Paraboloid:

$$g = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0 \tag{1}$$

soll jede zur Hauptachse ($x =$ Achse) parallele Gerade oder Ebene bezüglich ein *Durchmesser* oder eine *Diametralebene*[50]) heißen (§ 14, 8).

Die nach § 68, (2); § 70, (25) der Richtung α, β, γ konjugierte Ebene:

$$\alpha + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0 \tag{2}$$

ist der x-Achse parallel und heißt daher *die der Richtung α, β, γ konjugierte Diametralebene*; sie ist der *Ort der Mittelpunkte aller parallelen Sehnen von der Richtung α, β, γ.* Jede Richtung, die nicht die eines Durchmessers ist ($\beta = 0$, $\gamma = 0$), hat nach (2) eine bestimmte konjugierte Diametralebene. Sie ist die Polarebene des unendlich fernen Punktes der Richtung. *Sie enthält die Berührungspunkte aller Tangenten, die diese Richtung haben* (§ 68, **10**).

2. Der einer Stellung konjugierte Durchmesser. Sind $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ zwei von einem Punkte ausgehende Richtungen, so hat ihre Ebene die Stellungskosinus (I § 41, (20)):

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 : \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 : \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2. \tag{3}$$

Ihre konjugierten Diametralebenen:

$$\alpha_2 + \beta_2\frac{y}{b^2} + \gamma_2\frac{z}{c^2} = 0, \quad \alpha_3 + \beta_3\frac{y}{b^2} + \gamma_3\frac{z}{c^2} = 0 \tag{4}$$

schneiden sich, wie die Auflösung der Gleichungen (4) nach y und z mit Rücksicht auf (3) gibt, in dem Durchmesser:

$$(5)\qquad y = \frac{\beta_1}{\alpha_1} b^2, \quad z = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} c^2.$$

Da dieser nur von den Stellungskosinus (3) abhängt, nennen wir ihn *den der Stellung* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ *konjugierten Durchmesser.* Jede Stellung, die nicht die einer Diametralebene ist ($\alpha_1 = 0$), hat nach (5) einen bestimmten konjugierten Durchmesser.

Als Schnittlinie der Polarebenen (4) zweier unendlich fernen Punkte $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, 0$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, 0$ ist er die reziproke Polare der Verbindungslinie der beiden Punkte; durch diese unendlich ferne Linie gehen alle Ebenen der Stellung (3).

Die Tangentialebene im Punkte x_0, y_0, z_0 (§ 70, (26)):

$$\frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z + x + x_0 = 0$$

hat die Stellung:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 1 : \frac{y_0}{b^2} : \frac{z_0}{c^2}.$$

Diese Stellung aber hat nach (5) den konjugierten Durchmesser:

$$y = y_0, \quad z = z_0.$$

Der einer Stellung konjugierte Durchmesser enthält also den Berührungspunkt der Tangentialebene, die diese Stellung hat (§ 68, **15**, V).

3. Transformation auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem. Transformiert man die Gleichung (1) mittels der Substitution (I § 37, (13)):

$$(6)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y = y_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z = z_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases}$$

auf ein beliebiges schiefwinkliges System $\Omega \xi \eta \zeta$, so ergibt sich:

$$(7)\qquad \left(\frac{\beta_1^2}{b^2} + \frac{\gamma_1^2}{c^2}\right)\xi^2 + \left(\frac{\beta_2^2}{b^2} + \frac{\gamma_2^2}{c^2}\right)\eta^2 + \left(\frac{\beta_3^2}{b^2} + \frac{\gamma_3^2}{c^2}\right)\zeta^2 + 2\left(\frac{\beta_2\beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{c^2}\right)\eta\zeta$$
$$+ 2\left(\frac{\beta_3\beta_1}{b^2} + \frac{\gamma_3\gamma_1}{c^2}\right)\zeta\xi + 2\left(\frac{\beta_1\beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2}\right)\xi\eta + 2\left(\alpha_1 + \beta_1\frac{y_0}{b^2} + \gamma_1\frac{z_0}{c^2}\right)\xi$$
$$+ 2\left(\alpha_2 + \beta_2\frac{y_0}{b^2} + \gamma_2\frac{z_0}{c^2}\right)\eta + 2\left(\alpha_3 + \beta_3\frac{y_0}{b^2} + \gamma_3\frac{z_0}{c^2}\right)\zeta + \left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} + 2x_0\right) = 0.$$

Hier verschwinden neben dem konstanten Gliede die Koeffizienten von $\eta\zeta$, η und ζ nach § 70, (37); (38) immer dann und nur dann, wenn die η- und ζ-Achse zwei konjugierte Tangenten sind. Ferner verschwinden die Koeffizienten von ξ^2, $\zeta\xi$ und $\xi\eta$, die in $\beta_1 : b^2$ und $\gamma_1 : c^2$ linear und homogen geschrieben werden können, immer dann

und nur dann alle drei, wenn $\beta_1 = 0$ und $\gamma_1 = 0$ $(\alpha_1 = 1)$, da sonst mit $\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = \gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3$ die Determinante der neun Richtungskosinus in (6) verschwinden würde. Die Gleichung (7) wird dann[72]):

(8) $$g = \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + 2\xi = 0,$$

wo:

(9) $$\frac{1}{\mu^2} = \frac{\beta_2{}^2}{b^2} + \frac{\gamma_2{}^2}{c^2}, \quad \frac{1}{\nu^2} = \frac{\beta_3{}^2}{b^2} + \frac{\gamma_3{}^2}{c^2}.$$

Die Gleichung des Paraboloids hat in schiefwinkligen Koordinaten immer dann und nur dann die Form (8), *wenn die η- und ζ-Achse zwei getrennte konjugierte Tangenten und die ξ-Achse der der Stellung der $\eta\zeta$-Ebene konjugierte Durchmesser ist.*

4. Ort der Mittelpunkte paralleler Schnitte. Die Ebene $\xi = \xi_0$ schneidet die Fläche (8) in dem Kegelschnitt:

(10) $$\frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + 2\xi_0 = 0,$$

der eine Ellipse oder Hyperbel ist, die ihren Mittelpunkt auf der ξ-Achse hat.

Der Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Schnitte des Paraboloids, die nicht der Hauptachse parallel sind, ist der der Stellung der Schnitte konjugierte Durchmesser (§ 72, **9**).

Die Koeffizienten (9) können bei getrennten konjugierten Tangenten η und ζ nicht verschwinden (§ 70, (39)).

Die Schnitte (10) sind nach § 14, **10** *ähnlich und* (in parallelen Ebenen) *ähnlich liegend.*

5. Das Produkt der Parameter μ^2 und ν^2. Bei der Transformation von (7) auf (8) war:

$$\beta_2 \frac{\beta_2}{b^2} + \gamma_2 \frac{\gamma_2}{c^2} = \frac{1}{\mu^2},$$

$$\beta_3 \frac{\beta_2}{b^2} + \gamma_3 \frac{\gamma_2}{c^2} = 0,$$

woraus mit der Abkürzung:

$$S = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \sin \xi\eta\zeta$$

$(\alpha = 1,\ \beta_1 = \gamma_1 = 0)$ hervorgeht:

$$S\frac{\beta_2}{b^2} = \frac{\gamma_3}{\mu^2}, \quad S\frac{\gamma_2}{c^2} = -\frac{\beta_3}{\mu^2},$$

oder auch, mit gleichzeitiger Hinzufügung der entsprechenden Formeln:

$$(11)\quad \begin{aligned} S\mu^2\beta_2 &= \gamma_3 b^2, & S\nu^2\beta_3 &= -\gamma_2 b^2,\\ S\mu^2\gamma_2 &= -\beta_3 c^2, & S\nu^2\gamma_3 &= \beta_2 c^2. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit β_2 und β_3 und Addition folgt aus den beiden Gleichungen erster Zeile:

$$\beta_2^2\mu^2 + \beta_3^2\nu^2 = b^2$$

und ebenso (§ 72, (19)):

$$\gamma_2^2\mu^2 + \gamma_3^2\nu^2 = c^2$$

und damit durch Addition, da $\beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 - \alpha_2^2 = \sin^2\xi\eta$:

$$(12)\quad \mu^2\sin^2\xi\eta + \nu^2\sin^2\xi\zeta = b^2 + c^2.$$

Durch Gleichsetzen der Determinanten der vier linken und der vier rechten Seiten von (11) ergibt sich ferner mit Weghebung des Faktors S[73]):

$$(13)\quad \mu^2\nu^2\sin^2\xi\eta\zeta = b^2c^2.$$

Daher sind in (8) *beim elliptischen Paraboloid* μ^2 *und* ν^2 *stets von gleichen, beim hyperbolischen stets von verschiedenen Vorzeichen.*

6. Ähnliche Paraboloide. Die beiden gleichartigen Paraboloide:

$$(14)\quad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} + 2x = 0 \qquad (14')\quad \frac{y'^2}{p'} + \frac{z'^2}{q'} + 2x' = 0$$

sind *ähnlich*, wenn ihre Parameter p und q in gleichem Verhältnis $1 : m$ stehen[74]), also:

$$(15)\quad p' = mp,\quad q' = mq.$$

Sie gehen dann durch die Ähnlichkeitstransformationen § 72, (26) ineinander über.

§ 74. Besondere Gleichungen der Hyperboloide und Paraboloide und ihre Bedeutung.

1. Das Berührungsdreikant des Asymptotenkegels. Die auf ihr Hauptachsensystem $Oxyz$ bezogene Fläche § 72, (1) erhält in einem beliebigen schiefwinkligen System $O\xi\eta\zeta$ die Form § 72, (11). Sei nun der Asymptotenkegel § 72, (7) reell und die Achse $\xi = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ irgendein nicht auf ihm liegender Durchmesser. Die zu diesem konjugierte Diametralebene (§ 72, (2)):

$$(1)\quad \frac{\alpha_1 x}{a^2} + \frac{\beta_1 y}{b^2} + \frac{\gamma_1 z}{c^2} = 0,$$

nach § 68, (15) zugleich die Polarebene aller Punkte des Durchmessers $\xi = \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ in bezug auf den Asymptotenkegel, schneidet diesen in den Berührungslinien der durch die ξ-Achse an ihn gelegten Tan-

gentialebenen (§ 71, 5). Nehmen wir diese Linien als Achsen $\eta = \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\zeta = \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, so ist nach (1) und § 72, (6) in § 72, (12) und (13):

$$\frac{1}{\mu^2} = 0, \quad \frac{1}{\nu^2} = 0; \quad \sigma = 0, \quad \tau = 0.$$

Die Gleichung des Hyperboloids (und Kegels):

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\ (0) \tag{2}$$

erhält in einem schiefwinkligen System $O\xi\eta\zeta$ die Form[134]):

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2} + 2\varrho\eta\zeta = 1\ (0), \tag{3}$$

wenn die η- und ζ-Achse die Berührungslinien der beiden durch die ξ-Achse an den Asymptotenkegel gelegten Tangentialebenen sind ($O\xi\eta\zeta$ ein „Berührungsdreikant" ist, vgl. § 52, Fig. 115).

Damit diese reell werden, muß die ξ-Achse *außerhalb* des Asymptotenkegels verlaufen. Dies ist aber beim ein- und zweischaligen Hyperboloid (2) der Fall, wenn bezüglich (§ 72, (12)):

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} + \frac{\beta_1^2}{b^2} - \frac{\gamma_1^2}{c^2} > 0; \quad \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\alpha_1^2}{a^2} - \frac{\beta_1^2}{b^2} - \frac{\gamma_1^2}{c^2} < 0, \tag{4}$$

da für die *inneren* Hauptachsen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0, 0, 1$, bezüglich $1, 0, 0$, wird (§ 54, 4).

2. Parabolische Schnitte der Hyperboloide. Die Ebene $\zeta = \zeta_0$, die der Tangentialebene $\xi\eta$ des Asymptotenkegels parallel ist, schneidet das Hyperboloid (3) in der Parabel (§ 2, (17)):

$$\frac{\xi^2}{\lambda^2} + 2\varrho\zeta_0\eta = 1\ (0), \tag{5}$$

und da sie als beliebige Tangentialebene gelten kann, so folgt:

Jede einer Tangentialebene des Asymptotenkegels parallele Ebene schneidet das Hyperboloid oder den Kegel selbst in einer Parabel.

Der Scheitel der Parabel ist beim Hyperboloid (§ 2, (18)):

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{1}{2\varrho\zeta_0}, \quad \zeta = \zeta_0, \tag{6}$$

also der *Ort der Scheitel eines Systems paralleler Schnitte $\zeta = \zeta_0$ die Hyperbel* (§ 3, (15)):

$$\eta\zeta = \frac{1}{2\varrho}. \tag{7}$$

Mit $\zeta_0 = 0$ ergibt sich aus (5) insbesondere:

Jede Tangentialebene des Asymptotenkegels selbst schneidet das einschalige Hyperboloid ($\lambda^2 > 0$) in zwei zu ihrer Berührungslinie parallelen Geraden (Erzeugenden, § 63, 5).

3. Die Asymptotenkegelgleichung der Hyperboloide. Wählt man für das ein- oder zweischalige Hyperboloid (2) die Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems $O\xi\eta\zeta$ alle drei auf dem Asymptotenkegel, so verschwinden in § 72, (11) die drei Koeffizienten § 72, (12) und folgt (§ 3, (15))[18]:

In bezug auf ein schiefwinkliges System $O\xi\eta\zeta$, dessen Achsen dem Asymptotenkegel des ein- oder zweischaligen Hyperboloids (2) *angehören, ist die Gleichung der Fläche* (2):

$$2\varrho\eta\zeta + 2\sigma\zeta\xi + 2\tau\xi\eta = 1\ (0). \tag{8}$$

4. Unterschied der ein- und zweischaligen Hyperboloide. Wenn die Fläche (8) ein einschaliges Hyperboloid ist, müssen nach § 63, 5 zwei der ξ-Achse parallele Erzeugende, also etwa die Gerade:

$$\eta = \varepsilon m, \quad \zeta = -\varepsilon n, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

auf ihr liegen, muß also identisch in ξ sein:

$$-2\varrho mn + 2\varepsilon(\tau m - \sigma n)\xi = 1$$

oder:

$$\tau m = \sigma n, \quad -2\varrho mn = 1 \tag{9}$$

oder mit einem Faktor $\varkappa$:

$$m = \varkappa\sigma, \quad n = \varkappa\tau; \quad -2\varkappa^2\varrho\sigma\tau = 1; \quad \varkappa = 1 : \sqrt{-2\varrho\sigma\tau}. \tag{10}$$

Es muß also $\varrho\sigma\tau$ negativ sein, worauf in der Tat zwei Gerade $\eta = \varepsilon m$, $\zeta = -\varepsilon n$ mit den Werten (10) von m und n auf der Fläche (8) liegen, so daß sie nach § 63, 1 kein zweischaliges Hyperboloid sein kann.

Bei dem einschaligen Hyperboloid ist in der auf drei Erzeugende des Asymptotenkegels bezogenen Gleichung (8) *$\varrho\sigma\tau$ negativ, bei dem zweischaligen positiv* ($A = -2\varrho\sigma\tau$ ist die Determinante, s. später § 99, (8)).

5. Bedeutung der Koeffizienten beim einschaligen Hyperboloid. Setzt man unter der Voraussetzung:

$$-2\varrho\sigma\tau > 0 \tag{11}$$

mit Rücksicht auf (9):

$$2\varrho = -\frac{1}{mn}, \quad 2\sigma = -\frac{1}{nl}, \quad 2\tau = -\frac{1}{lm}, \tag{12}$$

so wird:

$$-8\varrho\sigma\tau = \frac{1}{l^2m^2n^2}; \quad lmn = \frac{1}{2\sqrt{-2\varrho\sigma\tau}}$$

und damit umgekehrt:

$$l = -\frac{\varrho}{\sqrt{-2\varrho\sigma\tau}}, \quad m = -\frac{\sigma}{\sqrt{-2\varrho\sigma\tau}}, \quad n = -\frac{\tau}{\sqrt{-2\varrho\sigma\tau}}. \tag{13}$$

Nach (11) sind die Größen ϱ, σ, τ alle drei negativ oder eine, etwa

ϱ, negativ, die beiden andern, σ und τ, positiv. Im letzteren Falle kann man aber durch Umkehr der Pfeilspitze der ξ-Achse in (8) auch σ und τ negativ machen. Man kann also ϱ, σ, τ immer alle drei negativ und damit, bei positiver Quadratwurzel in (13), l, m, n alle drei positiv annehmen. Es folgt also mit Rücksicht auf (8):

Die Gleichung des einschaligen Hyperboloids erfährt beim Übergang von den Hauptachsen x, y, z zu irgend drei Erzeugenden ξ, η, ζ des Asymptotenkegels die Umgestaltung:

$$(14)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=-\frac{1}{lmn}\{l\eta\zeta+m\zeta\xi+n\xi\eta+lmn\}=0.$$

Hiernach liegen die sechs den Achsen ξ, η, ζ parallelen Geraden:

$$(15)\qquad f\begin{cases}\eta=m,\\ \zeta=-n,\end{cases}\quad g\begin{cases}\zeta=n,\\ \xi=-l,\end{cases}\quad h\begin{cases}\xi=l,\\ \eta=-m,\end{cases}$$

$$(16)\qquad f'\begin{cases}\eta=-m,\\ \zeta=n,\end{cases}\quad g'\begin{cases}\zeta=-n,\\ \xi=l,\end{cases}\quad h'\begin{cases}\xi=-l,\\ \eta=m,\end{cases}$$

auf der Fläche selbst. Sie bilden *ein auf der Fläche liegendes Sechseck* mit den Ecken (Fig. 171)

$$(17)\qquad \begin{aligned} &f\times g'=l,m,-n;\ g'\times h=l,-m,-n;\ h\times f'=l,-m,n;\\ &f'\times g=-l,-m,n;\ g\times h'=-l,m,n;\ h'\times f=-l,m,-n, \end{aligned}$$

die unter Hinzunahme der beiden Punkte: l, m, n und $-l, -m, -n$ ein *Parallelepipedon mit dem Mittelpunkt O und den Kantenlängen $2l, 2m, 2n$ in der Richtung der Achsen ξ, η, ζ* bestimmen[170]).

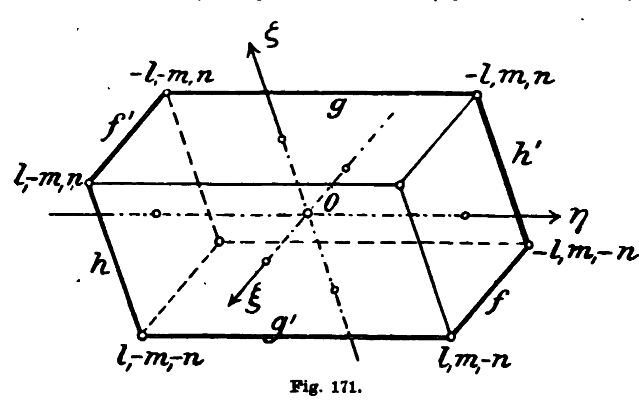


Fig. 171.

Da f und f', g und g', h und h' je parallel sind, schneidet mit Rücksicht auf (17) jede der drei Geraden f, g, h jede der drei Geraden f', g', h'. Daher gehören f, g, h der *einen*, f', g', h' der *andern* Schar der Erzeugenden an (§ 63, 4).

6. Bedeutung der Asymptotengleichung. Die Achsenkoordinaten der Geraden f, g, h sind (I § 48, (3) für schiefw. Koord.) in bezug auf das System $O\xi\eta\zeta$:

$$(18)\quad f=1,0,0,0,n,m,\quad g=0,1,0,n,0,l,\quad h=0,0,1,m,l,0.$$

Eine laufende Gerade q_{kl} schneidet daher die drei Geraden f, g, h unter den Bedingungen (I § 48, (21')):

$$(19)\qquad \begin{cases} m q_{12} + n q_{31} + q_{14} = 0, \\ n q_{23} + l q_{12} + q_{24} = 0, \\ l q_{31} + m q_{23} + q_{34} = 0. \end{cases}$$

Der laufende Punkt ξ, η, ζ der Geraden q_{kl} hinwiederum entspricht den Gleichungen (I § 48, (11): § 59, (9)):

$$(20)\qquad \begin{cases} \eta q_{12} - \zeta q_{31} + q_{14} = 0, \\ \zeta q_{23} - \xi q_{12} + q_{24} = 0, \\ \xi q_{31} - \eta q_{23} + q_{34} = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination der Größen q_{kl}, die für vier unabhängige zählen, aus den Gleichungen (19) und (20), die für fünf unabhängige zählen, ergibt sich die Bedingung für den laufenden Punkt ξ, η, ζ einer Geraden, welche die drei Geraden (15) beständig schneidet. Durch Subtraktion entsprechender Gleichungen (19) und (20) ergibt sich zunächst:

$$(21)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad (n + \zeta) q_{31} + (m - \eta) q_{12} = 0, \\ (n - \zeta) q_{23} \qquad\qquad + (l + \xi) q_{12} = 0, \\ (m + \eta) q_{23} + (l - \xi) q_{31} \qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

und durch Elimination von q_{23}, q_{31}, q_{12}, die nach (19) nicht alle 0 sein können:

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} 0 & n + \zeta & m - \eta \\ n - \zeta & 0 & l + \xi \\ m + \eta & l - \xi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (l + \xi)(m + \eta)(n + \zeta) + (l - \xi)(m - \eta)(n - \zeta)$$
$$= 2lmn + 2l\eta\zeta + 2m\zeta\xi + 2n\xi\eta = 0.$$

Die Gleichung (14) kann daher in der Form geschrieben werden:

$$(23)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = -\frac{1}{2lmn} \begin{vmatrix} 0 & n + \zeta & m - \eta \\ n - \zeta & 0 & l + \xi \\ m + \eta & l - \xi & 0 \end{vmatrix}$$

und ist dann der Ausdruck des Satzes[171]):

Ein gegebenes einschaliges Hyperboloid ist der Ort einer Geraden, die an irgend drei gleichnamigen Erzeugenden der einen oder andern Schar seiner Erzeugenden gleitet.

7. Ort einer Geraden, die an drei windschiefen Geraden gleitet. Irgend drei windschiefe Gerade f, g, h im Raume bestimmen (Fig. 171) ein

Parallelepipedon, das man erhält, wenn man durch jede Gerade zwei den beiden andern Geraden parallele Ebenen legt. Nimmt man den Mittelpunkt des Parallelepipedons als Anfangspunkt O eines Achsensystems $O\xi\eta\zeta$, dessen Achsen den Kanten des Parallelepipedons parallel sind, so haben die Geraden f, g, h bei geeigneter Wahl der Pfeilspitzen die Gleichungen (15). Die durch (15) dargestellten Geraden können daher als drei *beliebige* windschiefe Gerade gelten.

Daher ist der Ort einer Geraden, die an drei gegebenen windschiefen Geraden gleitet, ein einschaliges Hyperboloid. (Über die Bestimmung von a^2, b^2, c^2 aus l, m, n vgl. später § 92, 4).

8. Transformation des hyperbolischen Paraboloids auf zwei ungleichnamige Erzeugende. Zwei beliebige ungleichnamige Erzeugende des hyperbolischen Paraboloids:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = 0 \tag{24}$$

sind nach § 65, (9) durch die Gleichungenpaare dargestellt:

$$\text{(25)} \quad \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \mu, \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \frac{2x}{\mu}, \end{cases} \qquad \text{(26)} \quad \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \nu, \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{2x}{\nu}. \end{cases}$$

Ihr Schnittpunkt ist nach § 65, (15):

$$x_0 = \frac{\mu\nu}{2}, \quad y_0 = b\,\frac{\mu+\nu}{2}, \quad z_0 = c\,\frac{\mu-\nu}{2} \tag{27}$$

und ihre Richtungskosinus nach § 65, (17):

$$\alpha_2 = \frac{\mu}{m}, \quad \beta_2 = \frac{b}{m}, \quad \gamma_2 = -\frac{c}{m}; \quad \alpha_3 = \frac{\nu}{n}, \quad \beta_3 = \frac{b}{n}, \quad \gamma_3 = \frac{c}{n}, \tag{28}$$

worin:

$$m^2 = b^2 + c^2 + \mu^2, \qquad n^2 = b^2 + c^2 + \nu^2. \tag{29}$$

Zur Einführung eines neuen Koordinatensystems $\Omega\xi\eta\zeta$, dessen Achsen η und ζ die beiden Erzeugenden (25) und (26) sind und dessen Achse ξ von deren Schnittpunkt Ω parallel der x-Achse ausgeht ($\alpha_1 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \gamma_1 = 0$), dienen die Formeln (I § 37, (13)):

$$\begin{cases} x = \frac{\mu\nu}{2} + \xi + \mu\,\frac{\eta}{m} + \nu\,\frac{\zeta}{n}, \\ \frac{y}{b} = \frac{\mu+\nu}{2} + \frac{\eta}{m} + \frac{\zeta}{n}, \\ \frac{z}{c} = \frac{\mu-\nu}{2} - \frac{\eta}{m} + \frac{\zeta}{n}. \end{cases} \tag{30}$$

Damit wird:

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \mu + \frac{2\zeta}{n}, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \nu + \frac{2\eta}{m} \tag{31}$$

und somit:

(32) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x = \frac{4\eta\zeta}{mn} - 2\xi.$$

Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids (24) *erhält in bezug auf ein schiefwinkliges System* $\Omega\xi\eta\zeta$, *dessen* η- *und* ζ-*Achse zwei beliebige ungleichnamige Erzeugende* (25) *und* (26) *sind und dessen* ξ-*Achse der Hauptachse parallel läuft, die Form:*

(33) $$\frac{4\eta\zeta}{mn} - 2\xi = 0,$$

wo m und n die Werte (29) *haben.*

Mit $\mu = \nu = 0$ geht der Satz § 62, (6) hervor.

Umgekehrt folgt aus der Gleichungsform (33) *stets, daß die* η-*Achse* ($\xi = 0$, $\zeta = 0$) *und* ζ-*Achse* ($\xi = 0$, $\eta = 0$) *zwei ungleichnamige Erzeugende sind.*

9. Windschiefes Viereck auf dem Paraboloid. Auf dem Paraboloid (33) liegen unter anderen die der Ebene $\zeta = 0$, also nach (31) auch der Ebene: $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ parallelen Erzeugenden (Fig. 172):

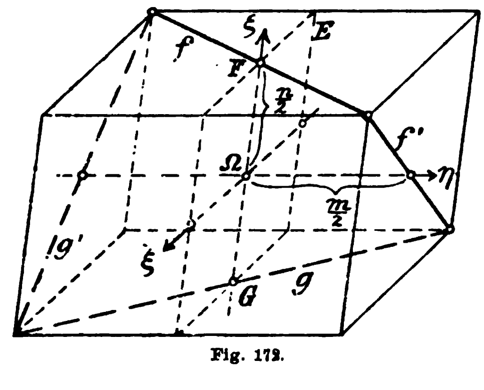


Fig. 172.

(34) $$f\begin{cases}\eta = m\xi,\\ \zeta = \frac{n}{2},\end{cases} \qquad g\begin{cases}\eta = -m\xi,\\ \zeta = -\frac{n}{2},\end{cases}$$

und die der Ebene $\eta = 0$, also nach (31) auch der Ebene $\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$ parallelen Erzeugenden (§ 65, (12)):

(35) $$f'\begin{cases}\zeta = n\xi,\\ \eta = \frac{m}{2},\end{cases} \qquad g'\begin{cases}\zeta = -n\xi,\\ \eta = -\frac{m}{2}.\end{cases}$$

Sie bilden *ein auf der Fläche liegendes windschiefes Viereck* mit den Ecken:

(36) $$f \times f' = \frac{1}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \quad f' \times g = -\frac{1}{2}, \frac{m}{2}, -\frac{n}{2};$$
$$g \times g' = \frac{1}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}; \quad g' \times f = -\frac{1}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{n}{2},$$

welche somit unter Hinzunahme der vier Punkte:

(37) $$-\frac{1}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}; \quad \frac{1}{2}, -\frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \quad -\frac{1}{2}, \frac{m}{2}, \frac{n}{2}; \quad \frac{1}{2}, \frac{m}{2}, -\frac{n}{2}$$

ein *Parallelepipedon* vom Mittelpunkt Ω und den Kantenlängen $1, m, n$ in der Richtung der ξ-, η-, ζ-Achse bestimmen[170]).

10. Erzeugung des Paraboloids durch Bewegung einer Geraden. Die Achsenkoordinaten der Geraden f und g sind in bezug auf das System $\Omega\xi\eta\zeta$:

$$(38)\qquad f = 1,\ m,\ 0,\ \frac{mn}{2},\ -\frac{n}{2},\ 0;\quad g = 1,\ -m,\ 0,\ \frac{mn}{2},\ \frac{n}{2},\ 0.$$

Eine laufende Gerade q_{kl} schneidet daher f und g unter den Bedingungen:

$$(39)\qquad \begin{cases} \frac{mn}{2} q_{23} - \frac{n}{2} q_{31} + q_{14} + m q_{24} = 0, \\ \frac{mn}{2} q_{23} + \frac{n}{2} q_{31} + q_{14} - m q_{24} = 0. \end{cases}$$

Fügt man hierzu noch die Bedingung, daß q_{kl} der $\zeta\xi$-Ebene parallel, also die unendlich ferne Gerade $\eta = 0$, $\tau = 0$ mit den Achsenkoordinaten: 0, 0, 0, 0, 1, 0 schneidet, also die Bedingung:

$$(40)\qquad q_{31} = 0,$$

so erhält man für q_{kl} die Bedingungen:

$$(41)\qquad \frac{mn}{2} q_{23} + q_{14} = 0,\quad q_{31} = 0,\quad q_{24} = 0.$$

Der laufende Punkt ξ, η, ζ der Geraden q_{kl} genügt den für zwei unabhängige zählenden Bedingungen (I § 48, (11); § 59, (9)):

$$(42)\qquad \begin{cases} \eta q_{12} - \zeta q_{31} + q_{14} = 0, \\ \zeta q_{23} - \xi q_{12} + q_{24} = 0, \\ \xi q_{31} - \eta q_{23} + q_{34} = 0, \\ \xi q_{14} + \eta q_{24} + \zeta q_{34} = 0. \end{cases}$$

Neben $q_{31} = 0$ und $q_{24} = 0$ bleiben daher aus (41) und (42) die drei Gleichungen:

$$(43)\qquad \begin{cases} \zeta q_{23} - \xi q_{12} \phantom{+ q_{14}} = 0, \\ \phantom{\zeta q_{23} -} \eta q_{12} + q_{14} = 0, \\ \frac{mn}{2} q_{23} \phantom{- \xi q_{12}} + q_{14} = 0. \end{cases}$$

Für den Ort des laufenden Punktes der Geraden q_{kl} folgt durch Elimination der q_{kl}:

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} \zeta & -\xi & 0 \\ 0 & \eta & 1 \\ \frac{mn}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \eta\zeta - \frac{mn}{2}\xi = 0.$$

Die Identität (32), *in der Form geschrieben:*

$$(45)\qquad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-2x=\frac{4}{mn}\begin{vmatrix}\zeta & -\xi & 0\\ 0 & \eta & 1\\ \frac{mn}{2} & 0 & 1\end{vmatrix},$$

ist daher der Ausdruck des Satzes[171]):

Das gegebene hyperbolische Paraboloid (24) *ist der Ort einer Geraden, die an irgend zwei Erzeugenden f und g der einen Schar gleitet und der durch zwei Erzeugende f' und g' der andern Schar bestimmten Stellung parallel bleibt.*

11. Ort einer Geraden, die an zwei windschiefen Geraden gleitet und einer Ebene parallel bleibt. Seien jetzt irgend zwei windschiefe Gerade f und g gegeben und eine Ebene E, welche jene in den Punkten F und G schneide (Fig. 172). Wir nehmen GF als ζ-Achse und den Mittelpunkt von GF als Anfangspunkt Ω eines schiefwinkligen Koordinatensystems $\Omega\xi\eta\zeta$. Die Ebene der durch Ω parallel zu f und g gelegten Geraden f_0 und g_0 nehmen wir als $\xi\eta$-Ebene und ihren Durchschnitt mit der Ebene E als ξ-Achse. Als η-Achse nehmen wir den vierten harmonischen Strahl zur ξ-Achse und dem Linienpaare f_0, g_0. In diesem System sind die Gleichungen der Geraden f und g von der Form (34) mit geeigneten Konstanten m und n, während die gegebene Ebene E die Koordinatenebene $\eta = 0$ ist. Der gesuchte Ort hat also die Gleichung (44).

Der Ort einer Geraden, die an zwei festen windschiefen Geraden gleitet und einer festen Ebene parallel bleibt, ist ein hyperbolisches Paraboloid.

II. Kapitel.

Die Fläche zweiter Klasse.

§ 75. Die allgemeine Gleichung der Fläche zweiter Klasse in gemeinen Ebenenkoordinaten.

1. Begriff der Fläche zweiter Klasse. Die Gleichungen § 53, (35); § 69, (27); § 70, (10); (31); § 71, (11'); (33) haben das gemeinsame Merkmal, daß sie in den Ebenenkoordinaten u, v, w vom zweiten Grade sind. Wir betrachten daher jetzt die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen homogenen, auf ein *rechtwinkliges Koordinatensystem Oxyz* bezogenen *Ebenenkoordinaten* u, v, w, s (I § 47, 1)[40]):

$$(1)\quad F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0,$$

wo die Koeffizienten der Bedingung entsprechen sollen:

$$(2)\qquad b_{ki} = b_{ik}.$$

Jede durch eine Gleichung von der Form (1) *dargestellte Fläche soll als Fläche zweiter Klasse (Ebenenbündel zweiter Ordnung) gelten* (I § 72, (3')).

Die der Gleichung genügenden Ebenen heißen *Tangentialebenen* (§ 70, 3) oder *Ebenen der Fläche* (§ 15, 1).

Mit $s = 1$ geht man zu *nicht* homogenen Ebenenkoordinaten u, v, w über.

2. Ableitungen der Funktion F. Die halben partiellen Ableitungen der Funktion (1) bezeichnen wir zur Abkürzung mit:

$$(3)\qquad F_i(u, v, w, s) = b_{i1}u + b_{i2}v + b_{i3}w + b_{i4}s,$$

$i = 1, 2, 3, 4$, wie in § 66, (5), worauf auch die entsprechenden Identitäten, wie § 66, (6); (7) gelten.

Hieran schließen sich, wie § 66, (10); (11), die Abkürzungen:

$$(4)\quad H(u, v, w) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv,$$

$$(5)\qquad H_i(u, v, w) = b_{i1}u + b_{i2}v + b_{i3}w,$$

$i = 1, 2, 3, 4$, mit den entsprechenden Identitäten, wie § 66, (12); (13).

3. Determinante der Fläche. Die Determinante B der Koeffizienten der vier linearen Ausdrücke (3) wird, wie § 66, (15), die *Determinante der Fläche zweiter Klasse* (1)[41]) genannt, ihre *Unterdeterminanten*, wie dort, mit $B_{ki} = B_{ik}$ und $\beta_{ki} = \beta_{ik}$ bezeichnet.

4. Transformation auf ein neues Koordinatensystem. Der Übergang zu einem neuen *recht- oder schiefwinkligen Koordinatensystem* $O'x'y'z'$ mit dem Anfangspunkt $O' = x_0, y_0, z_0$ und den Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2; \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ der Achsen x', y', z' wird durch die Formeln vermittelt (I § 50, (4); (2) nach I § 37, (13); (16) auf schiefwinklige Achsen ausgedehnt):

$$(6)\begin{cases} u' = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \\ v' = \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \\ w' = \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w, \\ s' = x_0 u + y_0 v + z_0 w + s, \end{cases} \qquad (7)\begin{cases} Su = \mathsf{A}_1 u' + \mathsf{A}_2 v' + \mathsf{A}_3 w', \\ Sv = \mathsf{B}_1 u' + \mathsf{B}_2 v' + \mathsf{B}_3 w', \\ Sw = \Gamma_1 u' + \Gamma_2 v' + \Gamma_3 w', \\ Ss = Sx_0' u' + Sy_0' v' + Sz_0' w' + Ss'. \end{cases}$$

Hier bedeuten (I § 37, (15)) x_0', y_0', z_0' die Koordinaten des alten Anfangspunktes O im neuen System und ist:

$$(8)\begin{cases} Sx_0' = -\mathsf{A}_1 x_0 - \mathsf{B}_1 y_0 - \Gamma_1 z_0, \\ Sy_0' = -\mathsf{A}_2 x_0 - \mathsf{B}_2 y_0 - \Gamma_2 z_0, \\ Sz_0' = -\mathsf{A}_3 x_0 - \mathsf{B}_3 y_0 - \Gamma_3 z_0, \end{cases} \qquad (9)\begin{cases} x_0 = -\alpha_1 x_0' - \alpha_2 y_0' - \alpha_3 z_0', \\ y_0 = -\beta_1 x_0' - \beta_2 y_0' - \beta_3 z_0', \\ z_0 = -\gamma_1 x_0' - \gamma_2 y_0' - \gamma_3 z_0'. \end{cases}$$

Ferner ist (I § 37, (9)):

$$(10)\qquad S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \sin x'y'z',$$

und sind $\mathsf{A}_i, \mathsf{B}_i, \Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ die Unterdeterminanten der gleichnamigen Elemente in der dreireihigen Determinante S. Bei *rechtwinkligem* neuen System $O'x'y'z'$ ist (I § 37, (12)):

$$(11)\qquad \mathsf{A}_i = \alpha_i, \quad \mathsf{B}_i = \beta_i, \quad \Gamma_i = \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad S = 1.$$

Geht nun die Gleichung (1) vermöge (7) über in:

$$(12)\qquad \begin{aligned} S^2 F(u, v, w, s) = b_{11}' u'^2 + b_{22}' v'^2 + b_{33}' w'^2 + 2b_{23}' v'w' + 2b_{31}' w'u' \\ + 2b_{12}' u'v' + 2b_{14}' u's' + 2b_{24}' v's' + 2b_{34}' w's' + b_{44}' s'^2 = 0, \end{aligned}$$

so haben die neuen Koeffizienten die Werte:

$$(13)\begin{cases} b_{11}' = F_1(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')\mathsf{A}_1 + F_2(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')\mathsf{B}_1 \\ \qquad + F_3(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')\Gamma_1 + F_4(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')Sx_0', \\ b_{22}' = F_1(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')\mathsf{A}_2 + \cdots + \cdots + F_4(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')Sy_0', \\ b_{33}' = F_1(\mathsf{A}_3, \mathsf{B}_3, \Gamma_3, Sz_0')\mathsf{A}_3 + \cdots + \cdots + F_4(\mathsf{A}_3, \mathsf{B}_3, \Gamma_3, Sz_0')Sz_0', \end{cases}$$

$$(14)\begin{cases} b_{23}' = F_1(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')\mathsf{A}_3 + F_2(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')\mathsf{B}_3 \\ \qquad + F_3(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')\Gamma_3 + F_4(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')Sz_0', \\ b_{31}' = F_1(\mathsf{A}_3, \mathsf{B}_3, \Gamma_3, Sz_0')\mathsf{A}_1 + \cdots + \cdots + F_4(\mathsf{A}_3, \mathsf{B}_3, \Gamma_3, Sz_0')Sx_0', \\ b_{12}' = F_1(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')\mathsf{A}_2 + \cdots + \cdots + F_4(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')Sy_0', \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} b_{14}' = F_4(\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \Gamma_1, Sx_0')S, \\ b_{24}' = F_4(\mathsf{A}_2, \mathsf{B}_2, \Gamma_2, Sy_0')S, \\ b_{34}' = F_4(\mathsf{A}_3, \mathsf{B}_3, \Gamma_3, Sz_0')S, \end{cases}$$

$$(16)\qquad b_{44}' = b_{44} S^2.$$

Die Form der Gleichung (1) *bleibt* nach (12) *in jedem recht- und schiefwinkligen System dieselbe.* Die *Klasse* der Fläche ist *vom Koordinatensystem unabhängig* (§ 15, 4)[42]).

5. Klasse des Berührungskegels von einem endlichen Punkte. Mit $s' = 0$ erhält man aus (12) die Bedingung für alle durch O' gehenden Ebenen der Fläche (1):

$$(17)\qquad b_{11}' u'^2 + b_{22}' v'^2 + b_{33}' w'^2 + 2b_{23}' v'w' + 2b_{31}' w'u' + 2b_{12}' u'v' = 0.$$

Es ist (bei rechtwinkligem $O'x'y'z'$) die Gleichung eines *Kegels zweiter Klasse* in laufenden Ebenenkoordinaten u', v', w' im Bündel (I § 71, (8')).

Diejenigen Tangentialebenen der Fläche zweiter Klasse, die durch einen endlichen Punkt des Raumes gehen, bilden einen Kegel zweiter Klasse[43]).

Eine *Ausnahme* tritt ein, wenn alle Koeffizienten der Gleichung (17) verschwinden. *Der Punkt gehört* dann als Träger eines Ebenenbündels *selbst der Fläche an* (§ 15, 5).

Für den Kegel (17) kann man, da es nur auf den Punkt O' ankommt, das System $O'x'y'z'$ mit $Oxyz$ *parallel* nehmen, also neben (11) noch $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_3 = \beta_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ und damit nach (9) $x_0' = -x_0$, $y_0' = -y_0$, $z_0' = -z_0$ setzen. Dann wird in (17):

$$(18)\quad \begin{cases} b'_{11} = b_{11} - 2b_{14}x_0 + b_{44}x_0^2, & b'_{23} = b_{23} - b_{24}z_0 - b_{34}y_0 + b_{44}y_0z_0, \\ b'_{22} = b_{22} - 2b_{24}y_0 + b_{44}y_0^2, & b'_{31} = b_{31} - b_{34}x_0 - b_{14}z_0 + b_{44}z_0x_0, \\ b'_{33} = b_{33} - 2b_{34}z_0 + b_{44}z_0^2, & b'_{12} = b_{12} - b_{14}y_0 - b_{24}x_0 + b_{44}x_0y_0. \end{cases}$$

6. Klasse des Berührungszylinders von einem unendlich fernen Punkte. Mit $w' = 0$ erhält man aus (12) die Bedingung für alle der z'-Achse parallelen Ebenen der Fläche (1):

$$(19)\qquad b'_{11}u'^2 + b'_{22}v'^2 + 2b'_{12}u'v' + 2b'_{14}u's' + 2b'_{24}v's' + b'_{44}s'^2 = 0.$$

Es ist (bei rechtwinkligem $O'x'y'z'$) die Gleichung eines Zylinders zweiter Klasse (I § 71, (9')).

Die Tangentialebenen der Fläche zweiter Klasse, die durch einen unendlich fernen Punkt des Raumes gehen, bilden einen Zylinder zweiter Klasse.

Für den Zylinder (19) kann man dann ohne Beschränkung $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ nehmen, worauf mit (11):

$$(20)\quad \begin{cases} b'_{11} = H(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), & b'_{14} = H_4(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \\ b'_{22} = H(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), & b'_{24} = H_4(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \\ b'_{12} = H_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\alpha_2 + H_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\beta_2 + H_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\gamma_2, & b'_{44} = b_{44}. \end{cases}$$

7. Das Ebenenpaar an einer Geraden. Mit $w' = 0$, $s' = 0$ ergeben sich aus (12) diejenigen Ebenen der Fläche (1), die durch die z'-Achse gehen (I § 47, (21)):

$$(21)\qquad b'_{11}u'^2 + 2b'_{12}u'v' + b_{22}v'^2 = 0$$

und mit $v' = 0$, $w' = 0$ die der $y'z'$-Ebene parallelen Ebenen der Fläche:

$$(22)\qquad b'_{11}u'^2 + 2b'_{14}u's' + b'_{44}s'^2 = 0.$$

Durch eine endliche oder unendlich ferne Gerade des Raumes gehen also zwei Tangentialebenen der Fläche zweiter Klasse[43]).

Eine *Ausnahme* tritt ein, wenn alle Koeffizienten der Gleichung (21) oder (22) verschwinden. *Die Gerade,* als Trägerin eines Ebenenbüschels, *gehört dann selbst der Fläche an.*

8. Bestimmung der Fläche zweiter Klasse durch neun Ebenen. Wie in § 66, **10** ergibt sich mit Bezug auf die Gleichung (1):

Die Fläche zweiter Klasse ist im allgemeinen durch neun ihrer Tangentialebenen bestimmt[44]).

§ 76. Tangentialebenen durch eine Gerade an die Fläche; Tangenten und Berührungspunkte.

1. Die quadratische Gleichung der Ebenen durch eine Gerade. Neben der Fläche zweiter Klasse:

$$F(u, v, w, s) = 0 \tag{1}$$

sei eine gerade Linie als Durchschnitt zweier Ebenen $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ und $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$ gegeben. Eine durch diese Linie gehende Ebene (I § 47, (26)):

$$u = u_1 + \lambda u_2 \quad v = v_1 + \lambda v_2, \quad w = w_1 + \lambda w_2, \quad s = s_1 + \lambda s_2 \tag{2}$$

gehört der Fläche (1) an unter der Bedingung[45]):

$$F(u_1 + \lambda u_2,\ v_1 + \lambda v_2,\ w_1 + \lambda w_2,\ s_1 + \lambda s_2) = 0 \tag{3}$$

oder:

$$F_{11} + 2F_{12}\lambda + F_{22}\lambda^2 = 0. \tag{4}$$

Hierin ist zur Abkürzung gesetzt:

$$F_{11} = F(u_1, v_1, w_1, s_1), \quad F_{22} = F(u_2, v_2, w_2, s_2), \tag{5}$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= F_1^{(1)}u_2 + F_2^{(1)}v_2 + F_3^{(1)}w_2 + F_4^{(1)}s_2 \\ &= F_1^{(2)}u_1 + F_2^{(2)}v_1 + F_3^{(2)}w_1 + F_4^{(2)}s_1, \end{aligned} \tag{6}$$

$$F_1^{(1)} = F_1(u_1, v_1, w_1, s_1), \ldots; \; F_1^{(2)} = F_1(u_2, v_2, w_2, s_2), \ldots \tag{7}$$

Die quadratische Gleichung (4) *bestimmt die Parameterwerte* $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ *der beiden Ebenen* Σ_1 *und* Σ_2 *der Fläche zweiter Klasse* (1) *(Tangentialebenen), die durch die Gerade* $\Pi_1 \times \Pi_2$ *gehen* (§ 16, 2).

2. Tangente in einer Ebene der Fläche. Fallen die beiden durch eine Gerade $\Pi_1 \times \Pi_2$ gehenden *Ebenen der Fläche* in *eine* Ebene Π zusammen, so heißt die Gerade eine *Tangente der Fläche zweiter Klasse* und die Ebene Π die *Berührungsebene der Tangente.*

Wir betrachten zuerst den Sonderfall, wo die eine, Π_1, der beiden die Gerade bestimmenden Ebenen selbst der Fläche angehört, so daß:

$$F_{11} = F(u_1, v_1, w_1, s_1) = 0. \tag{8}$$

Die eine Wurzel der Gleichung (4) ist dann $\lambda_1 = 0$, und die Bedingung, daß auch die andere $\lambda_2 = 0$ werde, also die beiden durch die Gerade $\Pi_1 \times \Pi_2$ gehenden Ebenen der Fläche beide in die Ebene Π_1 fallen, lautet:

$$(9) \qquad F_{12} = F_1^{(1)} u_2 + F_2^{(1)} v_2 + F_3^{(1)} w_2 + F_4^{(1)} s_2 = 0.$$

Die Schnittlinie einer Ebene $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ *der Fläche* (1) *mit irgendeiner anderen Ebene* $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$ *ist Tangente der Fläche in der Ebene* Π_1, *wenn* Π_2 *der Bedingung* (9) *genügt* (§ 67, (15)).

3. Berührungspunkt einer Ebene der Fläche. Indem man in (9) die Ebene $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$ als laufende Ebene ansieht und den Index 2 unterdrückt, erhält man in:

$$(10) \qquad F_1^{(1)} u + F_2^{(1)} v + F_3^{(1)} w + F_4^{(1)} s = 0,$$

die Gleichung eines *Punktes* in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s.

Der Ort aller Ebenen, die eine gegebene Ebene $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ *der Fläche* (1) *(eine Tangentialebene) in einer Tangente schneiden, ist ein Punkt.*

Er heißt der *Berührungspunkt der Ebene* Π_1[47]) und ist durch die Gleichung (10) dargestellt (§ 67, (17)).

Jede in einer Tangentialebene durch den Berührungspunkt gelegte Gerade ist danach eine Tangente.

4. Tangente in einer beliebigen Ebene des Raumes. Damit die Schnittlinie von zwei beliebigen Ebenen Π_1 und Π_2 des Raumes eine Tangente der Fläche (1) sei, muß die Gleichung (4) überhaupt zwei gleiche Wurzeln haben. Also:

Die Schnittlinie zweier Ebenen $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ *und* $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$ *des Raumes ist Tangente der Fläche* (1), *wenn zwischen beiden die Beziehung besteht:*

$$(11) \qquad F_{11} F_{22} - F_{12}^2 = 0.$$

Indem man hier die Ebene Π_2 als laufende Ebene ansieht und den Index 2 fortläßt, ergibt sich[48]):

Der Ort aller Ebenen, die eine gegebene Ebene $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ *des Raumes in einer Tangente der Fläche* (1) *schneiden, hat die Gleichung:*

$$(12) \quad F_{11} F(u, v, w, s) - (F_1^{(1)} u + F_2^{(1)} v + F_3^{(1)} w + F_4^{(1)} s)^2 = 0$$

und ist daher selbst eine Fläche zweiter Klasse (§ 67, (23)).

Die in der Ebene Π_1 liegenden Tangenten der Fläche (1) umhüllen im allgemeinen eine ebene Kurve (I § 71, Fig. 338b), und die Ebenen der Fläche (12) gehen büschelweise durch diese Tangenten hindurch, umhüllen also ebenfalls die ebene Kurve (I § 72, (14')).

Die Gleichung (12) *ist die Gleichung der Schnittkurve der Fläche zweiter Klasse* (1) *mit der Ebene* $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ *in laufenden Ebenenkoordinaten* u, v, w, s (§ 53, (35)).

5. Gerade Linien der Fläche zweiter Klasse. Verschwinden für zwei Ebenen Π_1 und Π_2 alle Koeffizienten der Gleichung (4):

$$F_{11} = 0, \quad F_{12} = 0, \quad F_{22} = 0, \tag{13}$$

so *gehören alle Ebenen* (2) *des Büschels mit der Achse* $\Pi_1 \times \Pi_2$ *der Fläche* (1) *an.* Die Gerade $\Pi_1 \times \Pi_2$ heißt dann eine *gerade Linie oder Erzeugende der Fläche zweiter Klasse*[156]).

Ist daher Π_1 eine gegebene Tangentialebene, so stellen die Gleichungen:

$$F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}w + F_4^{(1)}s = 0, \; F(u,v,w,s) = 0, \; (F(u_1,v_1,w_1,s_1) = 0) \tag{14}$$

die beiden in der Tangentialebene u_1, v_1, w_1, s_1 *liegenden Erzeugenden in Ebenenkoordinaten* u, v, w, s *dar* (§ 67, (28)).

6. Begriff der Doppelebene der Fläche. Wenn die Bedingung (9) *identisch* in u_2, v_2, w_2, s_2 erfüllt ist, also:

$$F_1^{(1)} = 0, \quad F_2^{(1)} = 0, \quad F_3^{(1)} = 0, \quad F_4^{(1)} = 0, \tag{15}$$

folglich (§ 66, (6)) auch $F_{11} = 0$, so hat *jede* in der Ebene $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ liegende Gerade die Eigenschaft, daß durch sie zwei *zusammenfallende* Ebenen der Fläche gehen; *jede Gerade der Ebene* Π_1 *ist in diesem Sinne Tangente der Fläche. Die Ebene* Π_1 *heißt dann eine Doppelebene oder singuläre Ebene*[49]).

Eine Ebene u, v, w, s *ist Doppelebene der Fläche zweiter Klasse* (1) *wenn sie den Bedingungen entspricht* (§ 67, (32)):

$$\begin{cases} F_1 = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}w + b_{14}s = 0, \\ F_2 = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}w + b_{24}s = 0, \\ F_3 = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}w + b_{34}s = 0, \\ F_4 = b_{41}u + b_{42}v + b_{43}w + b_{44}s = 0. \end{cases} \tag{16}$$

§ 77. Harmonische Polarebenen, Pol einer Ebene, reziproke Polaren.

1. Harmonische Polarebenen. Wenn die quadratische Gleichung § 76, (4) zwei entgegengesetzt gleiche Wurzeln λ_1 und $\lambda_2 = -\lambda_1$ hat, so sind (I § 42, (29)) die beiden Ebenen Σ_1 und Σ_2 der Fläche:

$$F(u, v, w, s) = 0 \tag{1}$$

zu den beiden Ebenen Π_1 und Π_2 *harmonisch* (§ 17, 1). Die Bedingung hierfür ist das Verschwinden des mittleren Koeffizienten:

$$F_{12} = 0. \tag{2}$$

Sie kann nach § 76, (6) auch in den beiden Formen:

(3) $F_1^{(1)}u_2+F_2^{(1)}v_2+F_3^{(1)}w_2+F_4^{(1)}s_2=F_1^{(2)}u_1+F_2^{(2)}v_1+F_3^{(2)}w_1+F_4^{(2)}s_1=0$

geschrieben werden und ist in den Koordinaten der beiden Ebenen $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ und $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$ symmetrisch.

Zwei durch die Bedingung (2) *oder* (3) *verknüpfte Ebenen* Π_1 *und* Π_2 *des Raumes sind zu den beiden durch ihre Schnittachse gehenden Ebenen* Σ_1 *und* Σ_2 *der Fläche (Tangentialebenen) harmonisch. Man nennt sie harmonische Polarebenen* (vgl. später § 78, 1) *in bezug auf die Fläche zweiter Klasse* (1).[51])

2. Involution harmonischer Polarebenen. In entsprechendem Sinne, wie § 68, 7, gilt der Satz[52]):

Die Fläche zweiter Klasse bestimmt an jeder Geraden des Raumes, von der zwei Tangentialebenen an sie gelegt werden können, eine Involution harmonischer Polarebenen.

Die Gleichung dieser Involution lautet (§ 17, (5)):

(4) $$F_{11} + F_{12}(\lambda' + \lambda'') + F_{22}\lambda'\lambda'' = 0.$$

3. Der Pol einer Ebene. Nach (3) *ist der Ort aller harmonischen Polarebenen* Π_2 *einer festen Ebene* Π_1 *ein Punkt, welcher der Pol der Ebene* Π_1 *heißt.*

Mit Unterdrückung des Index 2 in (3) erhält man:

(5) $$F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}w + F_4^{(1)}s = 0$$

als *Gleichung des Poles der Ebene* $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$ *in bezug auf die Fläche* (1) in laufenden Koordinaten u, v, w, s[57]).

4. Pol und Berührungspunkt. Die Ebene Π_1 geht immer dann und nur dann durch ihren Pol (5), wenn:

(6) $$F_1^{(1)}u_1 + F_2^{(1)}v_1 + F_3^{(1)}w_1 + F_4^{(1)}s_1 = F(u_1, v_1, w_1, s_1) = F_{11} = 0,$$

also wenn sie der Fläche angehört. Der Pol ist dann nach § 76, (8); (10) der Berührungspunkt der Ebene[55]). Also (§ 68, 9):

I. *Eine Ebene liegt immer dann und nur dann mit ihrem Pol vereinigt, wenn sie eine Ebene der Fläche (Tangentialebene) ist.*

II. *Eine Ebene ist immer dann und nur dann ihre eigene harmonische Polarebene, wenn sie Tangentialebene ist.*

III. *Der Pol einer Ebene der Fläche ist der Berührungspunkt der Ebene.*

5. Pol und Berührungskegel. Jede den Gleichungen (5) und (1) genügende Ebene genügt auch der Gleichung § 76, (12), und jede den Gleichungen (1) und § 76, (12) genügende Ebene auch der Gleichung (5). Daraus folgt:

Wenn eine Tangentialebene der Fläche (1) *durch den Pol einer Ebene Π_1 geht, so berührt sie auch die Schnittkurve der Fläche mit der Ebene Π_1 und umgekehrt,* also mit Rücksicht auf § 75, **5**:

Die Tangentialebenen der Fläche, die zugleich Tangentialebenen eines ebenen Schnittes der Fläche sind, umhüllen einen Kegel zweiter Klasse, dessen Spitze der Pol der Ebene ist (§ 68, **10**).

6. Die Koordinaten des Poles. Die Koeffizienten der Gleichung (5) sind bis auf einen Faktor σ die Koordinaten des Poles von $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1, s_1$, also mit Weglassung des Index 1:

Die Koordinaten des Poles der Ebene u, v, w, s sind:

$$(7)\quad \begin{cases} \sigma x = F_1 = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}w + b_{14}s, \\ \sigma y = F_2 = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}w + b_{24}s, \\ \sigma z = F_3 = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}w + b_{34}s, \\ \sigma t = F_4 = b_{41}u + b_{42}v + b_{43}w + b_{44}s. \end{cases}$$

Nach § 76, (16) folgt daher:

Jede Ebene des Raumes, die keine Doppelebene der Fläche ist, hat einen bestimmten Pol (§ 68, **12**).

7. Involutorische Beziehung zweier harmonischen Polarebenen. Die Doppelform (3) der Bedingung harmonischer Polarebenen hat mit Rücksicht auf (5) die Bedeutung (§ 68, **13**).

I. *Von zwei harmonischen Polarebenen geht jede durch den Pol der andern;* oder

II. *Geht die Ebene Π_2 durch den Pol P_1 der Ebene Π_1, so liegt der Pol P_2 der Ebene Π_2 in der Ebene Π_1*; und mit Rücksicht auf **4**, III:

III. *Der Pol P_2 einer Ebene Π_2, die durch den Berührungspunkt P_1 einer Ebene Π_1 der Fläche geht, liegt in dieser Ebene Π_1.*

8. Pole der Ebenen eines Ebenenbüschels. Die dualen Schlußweisen zu § 68, **14** geben die Sätze[56]):

I. *Die Pole der Ebenen eines Ebenenbüschels bilden eine zu ihm projektive Punktreihe.*

II. *Dreht sich eine Ebene um eine Achse, so durchläuft ihr Pol einen Strahl.*

9. Reziproke Polaren. Dieser heißt die Polare der Achse. Ferner stellen sich neben § 68, **15** die dualen Sätze[166]):

I. *Zwei Gerade, von denen jede die Verbindungslinie der Pole zweier Ebenen der andern ist, heißen reziproke Polaren.*

II. *Die Pole aller Ebenen der einen von zwei reziproken Polaren liegen auf der andern.*

III. *Jede Ebene der einen ist harmonische Polarebene jeder Ebene der andern.*

IV. *An einer gemeinsamen Transversalen zweier reziproken Polaren sind die beiden durch die Transversale gehenden Tangentialebenen zu den beiden Ebenen, welche die Transversale mit den beiden reziproken Polaren verbinden, harmonisch.*

V. *Die Schnittlinie zweier Ebenen der Fläche und die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte sind reziproke Polaren.*

10. Vereinigt liegende und zusammenfallende reziproke Polaren. Wie in § 68, **16**; **17** und **21** folgt:

I. *Wenn zwei reziproke Polaren in einer Ebene liegen, ist diese eine Tangentialebene der Fläche, und sie selbst sind Tangenten in ihr.*

II. *Die reziproke Polare einer Tangente ist wieder Tangente mit gleicher Berührungsebene.*

III. *Jede Gerade, die mit ihrer reziproken Polaren zusammenfällt, ist eine Erzeugende.*

IV. *Jede Erzeugende ist ihre eigene reziproke Polare.*

11. Die Koordinaten der Polare. Bei der zu § 68, **22** dualen Entwicklung vertauschen sich Strahlen- und Achsenkoordinaten und folgt somit:

Sind q_{kl} die Achsenkoordinaten einer geraden Linie, so sind die Strahlenkoordinaten p'_{kl} ihrer reziproken Polaren in bezug auf die Fläche (1) mit einem Faktor σ:

$$(8)\quad \begin{cases} \sigma p'_{23} = \Phi_1 = \beta_{11} q_{23} + \beta_{12} q_{31} + \beta_{13} q_{12} + \beta_{14} q_{14} + \beta_{15} q_{24} + \beta_{16} q_{34}, \\ \sigma p'_{31} = \Phi_2 = \beta_{21} q_{23} + \beta_{22} q_{31} + \beta_{23} q_{12} + \beta_{24} q_{14} + \beta_{25} q_{24} + \beta_{26} q_{34}, \\ \sigma p'_{12} = \Phi_3 = \beta_{31} q_{23} + \beta_{32} q_{31} + \beta_{33} q_{12} + \beta_{34} q_{14} + \beta_{35} q_{24} + \beta_{36} q_{34}, \\ \sigma p'_{14} = \Phi_4 = \beta_{41} q_{23} + \beta_{42} q_{31} + \beta_{43} q_{12} + \beta_{44} q_{14} + \beta_{45} q_{24} + \beta_{46} q_{34}, \\ \sigma p'_{24} = \Phi_5 = \beta_{51} q_{23} + \beta_{52} q_{31} + \beta_{53} q_{12} + \beta_{54} q_{14} + \beta_{55} q_{24} + \beta_{56} q_{34}, \\ \sigma p'_{34} = \Phi_6 = \beta_{61} q_{23} + \beta_{62} q_{31} + \beta_{63} q_{12} + \beta_{64} q_{14} + \beta_{65} q_{24} + \beta_{66} q_{34}. \end{cases}$$

Jede Gerade, für welche die hierin zur Abkürzung mit Φ_k bezeichneten linearen Funktionen ihrer Achsenkoordinaten q_{kl} nicht sämtlich verschwinden, hat eine *bestimmte* reziproke Polare.

12. Pole der Ebenen eines Bündels. Dual zu § 68, **23** ergibt sich[56]):

I. *Die Pole der Ebenen eines Ebenenbündels bilden ein zu ihm projektives Punktfeld;* oder:

II. *Dreht sich eine Ebene um einen Punkt, so durchläuft ihr Pol eine Ebene.*

13. Die Polarebene eines Punktes. Diese Ebene heißt die *Polarebene des Punktes.*[58])

I. *Die Polarebene eines Punktes ist die Verbindungsebene der Pole dreier durch den Punkt gehender Ebenen.*

II. *Die Pole aller durch einen Punkt gehenden Ebenen liegen in dessen Polarebene.*

III. *Ein Punkt ist der Pol seiner Polarebene,* oder:

IV. *Die Polarebene eines Punktes ist die Ebene, deren Pol er ist.*

V. *Die Polarebene eines Berührungspunktes ist seine Tangentialebene.*

14. Die Koordinaten der Polarebene. Wie in § 68, **26** folgt:

Die Koordinaten der Polarebene eines Punktes x, y, z, t sind mit einem Faktor ϱ:

$$(9)\quad \left| \begin{aligned} \varrho u &= f_1 = B_{11}x + B_{12}y + B_{13}z + B_{14}t,\\ \varrho v &= f_2 = B_{21}x + B_{22}y + B_{23}z + B_{24}t,\\ \varrho w &= f_3 = B_{31}x + B_{32}y + B_{33}z + B_{34}t,\\ \varrho s &= f_4 = B_{41}x + B_{42}y + B_{43}z + B_{44}t. \end{aligned} \right.$$

Jeder Punkt, für welchen die hierin zur Abkürzung mit f_k bezeichneten linearen Funktionen seiner Koordinaten x, y, z, t nicht sämtlich verschwinden, hat eine *bestimmte Polarebene.*

15. Gleichungen von Polarebene und Polare. Wie in § 68, **28**; **30** geht aus (9) und (8) hervor:

Die Gleichung der Polarebene des Punktes $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ in bezug auf die Fläche (1) *in laufenden Punktkoordinaten lautet:*

$$(10)\qquad f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}z + f_4^{(1)}t = 0.$$

Die Gleichung der reziproken Polare der Geraden $q_1 = q_{kl}^{(1)}$ in bezug auf die Fläche (1) *in laufenden Achsenkoordinaten q_{kl} lautet:*

$$(11)\quad \Phi_1^{(1)}q_{23} + \Phi_2^{(1)}q_{31} + \Phi_3^{(1)}q_{12} + \Phi_4^{(1)}q_{14} + \Phi_5^{(1)}q_{24} + \Phi_6^{(1)}q_{34} = 0.$$

16. Konjugierte Elemente. Indem wir, wie in § 68, **29**; **31** *zwei gleichnamige Elemente konjugiert nennen, wenn jedes von beiden mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt,* haben wir in:

$$(12)\qquad f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}y_2 + f_3^{(1)}z_2 + f_4^{(1)}t_2 = 0,$$

in:

$$(13)\quad \Phi_1^{(1)}q_{23}^{(2)} + \Phi_2^{(1)}q_{31}^{(2)} + \Phi_3^{(1)}q_{12}^{(2)} + \Phi_4^{(1)}q_{14}^{(2)} + \Phi_5^{(1)}q_{24}^{(2)} + \Phi_6^{(1)}q_{34}^{(2)} = 0$$

und in (3) die Bedingungen für zwei *konjugierte Punkte, Gerade* und *Ebenen.*[51])

Zwei konjugierte Ebenen bedeutet dasselbe wie zwei harmonische Polarebenen.

III. Kapitel.

Unterscheidung der Flächen und ihrer Polarsysteme nach dem Rang.

§ 78. Die eigentlichen Flächen zweiter Ordnung und Klasse mit ihrem Polarsystem.

1. Einteilung nach der Anzahl der Doppelelemente. Die allgemeine Fläche zweiter *Ordnung* und die allgemeine Fläche zweiter *Klasse* sind in §§ 66—68 und §§ 75—77 in *dual entsprechender* Weise, aber *völlig unabhängig voneinander* betrachtet worden. Daher haben auch die für beide Flächen mit *denselben* Worten Pol, Polare, Polarebene bezeichneten Begriffe zunächst *verschiedene* Bedeutungen.

Erst in §§ 78—81 werden wir die Frage beantworten, ob und unter welchen Umständen eine Fläche zweiter Ordnung und eine Fläche zweiter Klasse *ein und dasselbe* Gebilde darstellen oder nicht. Hierzu bedarf es aber einer *Einteilung der beiderlei Flächen nach der Anzahl ihrer Doppelelemente* (§ 18, **1**).

Die Gleichungen der Doppelpunkte § 67, (32) stellen vier Ebenen dar, nach § 68, (14) die Polarebenen der Eckpunkte des Koordinatentetraeders $x, y, z, t = 1, 0, 0, 0;\quad 0, 1, 0, 0;\quad 0, 0, 1, 0;\quad 0, 0, 0, 1$ (I § 47, (20)).

Vier Ebenen haben entweder keinen oder einen Punkt gemein oder gehen alle durch eine Achse oder fallen alle zusammen. Das dual Entsprechende gilt im Anschluß an die Gleichungen § 76, (16).

Die Fläche zweiter Ordnung hat entweder keinen oder einen Doppelpunkt, oder ihre Doppelpunkte erfüllen eine Achse oder eine Ebene.	*Die Fläche zweiter Klasse hat entweder keine oder eine Doppelebene, oder ihre Doppelebenen bilden ein Büschel oder ein Bündel.*

Man nennt die Flächen zweiter Ordnung oder Klasse, diesen vier Fällen entsprechend, *vom Range 4, 3, 2 oder 1.*[76])

2. Die Flächen ohne Doppelelement. Die vier Ebenen § 67, (32) haben immer dann und nur dann keinen Punkt gemein, wenn die Determinante § 66, (15) von Null verschieden ist (I § 51, 7).

Die Fläche zweiter Ordnung:	*Die Fläche zweiter Klasse:*
(1) $f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \cdots + 2a_{34}zt = 0$	(1') $F = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + \cdots + 2b_{34}ws = 0$
hat keinen Doppelpunkt, wenn ihre	*hat keine Doppelebene, wenn ihre*

Determinante von Null verschieden ist:

(2) $A = |a_{kl}| \neq 0.$

Sie heißt dann eine *eigentliche Fläche zweiter Ordnung.*

Determinante von Null verschieden ist:

(2′) $B = |b_{kl}| \neq 0.$

Sie heißt dann eine *eigentliche Fläche zweiter Klasse.*

3. Bestimmtheit der Polarelemente bei den eigentlichen Flächen. Das Fehlen eines Doppelelementes findet nach § 68, **12** und § 77, **6** einen weiteren charakteristischen Ausdruck in dem Satze:

I. *In bezug auf die eigentliche Fläche zweiter Ordnung hat jeder Punkt des Raumes eine bestimmte Polarebene.*

I′. *In bezug auf die eigentliche Fläche zweiter Klasse hat jede Ebene des Raumes einen bestimmten Pol.*

Für jede Determinante vierten Grades A sind die Determinanten aus den Unterdeterminanten zweiten und dritten Grades (§ 66, **6**):

(3) $|\alpha_{kl}| = A^3,$ (4) $|A_{kl}| = A^3.$

(I Anm. 1, III, (13); (7)). Daher können unter der Voraussetzung (2) weder die sechs Ausdrücke φ_k in § 68, (22) noch die vier Ausdrücke F_k in § 68, (25) gleichzeitig verschwinden, so daß sich zu I der Zusatz ergibt:

II. *Jede Gerade hat eine bestimmte Polare und jede Ebene einen bestimmten Pol.*

II′. *Jede Gerade hat eine bestimmte Polare und jeder Punkt eine bestimmte Polarebene.*

4. Involutorische Beziehung zwischen Pol und Polarebene. Unter der Voraussetzung (2) sind die Gleichungen § 68, (25) die *Auflösungen* der Gleichungen § 68, (18) nach x, y, z, t, falls man $\varrho\sigma = A$ nimmt. Die beiden Sätze § 68, **24**, I und IV enthalten daher *gleichbedeutende* Definitionen des Poles x, y, z, t einer Ebene u, v, w, s. Ebenso sind die Gleichungen § 77, (9) die *Auflösungen* der Gleichungen § 77, (7).

In bezug auf die eigentliche Fläche zweiter Ordnung oder Klasse gehören je ein Punkt und eine Ebene des Raumes wechselseitig als Pol und Polarebene zusammen. Zwischen beiden Elementen bestehen die Gleichungen § 68, (18) und (25), bezüglich § 77, (7) und (9).

5. Vereinigte Lage von Pol und Polarebene. Wenn bei der eigentlichen Fläche zweiter Ordnung eine Ebene Tangentialebene ist, liegt ihr Pol nach § 68, **25** als ihr Berührungspunkt mit ihr vereinigt. Wenn umgekehrt eine Ebene mit ihrem Pol vereinigt liegt, ist dieser nach § 68, **9** ein Punkt der Fläche und die Ebene Tangentialebene in ihm. Ebenso dual nach § 77, **13**; **4**. Sowohl für die Fläche zweiter Ordnung als die zweiter Klasse gilt daher der Satz:

Die vereinigte Lage von Pol und Polarebene ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der Pol ein Punkt (Berührungspunkt) und die Polarebene eine Tangentialebene der Fläche ist.

6. Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in Ebenenkoordinaten. Zwischen Pol x, y, z, t und Polarebene u, v, w, s der Fläche (1) bestehen nach 4 die Gleichungen § 68, (25). Die Bedingung der vereinigten Lage beider, nämlich:

$$ux + vy + wz + st = 0, \tag{5}$$

ist nach 5 zugleich die Bedingung, daß u, v, w, s Tangentialebene der Fläche (1) ist. Eliminiert man aber aus (5) mittels § 68, (25) die Koordinaten x, y, z, t des Poles, so erhält man in:

$$F_1 u + F_2 v + F_3 w + F_4 s = A_{11} u^2 + A_{22} v^2 + \cdots + 2 A_{34} ws = 0 \tag{6}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Tangentialebene u, v, w, s der Fläche (1). Also mit Hinzufügung des dualen Satzes:

Die Fläche zweiter Ordnung (1) *hat in laufenden Ebenenkoordinaten die Gleichung:*

$$A_{11} u^2 + A_{22} v^2 + \cdots + 2 A_{34} ws = 0. \tag{7}$$

Ihr genügen alle *Tangentialebenen* der Fläche.

Die Fläche zweiter Klasse (1′) *hat in laufenden Punktkoordinaten die Gleichung:*

$$B_{11} x^2 + B_{22} y^2 + \cdots + 2 B_{34} zt = 0. \tag{7'}$$

Ihr genügen alle *Berührungspunkte* der Fläche.

7. Identität der eigentlichen Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichung (7) fällt unter die allgemeine Form (1′) der Fläche zweiter Klasse nur daß die Koeffizienten b_{kl} mit A_{kl} bezeichnet sind, ebenso (7′) unter die Form (1). Unter der Voraussetzung (2) ist aber nach (4) mit Rücksicht auf (2′) die Fläche zweiter Klasse (7) eine eigentliche, also (§ 18, 7):

Jede eigentliche Fläche zweiter Ordnung ist zugleich eine eigentliche Fläche zweiter Klasse und umgekehrt[77]).

8. Vereinigte Behandlung beider. Indem wir also in der Gleichung (1) alle Flächen zweiter Ordnung umfassen, umfassen wir in der Gleichung (7) zugleich alle Flächen zweiter Klasse. Wir vereinigen daher die bisher getrennte Behandlung beider, indem wir:

$$b_{kl} = A_{kl} \tag{8}$$

setzen, womit gleichzeitig (I Anm. 1, III, (8); (11)) wird:

$$B_{kl} = A^2 a_{kl} \tag{9}$$

$$\beta_{kl} = \mathsf{A}_{kl} = A\,\alpha_{\overline{kl}}. \tag{9'}$$

Wir betrachten also fernerhin *dieselbe eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse, deren Gleichung in Punktkoordinaten:*

$$(10)\quad f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0$$

und deren Gleichung in Ebenenkoordinaten lautet:

$$(11)\quad F = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + A_{44}s^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv + 2A_{14}us + 2A_{24}vs + 2A_{34}ws = 0$$

Die Koeffizienten A_{kl} sind nach § 66, **6** die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante der a_{kl} und die a_{kl} nach (9) bis auf den Faktor A^2 die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante der A_{kl}, so daß es ganz gleich ist, welche der beiden Gleichungen (10) und (11) die gegebene ist.

9. Identität der Polarentheorie der Flächen zweiter Ordnung und Klasse. In Folge der Annahme (8) werden nun die Formeln § 77, (7) und § 68, (25), sowie nach (9) auch § 77, (9) und § 68, (18) identisch.

Die in § 68 und § 77 zunächst unabhängig voneinander erklärten gleichbenannten *Begriffe von Pol und Polarebene und reziproken Polaren* fallen also für die eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse (10); (11) je zusammen, so daß für diese Fläche *die Sätze von* § 68 *und von* § 77 *gleichzeitig gelten.* Dabei sind wegen (2) die § 68, **14**, III; **23**, III erwähnten Voraussetzungen immer erfüllt. Wir wiederholen nur die *Formeln* der Polarentheorie nochmals in ihrer durch die Annahme (8) vereinigten Form.

10. Pol und Polarebene. Mit den Abkürzungen (§ 66, (5), § 75, (3))

$$(12)\quad f_i = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i4}t,$$

$$(13)\quad F_i = A_{i1}u + A_{i2}v + A_{i3}w + A_{i4}s,$$

$i = 1, 2, 3, 4$, lauten *die Beziehungen zwischen den Koordinaten von Pol und Polarebene* (§ 68, (18); (25); § 77, (7); (9)):

$$(14)\quad \varrho u = f_1,\quad \varrho v = f_2,\quad \varrho w = f_3,\quad \varrho s = f_4,$$

$$(15)\quad \sigma x = F_1,\quad \sigma y = F_2,\quad \sigma z = F_3,\quad \sigma t = F_4.$$

Die *Gleichungen der Polarebene des Punktes* x_1, y_1, z_1, t_1 *und des Poles der Ebene* u_1, v_1, w_1, s_1 sind (§ 68, (14); (26); § 77, (5); (10)):

$$(16)\quad f_1^{(1)}x + f_2^{(1)}y + f_3^{(1)}z + f_4^{(1)}t = 0,$$

$$(17)\quad F_1^{(1)}u + F_2^{(1)}v + F_3^{(1)}w + F_4^{(1)}s = 0.$$

Die *Bedingungen für zwei konjugierte Punkte* x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 oder *Ebenen* u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 lauten (§ 68, (7); (8); § 77, (2); (3)):

(18) $$f_{12} = f_1^{(1)}x_2 + f_2^{(1)}y_2 + f_3^{(1)}z_2 + f_4^{(1)}t_2 = 0,$$

(19) $$F_{12} = F_1^{(1)}u_2 + F_2^{(1)}v_2 + F_3^{(1)}w_2 + F_4^{(1)}s_2 = 0.$$

Sie geben mit $x_2, y_2, z_2, t_2 = x_1, y_1, z_1, t_1 = x, y, z, t$ und $u_2, v_2, w_2, s_2 = u_1, v_1, w_1, s_1 = u, v, w, s$ nach § 66, (6) wieder die Gleichungen (10) und (11), *die Örter der Punkte und Ebenen, die sich selbst konjugiert sind.*

11. Reziproke Polaren. Mit den Abkürzungen (§ 68, (22); § 77, (8)):

(20) $$\varphi_i = \alpha_{i1}p_{23} + \alpha_{i2}p_{31} + \alpha_{i3}p_{12} + \alpha_{i4}p_{14} + \alpha_{i5}p_{24} + \alpha_{i6}p_{34},$$

(21) $$\Phi_i = \mathsf{A}_{i1}q_{23} + \mathsf{A}_{i2}q_{31} + \mathsf{A}_{i3}q_{12} + \mathsf{A}_{i4}q_{14} + \mathsf{A}_{i5}q_{24} + \mathsf{A}_{i6}q_{34},$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, wo α_{kl} und A_{kl} die Unterdeterminanten zweiten Grades aus den a_{kl} und A_{kl} bedeuten, lauten die Beziehungen zwischen den Koordinaten von zwei reziproken Polaren p_{kl}, q_{kl} und p'_{kl}, q'_{kl}:

(22) $$\varrho q'_{23} = \varphi_1, \ \varrho q'_{31} = \varphi_2, \ \varrho q'_{12} = \varphi_3, \ \varrho q'_{14} = \varphi_4, \ \varrho q'_{24} = \varphi_5, \ \varrho q'_{34} = \varphi_6;$$

(23) $$\sigma p'_{23} = \Phi_1, \ \sigma p'_{31} = \Phi_2, \ \sigma p'_{12} = \Phi_3, \ \sigma p'_{14} = \Phi_4, \ \sigma p'_{24} = \Phi_5, \ \sigma p'_{34} = \Phi_6.$$

Beide Angaben (22) und (23) sind wegen (9') und der Beziehung: $p_{kl} = q_{\bar{k}\bar{l}}$ zwischen Strahlen- und Achsenkoordinaten derselben Geraden (I § 48, (10)) nur formell verschieden.

Die Gleichungen der reziproken Polare einer Geraden $p_{kl}^{(1)}, q_{kl}^{(1)}$ *in laufenden Koordinaten* p_{kl}, q_{kl} *sind* (§ 68, (28); § 77, (11)):

(24) $$\varphi_1^{(1)}p_{23} + \varphi_2^{(1)}p_{31} + \varphi_3^{(1)}p_{12} + \varphi_4^{(1)}p_{14} + \varphi_5^{(1)}p_{24} + \varphi_6^{(1)}p_{34} = 0,$$

(25) $$\Phi_1^{(1)}q_{23} + \Phi_2^{(1)}q_{31} + \Phi_3^{(1)}q_{12} + \Phi_4^{(1)}q_{14} + \Phi_5^{(1)}q_{24} + \Phi_6^{(1)}q_{34} = 0.$$

Die Bedingungen für zwei konjugierte Gerade $p_{kl}^{(1)}, q_{kl}^{(1)}$ und $p_{kl}^{(2)}, q_{kl}^{(2)}$ lauten:

(26) $$\varphi_{12} = \varphi_1^{(1)}p_{23}^{(2)} + \varphi_2^{(1)}p_{31}^{(2)} + \varphi_3^{(1)}p_{12}^{(2)} + \varphi_4^{(1)}p_{14}^{(2)} + \varphi_5^{(1)}p_{24}^{(2)} + \varphi_6^{(1)}p_{34}^{(2)} = 0,$$

(27) $$\Phi_{12} = \Phi_1^{(1)}q_{23}^{(2)} + \Phi_2^{(1)}q_{31}^{(2)} + \Phi_3^{(1)}q_{12}^{(2)} + \Phi_4^{(1)}q_{14}^{(2)} + \Phi_5^{(1)}q_{24}^{(2)} + \Phi_6^{(1)}q_{34}^{(2)} = 0.$$

12. Gleichung der Fläche in Linienkoordinaten. Nach § 68, 31, IV ist eine Gerade immer dann und nur dann zu sich selbst konjugiert, wenn sie Tangente ist. Man erhält daher die Bedingung dafür, daß eine Gerade p_{kl}, q_{kl} Tangente ist, indem man in (26) oder (27) $p_{kl}^{(1)} = p_{kl}^{(2)} = p_{kl}$ oder $q_{kl}^{(1)} = q_{kl}^{(2)} = q_{kl}$ setzt, oder[172]):

Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung und Klasse (10), (11) *in laufenden Strahlen- und Achsenkoordinaten lautet:*

(28) $$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 p_{23} + \varphi_2 p_{31} + \varphi_3 p_{12} + \varphi_4 p_{14} + \varphi_5 p_{24} + \varphi_6 p_{34} \\ &= \alpha_{11}p_{23}^2 + \alpha_{22}p_{31}^2 + \cdots + \alpha_{66}p_{34}^2 + 2\alpha_{12}p_{23}p_{31} + \cdots + 2\alpha_{56}p_{24}p_{34} = 0,\end{aligned}$$

(29) $$\Phi = \mathsf{A}_{11}q_{23}^2 + \cdots + \mathsf{A}_{66}q_{34}^2 + 2\mathsf{A}_{12}q_{23}q_{31} + \cdots + 2\mathsf{A}_{56}q_{24}q_{34} = 0.$$

Die Gleichungen werden erfüllt durch jede *Tangente* der Fläche. Jede der beiden Gleichungen enthält 36 Glieder, nämlich 6 Quadrate und

15 doppelte Produkte der 6 Koordinaten. Die Gleichung (29) geht auch durch Entwicklung der Gleichung § 67, (21) nach den:

(30) $$p_{kl} = x_k^{(1)} x_l^{(2)} - x_k^{(2)} x_l^{(1)}$$

hervor (§ 70, 7).

13. Fläche und Polarsystem. Die durch die Gleichungen (14); (15) ausgedrückte Beziehung zwischen Punkten und Ebenen des Raumes heißt ein *Polarsystem*[78]).

Zu jeder eigentlichen Fläche zweiter Ordnung und Klasse (10), (11) *gehört ein solches Polarsystem*, da es durch die Koeffizienten a_{kl} der Gleichung (10) bestimmt ist.

Aber auch umgekehrt führen die Gleichungen (14), wenn sie mit ihren Auflösungen (15) vorliegen, zu der Fläche zurück. Ist diese doch der Ort der Punkte, die mit ihrer Polarebene, oder das Umhüllungsgebilde der Ebenen, die mit ihrem Pol vereinigt liegen. Man erhält in der Tat ihre Gleichungen (10) und (11), indem man bezüglich die Werte (14) und (15) in die Bedingung (5) einsetzt.

Zu jedem durch die Gleichung (14) *gegebenen Polarsystem* ($a_{kl} = a_{lk}$, $A \neq 0$) *gehört eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse.*

14. Polarsystem und allgemeine Korrelation. Das Polarsystem ist ein durch die Bedingung:

(31) $$a_{kl} = a_{lk}$$

bezeichneter *Sonderfall der allgemeinen Korrelation des Raumes*, bei welcher diese Bedingung nicht notwendig gefordert wird (I § 69, 6).

Hier hat man zwei vereinigt gelegene Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ zu unterscheiden; jeder Punkt ist doppelt zu denken, einmal als Punkt P des einen und einmal als Punkt P' des andern Raumes, ebenso jede Ebene als Π und Π'. Nun entspricht einerseits durch die Gleichungen (§ 68, (18)):

(32) $$\varrho' u' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t, \ldots \quad (A \neq 0)$$

und ihre Auflösungen:

(33) $$\sigma x = A_{11}u' + A_{21}v' + A_{31}w' + A_{41}s', \ldots$$

jedem Punkte $P = x, y, z, t$ des ersten eine Ebene $\Pi' = u', v', w', s'$ des zweiten Raumes und umgekehrt jeder Ebene Π' ein Punkt P. Andererseits aber entspricht der Ebene $\Pi = u, v, w, s$ dreier Punkte P_1, P_2, P_3 des ersten ein Punkt $P' = x', y', z', t'$ des zweiten als Schnittpunkt der entsprechenden Ebenen Π_1', Π_2', Π_3'. Für seine Koordinaten ergibt sich nach der Methode § 68, 26:

(34) $$\sigma' x' = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w + A_{14}s, \ldots,$$

und hieraus folgt durch Auflösung:

(35) $$\varrho u = a_{11}x' + a_{21}y' + a_{31}z' + a_{41}t', \ldots$$

Vereinigt gelegenen Punkten $x, y, z, t = x', y', z', t'$ beider Räume entsprechen also nach (32) und (35) im allgemeinen nicht vereinte Ebenen u', v', w', s' und u, v, w, s, vereinigt gelegenen Ebenen $u, v, w, s = u', v', w', s'$ nach (34) und (33) nicht vereinte Punkte x', y', z', t' und x, y, z, t (§ 18, 12).

Sollten vereinigt gelegenen Punkten stets auch vereinigt gelegene Ebenen entsprechen, müßten die 16 Koeffizienten von (32) denen von (35) proportional sein, also mit einem Faktor τ:

(36) $$a_{11} = \tau a_{11}, \quad a_{12} = \tau a_{21}, \quad a_{21} = \tau a_{12}, \ldots$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung (36) würde aber, falls a_{12} und a_{21} nicht beide 0 sind, folgen: $\tau^2 = 1$ (§ 18, (20)). Den Werten $\tau = 1$ und $\tau = -1$ entsprechen aber die beiden Möglichkeiten $(k, l = 1, 2, 3, 4)$:

(37) $$a_{kl} = a_{lk}$$ oder: (38) $$a_{kk} = 0, \quad a_{kl} = -a_{lk},$$

die dann auch entsprechend zur Folge haben (I Anm. 1, IV, 7):

(37') $$A_{kl} = A_{lk}$$ (38') $$A_{kk} = 0, \quad A_{kl} = -A_{lk}.$$

Die allgemeine Korrelation (32) *des Raumes enthält also als Sonderfälle zwei „involutorische“ Korrelationen* (37) *und* (38).

Die eine von diesen ist *das Polarsystem* (14) *der Fläche zweiter Ordnung und Klasse,* die andere ist das *Polarsystem des linearen Komplexes* (§ 86, (19); (20)).

§ 79. Flächen zweiter Ordnung oder Klasse mit einem Doppelelement.

1. Bedingung für ein Doppelelement. Wenn die Determinante A der Fläche § 78, (1) verschwindet, ohne daß alle Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl} (I Anm. 1, III, (2)) verschwinden, so gibt es einen Punkt, der den Gleichungen § 67, (32), nämlich:

(1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \quad f_4 = 0,$$

genügt (I § 51, 5), und dessen Koordinaten aus je drei dieser Gleichungen bestimmt werden können[79]).

Die Fläche zweiter Ordnung:	*Die Fläche zweiter Klasse:*
(2) $f(x, y, z, t) = 0$	(2') $F(u, v, w, s) = 0$
hat, wenn:	*hat, wenn:*
(3) $A = 0$, A_{kl} *nicht alle* 0,	(3') $B = 0$, B_{kl} *nicht alle* 0,

einen Doppelpunkt P_0 *mit den Koordinaten:*

(4) $$x_0 : y_0 : z_0 : t_0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3} : A_{k4},$$

$k = 1, 2, 3$ oder 4 (§ 19, 1).

eine Doppelebene Π_0 *mit den Koordinaten:*

(4') $$u_0 : v_0 : w_0 : s_0 = B_{k1} : B_{k2} : B_{k3} : B_{k4},$$

2. Andere Form der Bedingung. Wir bezeichnen zur Abkürzung die Summe der *Hauptunterdeterminanten dritten Grades* mit:

(5) $$A' = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}$$

und die Summe der *Hauptunterdeterminanten zweiten Grades* (I Anm. 1, III, (4)) mit:

(6) $$A'' = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} + \alpha_{55} + \alpha_{66},$$

endlich die Summe der *Hauptelemente* mit:

(7) $$A''' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}.$$

Da nun (I Anm. 1, III, (11)):

(8) $$\begin{cases} A_{22}A_{33} - A_{23}^2 = A\alpha_{44}, & A_{33}A_{11} - A_{31}^2 = A\alpha_{55}, & A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A\alpha_{66}, \\ A_{11}A_{44} - A_{14}^2 = A\alpha_{11}, & A_{22}A_{44} - A_{24}^2 = A\alpha_{22}, & A_{33}A_{44} - A_{34}^2 = A\alpha_{33}, \end{cases}$$

so folgt aus (5):

(9) $$\begin{cases} A'A_{11} = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 + A_{14}^2 + A(\alpha_{11} + \alpha_{55} + \alpha_{66}), \\ A'A_{22} = A_{21}^2 + A_{22}^2 + A_{23}^2 + A_{24}^2 + A(\alpha_{22} + \alpha_{66} + \alpha_{44}), \\ A'A_{33} = A_{31}^2 + A_{32}^2 + A_{33}^2 + A_{34}^2 + A(\alpha_{33} + \alpha_{44} + \alpha_{55}), \\ A'A_{44} = A_{41}^2 + A_{42}^2 + A_{43}^2 + A_{44}^2 + A(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}). \end{cases}$$

Durch Addition ergibt sich *die identische Gleichung*[80]:

(10) $$A'^2 = A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 + A_{44}^2 + 2A_{23}^2 + 2A_{31}^2 + 2A_{12}^2 + \\ + 2A_{14}^2 + 2A_{24}^2 + 2A_{34}^2 + 2AA''.$$

Wenn nun $A = 0$ und $A' = 0$ ist, verschwinden nach (10) alle A_{kl}; wenn aber alle A_{kl} verschwinden, ist (I Anm. 1, III, (7)) $A = 0$ und nach (5) $A' = 0$. Daher folgt:

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden aller Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl} *sind (bei reellen* a_{kl}*):*

(11) $$A = 0, \quad A' = 0.$$

Die Bedingungen (3) *oder* (3') *sind daher ersetzbar durch:*

(12) $A = 0, \quad A' \neq 0.$ (12') $B = 0, \quad B' \neq 0.$

3. Flächen mit Doppelelement als Kegel und Kurve. Ein Punkt der Geraden, die den Doppelpunkt $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ mit einem beliebigen

Punkte $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ des Raumes verbindet, hat die Koordinaten (I § 47, (26')):

(13) $x = x_0 + \lambda x_1, \quad y = y_0 + \lambda y_1, \quad z = z_0 + \lambda z_1, \quad t = t_0 + \lambda t_1.$

Die für ihn gebildeten Ausdrücke f_k (§ 66, (5)) werden daher mit Rücksicht auf (1):

(14) $f_1 = f_1^0 + \lambda f_1^{(1)} = \lambda f_1^{(1)}, \quad f_2 = \lambda f_2^{(1)}, \quad f_3 = \lambda f_3^{(1)}, \quad f_4 = \lambda f_4^{(1)}.$

Nach § 66, (6) wird hiernach für den Punkt (13):

$$f = f(x, y, z, t) = f_1 x + f_2 y + f_3 z + f_4 t = \lambda \{ f_1^{(1)}(x_0 + \lambda x_1) + f_2^{(1)}(y_0 + \lambda y_1) + f_3^{(1)}(z_0 + \lambda z_1) + f_4^{(1)}(t_0 + \lambda t_1) \}$$

und nach § 66, (7), § 67, (8) und wieder mit Rücksicht auf (1):

(15) $f = \lambda (f_1^0 x_1 + f_2^0 y_1 + f_3^0 z_1 + f_4^0 t_1) + \lambda^2 f_{11} = \lambda^2 f_{11}.$

Dieser Gleichung entnimmt man den Satz (§ 19, (12)):

I. *Ist P_1 ein Punkt der Fläche* (2), *so gehören alle Punkte des Strahles $P_0 P_1$ der Fläche an.*

Die Punkte der Fläche liegen also reihenweise auf Strahlen, die durch den Doppelpunkt P_0 gehen, und diese Strahlen bilden einen Kegel (vgl. 5).

II. *Die Fläche zweiter Ordnung mit einem Doppelpunkt P_0 ist ein Kegel mit der Spitze P_0.*

I'. *Ist Π_1 eine Ebene der Fläche* (2'), *so gehören alle Ebenen der Achse $\Pi_1 \times \Pi_0$ der Fläche an.*

Die Ebenen der Fläche gehen also büschelweise durch Achsen, die in der Doppelebene Π_0 liegen, und diese Achsen umhüllen eine Kurve.

II'. *Die Fläche zweiter Klasse mit einer Doppelebene Π_0 ist eine Kurve in der Ebene Π_0.*

4. Beziehung zwischen Pol und Polarebene. Die Polarebene des Punktes $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ hat nach § 68, (14) und § 66, (7) in laufenden Koordinaten x, y, z, t die Gleichung:

(16) $f_1^{(2)} x + f_2^{(2)} y + f_3^{(2)} z + f_4^{(2)} t = f_1 x_2 + f_2 y_2 + f_3 z_2 + f_4 t_2 = 0.$

Diese wird, wie ihre zweite Form zeigt, unabhängig von P_2, stets durch den den Gleichungen (1) genügenden Doppelpunkt P_0 erfüllt und wird, wie ihre erste Form zeigt, unbestimmt, wenn P_2 selbst in P_0 fällt.

I. *Jeder Punkt des Raumes, außer dem Doppelpunkt P_0, hat eine bestimmte Polarebene, die durch P_0 geht.*

II. *Die Polarebene von P_0 selbst ist unbestimmt.*

I'. *Jede Ebene des Raumes, außer der Doppelebene Π_0, hat einen bestimmten Pol, der auf Π_0 liegt.*

II'. *Der Pol von Π_0 selbst ist unbestimmt.*

Die Polarebene (16) des Punktes: $x_2 = x_0 + \lambda x_1, \; y_2 = y_0 + \lambda y_1,$

$z_2 = z_0 + \lambda z_1$, $t_2 = t_0 + \lambda t_1$ wird, da nach (14) $f_k^{(2)} = \lambda f_k^{(1)}$ ist, unabhängig von λ, also:

III. *Alle Punkte eines durch P_0 gehenden Strahles haben dieselbe Polarebene.*

III'. *Alle Ebenen einer in Π_0 liegenden Achse haben denselben Pol.*

Die Polarebenen Π_1, Π_2, Π_3 dreier Punkte P_1, P_2, P_3, die in einer nicht durch die Spitze gehenden Ebene Π liegen, schneiden sich nach I in der Spitze $P_0 = \Pi_1 \times \Pi_2 \times \Pi_3$, die also nach § 68, **24**, I der Pol P von Π ist. Geht aber Π durch P_0, so daß man $P_1 = P_0$ nehmen kann, so löst sich der Pol $P = \Pi_0 \times \Pi_2 \times \Pi_3$, da Π_0 nach II unbestimmt ist, in die durch P_0 gehende Gerade $\Pi_2 \times \Pi_3$ auf:

IV. *Der Pol einer Ebene, die nicht durch die Spitze geht, ist stets die Spitze selbst.*

V. *Die Pole einer Ebene, die durch die Spitze geht, erfüllen eine durch die Spitze gehende Gerade.*

IV'. *Die Polarebene eines Punktes, der nicht in der Doppelebene liegt, ist stets die Doppelebene.*

V'. *Die Polarebenen eines Punktes der Doppelebene bilden ein Ebenenbüschel an einer in der Doppelebene liegenden Achse.*

5. Flächen mit Doppelelement als uneigentliche Flächen. Da die Fläche (2) oder (2') nach **3**, II ein Kegel oder eine Kurve ist, so kann sie insofern als *uneigentliche Fläche zweiter Ordnung oder Klasse im Raume* gelten, als sie schon einer *niederen Mannigfaltigkeit*, dem *Bündel* mit dem Zentrum P_0 oder der *Ebene* Π_0, angehört.

Die Fläche (2) wird von einer Geraden g in zwei Punkten P_1 und P_2 geschnitten oder enthält die Gerade ganz (§ 67, **2**; **8**). Liegt daher die Gerade g in einer gegebenen durch P_0 gehenden Ebene Γ, ohne selbst durch P_0 zu gehen, so enthält diese Ebene Γ nach **3**, I die Strahlen P_0P_1 und P_0P_2 des Kegels oder gehört ganz dem Kegel an. Das letztere ist nicht möglich, da sonst die Fläche in ein Ebenenpaar zerfallen müßte (§ 81, 2) und damit ∞^1 Doppelpunkte hätte (§ 81, **1**). Daher folgt:

Der Kegel **3**, II *wird von jeder durch den Doppelpunkt P_0 gehenden Ebene in zwei Geraden geschnitten, ist also ein (eigentlicher) Kegel zweiter Ordnung im Sinne der Geometrie des Bündels* (vgl. § 80, (17)).

Die Kurve **3**, II' *sendet durch jeden Punkt der Doppelebene Π_0 zwei Tangenten, ist also eine (eigentliche) Kurve zweiter Klasse im Sinne der Geometrie der Ebene* (§ 15, **5**).

6. Das Polarsystem der Flächen mit Doppelelement als uneigentliches Polarsystem. Bei dem in **4**. beschriebenen Polarsystem

entsprechen sich im Grunde genommen nicht mehr Punkt und Ebene des Raumes wie § 78, **4**, sondern nach **4**, III; V Strahl und Ebene des Bündels mit dem Zentrum P_0.

Die Polarsysteme des Kegels zweiter Ordnung (2); (3) *und der Kurve zweiter Klasse* (2'); (3') *kommen im wesentlichen auf ein Polarsystem im Bündel, bezüglich in der Ebene (Polarbündel und polares Feld) zurück* (§ 80, **3**; § 18, **11**).

§ 80. Einteilung der Kegel im Bündel und ihrer Polarsysteme nach dem Rang.

1. Dualität zwischen Kegel zweiter Ordnung und zweiter Klasse. Während sich *im Raume* Punkt und Ebene dual entsprechen, stehen sich *im Bündel* Strahl und Ebene dual gegenüber (I § 49, **7**). Während sich daher im Raume der Kegel als Punktgebilde und der Kegelschnitt als Ebenengebilde dual entsprechen (§ 79, **5**),

entspricht im Bündel dem Kegel zweiter Ordnung als Strahlengebilde der Kegel zweiter Klasse als Ebenengebilde.	*entspricht in der Ebene der Kurve zweiter Klasse als Strahlengebilde die Kurve zweiter Ordnung als Punktgebilde.*

Wie nun in der Ebene die Kurve zweiter Ordnung und Klasse (§§ 9—11; 15—17), so kann man im Bündel den Kegel zweiter Ordnung und Klasse ohne Bezugnahme auf den Raum behandeln.

Bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ *im Bündel* ist[40]):

(1) $h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0$	(1') $H(u, v, w) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu + 2b_{12}uv = 0$
die *allgemeine Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung in Strahlenkoordinaten* (I § 49, **6**).	die *allgemeine Gleichung eines Kegels zweiter Klasse in Ebenenkoordinaten* (I § 49, **5**).

Für $h(x, y, z)$ und $H(u, v, w)$ sollen die in § 66, **5** und § 75, **2** eingeführten Abkürzungen gelten.

2. Quadratische Gleichung der Strahlen in einer Ebene oder der Ebenen durch einen Strahl. Der laufende Strahl einer Ebene des Bündels, die durch zwei feste Strahlen x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 gegeben ist, hat Koordinaten von der Form (I § 49, (22)):

$$(2) \qquad x = x_1 + \lambda x_2, \quad y = y_1 + \lambda y_2, \quad z = z_1 + \lambda z_2;$$

die laufende Ebene durch einen Strahl, der durch zwei Ebenen u_1, v_1, w_1

und u_2, v_2, w_2 gegeben ist, ebenso Koordinaten von der Form (I § 49, (30)):

(2′) $$u = u_1 + \lambda u_2, \quad v = v_1 + \lambda v_2, \quad w = w_1 + \lambda w_2.$$

In beiden Fällen ist λ der Parameter (die multiplizierte Verhältniskoordinate) des laufenden Elementes.

Es ergibt sich daher genau auf demselben Wege wie in § 67, 2 und § 76, 1[45]):

Die quadratische Gleichung:

(3) $$h_{11} + 2h_{12}\lambda + h_{22}\lambda^2 = 0$$

bestimmt die Parameter $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ *der beiden Schnittstrahlen des Kegels* (1) *mit der Ebene der beiden Strahlen* x_1, y_1, z_1 *und* x_2, y_2, z_2.

Die quadratische Gleichung:

(3′) $$H_{11} + 2H_{12}\lambda + H_{22}\lambda^2 = 0$$

bestimmt die Parameter $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ *der beiden Ebenen des Kegels* (1′), *die durch den Schnittstrahl der beiden Ebenen* u_1, v_1, w_1 *und* u_2, v_2, w_2 *gehen.*

Hier bedeutet:

(4) $$h_{11} = h(x_1, y_1, z_1), \quad h_{22} = h(x_2, y_2, z_2),$$
$$h_{12} = h_1^{(1)}x_2 + h_2^{(1)}y_2 + h_3^{(1)}z_2 = h_1^{(2)}x_1 + h_2^{(2)}y_1 + h_3^{(2)}z_1,$$

und entsprechend H_{11}, H_{22}, H_{12}.

3. Konjugierte Strahlen und Ebenen. Auf die quadratische Gleichung (3) gründet sich die *Polarentheorie der Kegel* in derselben Weise wie auf § 68, (8) die der Flächen zweiter Ordnung. Es bedarf daher hier nur der *Angabe* der entsprechenden Sätze[51]).

Zwei durch die Bedingung:

(5) $$h_1^{(1)}x_2 + h_2^{(1)}y_2 + h_3^{(1)}z_2 = h_1^{(2)}x_1 + h_2^{(2)}y_1 + h_3^{(2)}z_1 = 0$$

verknüpfte Strahlen sind harmonisch zu den Strahlen, in denen ihre Verbindungsebene den Kegel (1) *schneidet, und heißen harmonische Polaren oder konjugierte Strahlen in bezug auf den Kegel.*

Der Ort aller konjugierten Strahlen eines Strahles $p_1 = x_1, y_1, z_1$ ist die *Polarebene* des Strahles. Ihre *Gleichung* lautet:

(6) $$h_1^{(1)}x + h_2^{(1)}y + h_3^{(1)}z = 0.$$

Die *Koordinaten der Polarebene* des Strahles x, y, z sind:

Zwei durch die Bedingung:

(5′) $$H_1^{(1)}u_2 + H_2^{(1)}v_2 + H_3^{(1)}w_2 = H_1^{(2)}u_1 + H_2^{(2)}v_1 + H_3^{(2)}w_1 = 0$$

verknüpfte Ebenen sind harmonisch zu den Ebenen, die durch ihre Schnittlinie an den Kegel (1′) *gehen, und heißen harmonische Polarebenen oder konjugierte Ebenen in bezug auf den Kegel.*

Der Ort aller konjugierten Ebenen einer Ebene $\Pi_1 = u_1, v_1, w_1$ ist der *Polstrahl* der Ebene. Seine *Gleichung* lautet:

(6′) $$H_1^{(1)}u + H_2^{(1)}v + H_3^{(1)}w = 0.$$

Die *Koordinaten des Polstrahles* der Ebene u, v, w sind:

$$(7)\quad \begin{cases} \varrho u = h_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \varrho v = h_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ \varrho w = h_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Von zwei harmonischen Polstrahlen liegt jeder in der Polarebene des andern (§ 68, **13**).

$$(7')\quad \begin{cases} \varrho x = H_1 = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}w, \\ \varrho y = H_2 = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}w, \\ \varrho z = H_3 = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}w. \end{cases}$$

Von zwei harmonischen Polarebenen geht jede durch den Polstrahl der andern.

4. Polar- und Berührungselemente (vgl. § 68, **9**; § 77, **4**).

Die Polarebene eines Strahles des Kegels selbst ist die Tangentialebene längs desselben.

Ein Strahl liegt mit seiner Polarebene vereinigt (ist sich selbst konjugiert), wenn er dem Kegel angehört.

Die Berührungsstrahlen der beiden durch einen beliebigen Strahl des Bündels gelegten Tangentialebenen liegen in der Polarebene dieses Strahles (§ 11, **10**).

Der Polstrahl einer Ebene des Kegels selbst ist der Berührungsstrahl der Ebene.

Eine Ebene liegt mit ihrem Polstrahl vereinigt (ist sich selbst konjugiert), wenn sie dem Kegel angehört.

Die Berührungsebenen längs der beiden in einer beliebigen Ebene des Bündels liegenden Strahlen des Kegels gehen durch den Polstrahl dieser Ebene (§ 17, **5**).

5. Doppelstrahlen und Doppelebenen.

Ein Strahl, für den (§ 10, (28); § 67, (32)):

$$(8)\quad \begin{cases} h_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ h_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ h_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0, \end{cases}$$

heißt ein *Doppelstrahl des Kegels.*

Die Polarebene eines Doppelstrahles ist nach (7) unbestimmt.

Eine Ebene, für die (§ 16, (16); § 76, (16)):

$$(8')\quad \begin{cases} H_1 = b_{11}u + b_{12}v + b_{13}w = 0, \\ H_2 = b_{21}u + b_{22}v + b_{23}w = 0, \\ H_3 = b_{31}u + b_{32}v + b_{33}w = 0, \end{cases}$$

heißt eine *Doppelebene des Kegels.*

Der Polstrahl einer Doppelebene ist nach (7′) unbestimmt.

6. Der eigentliche Kegel zweiter Ordnung und Klasse. Wir bezeichnen *die Determinante dritten Grades des Kegels zweiter Ordnung* (1) oder zweiter Klasse (1′) wie § 9, (15) und § 15, **3** mit:

$$(9)\quad A = |a_{kl}|, \qquad (9')\quad B = |b_{kl}|.$$

Der Kegel (1) oder (1′) heißt ein *eigentlicher Kegel* zweiter Ordnung oder zweiter Klasse (ist vom *Range* 3), wenn seine Determinante A oder B nicht verschwindet (vgl. § 18, **2**; § 78, **2**).

Der eigentliche Kegel zweiter Ordnung hat keinen Doppelstrahl.

Der eigentliche Kegel zweiter Klasse hat keine Doppelebene.

7. Die Polarentheorie des eigentlichen Kegels zweiter Ordnung oder Klasse. Unter der Bedingung (9); (9′) haben die Gleichungen (7); (7′) eine bestimmte Auflösung nach $x:y:z$ oder $u:v:w$:

$$(10)\quad \begin{cases} \sigma x = A_{11}u + A_{12}v + A_{13}w, \\ \sigma y = A_{21}u + A_{22}v + A_{23}w, \\ \sigma z = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w, \end{cases} \qquad (10')\quad \begin{cases} \sigma u = B_{11}x + B_{12}y + B_{13}z, \\ \sigma v = B_{21}x + B_{22}y + B_{23}z, \\ \sigma w = B_{31}x + B_{32}y + B_{33}z, \end{cases}$$

wo $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{33}$ die Unterdeterminanten zweiten Grades von (9) und ebenso $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{33}$ von (9′) bedeuten.

Bei dem eigentlichen Kegel zweiter Ordnung (1) *gehören vermöge der Formeln* (7) *und* (10) *je ein Strahl x, y, z und eine Ebene u, v, w des Bündels als Polstrahl und Polarebene zusammen.*

Bei dem eigentlichen Kegel zweiter Klasse (1′) *gehören vermöge der Formeln* (7′) *und* (10′) *je eine Ebene u, v, w und ein Strahl x, y, z des Bündels als Polarebene und Polstrahl zusammen.*

8. Identität des Kegels zweiter Ordnung und Klasse. Wie in § 18, 6 erhält man die notwendige und hinreichende Bedingung für eine Tangentialebene des Kegels zweiter Ordnung, indem man in die Bedingung der vereinigten Lage (I § 49, (7)) von Strahl und Ebene:

$$(11)\qquad ux + vy + wz = 0$$

die Werte (10) einführt. Also:

Die Tangentialebenen des eigentlichen Kegels zweiter Ordnung (1) *genügen der Bedingung:*

$$(12)\quad A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + \cdots + 2A_{12}uv = 0.$$

Die Berührungsstrahlen des eigentlichen Kegels zweiter Klasse (1′) *genügen der Bedingung:*

$$(12')\quad B_{11}x^2 + B_{22}y^2 + \cdots + 2B_{12}xy = 0.$$

Da nun die Determinanten der A_{kl} und B_{kl} bezüglich gleich A^2 und B^2 (I Anm. 1, II, (4)), also nicht Null sind, so ergibt sich wie § 18, 7[77]):

Jeder eigentliche Kegel zweiter Ordnung ist auch ein eigentlicher Kegel zweiter Klasse und umgekehrt.

Setzt man demnach wie § 18, 8:

$$(13)\qquad b_{kl} = A_{kl};\quad B_{kl} = A a_{kl},$$

so werden die Gleichungen (1′) und (12), sowie (1) und (12′) dieselben und *stellen denselben Kegel zweiter Ordnung und Klasse in Strahlen- und Ebenenkoordinaten dar.*

Gleichzeitig fallen auch die Gleichungen (7) mit (10′) und (7′) mit (10) zusammen.

Die Polarbeziehung bei den Kegeln (1) und (1′) ist daher ebenfalls dieselbe. Man bezeichnet sie als *Polarbündel*[78]).

9. Zerfallender Kegel zweiter Ordnung oder Klasse. Wie § 19, **1** folgt aus den Gleichungen (8) und (8′):

Der Kegel zweiter Ordnung (1) *hat, wenn:*

(14) $A = 0$, A_{kl} *nicht alle Null*, *einen Doppelstrahl* p_0 *mit den Koordinaten:*

(15) $x_0 : y_0 : z_0 = A_{k1} : A_{k2} : A_{k3}$, $k = 1, 2$ oder 3.

Der Kegel zweiter Klasse (1′) *hat, wenn:*

(14′) $B = 0$, B_{kl} *nicht alle Null*, *eine Doppelebene* Π_0 *mit den Koordinaten:*

(15′) $u_0 : v_0 : w_0 = B_{k1} : B_{k2} : B_{k3}$,

Wie in § 19, **3** läßt sich dann zeigen, daß, wenn p_1 ein Strahl des Kegels ist, alle Strahlen der Ebene $p_0 p_1$ dem Kegel angehören. Der Kegel besteht daher aus Ebenen des Büschels mit der Achse p_0, und zwar als Kegel zweiter Ordnung aus zwei solchen.

Der Kegel zweiter Ordnung mit einem Doppelstrahl p_0 *ist ein Ebenenpaar mit der Achse* p_0.

Der Kegel zweiter Klasse mit einer Doppelebene Π_0 *ist ein Strahlenpaar in der Ebene* Π_0.

Wenn endlich:

(16) alle $A_{kl} = 0$, a_{kl} nicht alle 0 sind, fallen die beiden Ebenen des Paares in eine *Doppelebene* zusammen, die durch jede der Gleichungen (8) dargestellt wird.

(16′) alle $B_{kl} = 0$, b_{kl} nicht alle 0 sind, fallen die beiden Strahlen des Paares in einen *Doppelstrahl* zusammen, der durch jede der Gleichungen (8′) dargestellt wird.

Der Kegel heißt in den Fällen (15); (15′), bezüglich (16); (16′) auch vom *Range* 2 und 1 (§ 18, **1**).

10. Einteilung der Kegel zweiter Ordnung nach dem Rang. Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so erhalten wir für die Kegel (1) wie in § 19, (27) und (28) folgende Übersicht[76]):

$$(17)\quad \begin{cases} A \neq 0: \text{ Eigentliche Kegel zweiter Ordnung,} \\ A = 0,\ A_{kl} \neq 0!: \text{ Getrennte Ebenenpaare,} \\ A = 0,\ A_{kl} = 0!\ a_{kl} \neq 0: \text{ Doppelebenen.} \end{cases}$$

Die beiden letzten Zeilen sind (bei reellen a_{kl}) ersetzbar durch:

$$(18)\quad \begin{cases} A = 0,\ A' \neq 0: \text{ Getrennte Ebenenpaare,} \\ A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0: \text{ Doppelebenen,} \end{cases}$$

wo A' und A'' die Bedeutung § 19, (3); (4) haben.

Unter den entsprechenden Bedingungen ist der Kegel zweiter *Klasse* ein *eigentlicher Kegel zweiter Klasse* oder ein *Strahlenpaar* oder ein *Doppelstrahl* (§ 42, **9**).

11. Kegel zweiter Ordnung und Klasse im Raume. Etwas anders als im Bündel gestaltet sich die Bedeutung der Gleichung (1) und (1′) und die Darstellung der Kegel im Raume. Versteht man nämlich unter x, y, z, t und u, v, w, s laufende homogene *Punkt- und Ebenenkoordinaten im Raume*, so bedeuten die folgenden Gleichungen:

(19) $h(x, y, z) = 0$

einen Kegel zweiter Ordnung am Anfangspunkt O als Spitze (I § 72, (16));

(20) $h(x, y, z) = 0, \quad t = 0$

seine Leitkurve zweiter Ordnung in der unendlich fernen Ebene (I § 72, 17)).

(19′) $H(u, v, w) = 0$

eine Kurve zweiter Klasse in der unendlich fernen Ebene (I § 72, (16′));

(20′) $H(u, v, w) = 0, \quad s = 0$

den über ihr stehenden Kegel zweiter Klasse am Anfangspunkt O als Spitze (I § 72, (17′)).

Dabei sind im ersten Falle (17), $A \neq 0$, unter der Annahme (13) die Kegel (19) und (20′), sowie die Kurven (19′) und (20) mit Rücksicht auf 8 je identisch (I § 49, 5).

Während also die eigentliche Fläche zweiter Ordnung und Klasse in Punkt- und Ebenenkoordinaten je durch *eine* Gleichung dargestellt wird (§ 78, 8), entsprechend dem Umstande, daß sie ∞^2 Punkte und ∞^2 Tangentialebenen hat, wird (§ 71, 3, 4):

der eigentliche Kegel zweiter Ordnung und Klasse (1); (1′) *in Punktkoordinaten* durch *eine* Gleichung (19), *in Ebenenkoordinaten* durch *zwei* Gleichungen (20′) dargestellt, wie er denn ∞^1 Tangentialebenen, aber ∞^2 Punkte hat, die reihenweise auf seinen Erzeugenden liegen.

die eigentliche Kurve zweiter Ordnung und Klasse in Ebenenkoordinaten durch *eine* Gleichung (19′), *in Punktkoordinaten* durch *zwei* Gleichungen (20) dargestellt, wie sie denn ∞^1 Punkte, aber ∞^2 Tangentialebenen hat, die büschelweise durch ihre Tangenten gehen.

12. Die unendlich ferne Kurve der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung. Die Kurve (20) ist zugleich *diejenige Kurve* § 66, (23), *in der die allgemeine Fläche zweiter Ordnung* § 66, (3) *von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird.* Diese ist also nach (17) mit entsprechender Änderung der Bezeichnung (§ 66, 6) für[9]):

$$(21)\quad \begin{aligned} &A_{44} \neq 0\text{: ein eigentlicher Kegelschnitt,}\\ &A_{44} = 0,\quad A'_{44} \neq 0\text{: ein Geradenpaar,}\\ &A_{44} = 0,\quad A'_{44} = 0,\quad A''_{44} \neq 0\text{: eine Doppelgerade,}\\ &A_{44} = 0,\quad A'_{44} = 0,\quad A''_{44} = 0\text{: unbestimmt (§ 19, (24)).} \end{aligned}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt (§ 66, 6):

$$(22)\quad A'_{44} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad A''_{44} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

13. Zylinder zweiter Ordnung und Klasse im Raume. Indem man unter $h(x, y, t)$ und $H(u, v, s)$ die Ausdrücke (1) und (1') mit t für z und s für w versteht, bedeuten in laufenden *Punkt- und Ebenenkoordinaten im Raume* die Gleichungen:

(23) $h(x, y, t) = 0$	(23') $H(u, v, s) = 0$
einen Zylinder zweiter Ordnung senkrecht zur xy-Ebene (I § 72, (14));	*eine Kurve zweiter Klasse in der xy-Ebene* (I § 72, (14'));
(24) $h(x, y, t) = 0, \quad z = 0$	(24') $H(u, v, s) = 0, \quad w = 0$
eine Kurve zweiter Ordnung in der xy-Ebene (I § 72, (15)).	*einen Zylinder zweiter Klasse senkrecht zur xy-Ebene* (I § 72, (15')).

Dabei sind im ersten Falle (17), $A \neq 0$, unter der Annahme (13) die Zylinder (23) und (24'), sowie die Kurven (24) und (23') identisch. Ein Beispiel für (23') findet sich (mit u, w, 1 für u, v, s) § 53, (35).

§ 81. Flächen zweiter Ordnung oder Klasse mit mehr als einem Doppelelement.

1. Bedingungen für eine Doppellinie. Wenn alle Unterdeterminanten dritten Grades A_{kl}, aber nicht alle Unterdeterminanten zweiten Grades α_{kl} verschwinden, so gibt es eine Gerade, deren Punkte den Gleichungen § 79, (1) genügen (I § 51, (9)) und deren Achsenkoordinaten aus je zweien dieser Gleichungen bestimmt werden können.[79])

Die Fläche zweiter Ordnung § 79, (2) *hat, wenn:*	*Die Fläche zweiter Klasse* § 79, (2') *hat, wenn:*
(1) *alle* A_{kl}, *aber nicht alle* α_{kl} *Null, eine Doppelgerade* q_0 *mit den Achsenkoordinaten:*	(1') *alle* B_{kl}, *aber nicht alle* β_{kl} *Null, eine Doppelgerade* p_0 *mit den Strahlenkoordinaten:*
(2) $q_{23}^0 : q_{31}^0 : q_{12}^0 : q_{14}^0 : q_{24}^0 : q_{34}^0 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6}$,	(2') $p_{23}^0 : p_{31}^0 : p_{12}^0 : p_{14}^0 : p_{24}^0 : p_{34}^0 = \beta_{k1} : \beta_{k2} : \beta_{k3} : \beta_{k4} : \beta_{k5} : \beta_{k6}$,

$k = 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

2. Ebenenpaare oder Punktepaare. Die Betrachtungen § 79, 3 setzen nur voraus, daß der Punkt P_0 den Gleichungen § 79, (1) genügt. Dies trifft jetzt für alle Punkte der Doppelgeraden zu. Daher folgt wie dort, daß mit einem Punkte P_1 stets die ganze Verbindungslinie des Punktes P_1 und eines beliebigen Punktes P_0 der Doppellinie auf der Fläche liegt, oder:

Ist P_1 ein Punkt der Fläche außerhalb q_0, so gehören auch alle Punkte der Ebene $P_1 q_0$ der Fläche an.

Die Fläche besteht daher aus Ebenen des Ebenenbüschels der Achse q_0, und zwar als Fläche zweiter Ordnung aus zwei solchen.

Unter der Voraussetzung (1) *ist die Fläche zweiter Ordnung* § 79, (2) *ein Ebenenpaar* E_1, E_2 *mit der Schnittlinie* (2).

Unter der Voraussetzung (1′) *ist die Fläche zweiter Klasse* § 79, (2′) *ein Punktepaar* E_1, E_2 *mit der Verbindungslinie* (2′).

3. Pol und Polarebene. Ferner ergibt sich wie in § 79, **4**:

I. *Jeder Punkt des Raumes, ausgenommen die Punkte der Doppellinie* q_0, *hat eine bestimmte Polarebene, die durch die Doppellinie geht.*

II. *Die Polarebenen der Punkte der Doppellinie sind unbestimmt.*

III. *Alle Punkte einer durch die Doppellinie gehenden Ebene haben dieselbe Polarebene.*

I′. *Jede Ebene des Raumes, ausgenommen die Ebenen der Doppellinie* p_0, *hat einen bestimmten Pol, der in der Doppellinie liegt.*

II′. *Die Pole der Ebenen der Doppellinie sind unbestimmt.*

III′. *Alle Ebenen eines auf der Doppellinie liegenden Punktes haben denselben Pol.*

4. Übergang auf die Ebenen- und Punktinvolutionen. Innerhalb des Ebenenbüschels, dessen Achse die Doppellinie q_0 ist, gehört infolge von **3**, III zu jeder Ebene Π_1 eine Polarebene Π_2, eben die gemeinsame Polarebene aller Punkte P_1 von Π_1. Die beiden Ebenen Π_1 und Π_2 aber stehen nach § 68, **5** in der Beziehung, daß die Verbindungslinie eines Punktes P_1 auf Π_1 und eines Punktes P_2 auf Π_2 das die Fläche zweiter Ordnung bildende Ebenenpaar E_1, E_2 in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet, die zu P_1 und P_2 harmonisch sind. Die Ebenen Π_1 und Π_2 sind daher (I § 52, (11)) selbst zu E_1 und E_2 harmonisch.

Innerhalb des Ebenenbüschels, das durch das Ebenenpaar E_1, E_2 *bestimmt ist, kommt dessen Polarentheorie auf eine Ebeneninvolution zurück.* (§ 7, **13**; § 8, **10**).

Innerhalb der Punktreihe, die durch das Punktepaar E_1, E_2 *bestimmt ist, kommt die Polarentheorie auf eine Punktinvolution zurück.* (§ 8, **5**).

5. Andere Form der Bedingungen des Ebenenpaares. Für die Unterdeterminanten dritten und zweiten Grades A_{kl} und α_{kl} der Determinante A gelten die Formeln (I Anm. 1, II, (5)):

$$(3)\quad \begin{cases} A_{11}a_{22} = \alpha_{11}\alpha_{55} - \alpha_{15}^2, & A_{22}a_{33} = \alpha_{22}\alpha_{66} - \alpha_{26}^2, \quad A_{33}a_{11} = \alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2, \\ A_{11}a_{33} = \alpha_{11}\alpha_{66} - \alpha_{16}^2, & A_{22}a_{11} = \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2, \quad A_{33}a_{22} = \alpha_{33}\alpha_{55} - \alpha_{35}^2, \\ A_{11}a_{44} = \alpha_{55}\alpha_{66} - \alpha_{56}^2, & A_{22}a_{44} = \alpha_{66}\alpha_{44} - \alpha_{64}^2, \quad A_{33}a_{44} = \alpha_{44}\alpha_{55} - \alpha_{45}^2, \\ A_{44}a_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2, & A_{44}a_{22} = \alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{13}^2, \quad A_{44}a_{33} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2, \end{cases}$$

$$(4)\quad\begin{cases} A_{23}a_{23}=\alpha_{23}\alpha_{56}-\alpha_{25}\alpha_{36}, \quad A_{31}a_{31}=\alpha_{31}\alpha_{64}-\alpha_{36}\alpha_{14}, \\ A_{14}a_{14}=\alpha_{26}\alpha_{35}-\alpha_{25}\alpha_{36}, \quad A_{24}a_{24}=\alpha_{34}\alpha_{16}-\alpha_{36}\alpha_{14}, \\ A_{12}a_{12}=\alpha_{12}\alpha_{45}-\alpha_{14}\alpha_{25}, \\ A_{34}a_{34}=\alpha_{15}\alpha_{24}-\alpha_{14}\alpha_{25}. \end{cases}$$

Mittels (3) ergibt sich nun aus § 79, (6):

$$(5)\quad\begin{cases} A''\alpha_{11}=\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2+\alpha_{11}\alpha_{44}+\alpha_{15}^2+\alpha_{16}^2+(a_{22}+a_{33})(A_{11}+A_{44}), \\ A''\alpha_{22}=\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{22}\alpha_{55}+\alpha_{26}^2+(a_{33}+a_{11})(A_{22}+A_{44}), \\ A''\alpha_{33}=\alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2+\alpha_{34}^2+\alpha_{35}^2+\alpha_{33}\alpha_{66}+(a_{11}+a_{22})(A_{33}+A_{44}), \\ A''\alpha_{44}=\alpha_{44}\alpha_{11}+\alpha_{42}^2+\alpha_{43}^2+\alpha_{44}^2+\alpha_{45}^2+\alpha_{46}^2+(a_{11}+a_{44})(A_{22}+A_{33}), \\ A''\alpha_{55}=\alpha_{51}^2+\alpha_{55}\alpha_{22}+\alpha_{53}^2+\alpha_{54}^2+\alpha_{55}^2+\alpha_{56}^2+(a_{22}+a_{44})(A_{33}+A_{11}), \\ A''\alpha_{66}=\alpha_{61}^2+\alpha_{62}^2+\alpha_{66}\alpha_{33}+\alpha_{64}^2+\alpha_{65}^2+\alpha_{66}^2+(a_{33}+a_{44})(A_{11}+A_{22}), \end{cases}$$

und hieraus durch Addition:

$$(6)\quad \begin{aligned} A''^2 &= (\alpha_{11}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{33}^2+\alpha_{44}^2+\alpha_{55}^2+\alpha_{66}^2)+2(\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2 \\ &+\alpha_{15}^2+\alpha_{16}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{26}^2+\alpha_{34}^2+\alpha_{35}^2+\alpha_{45}^2+\alpha_{46}^2+\alpha_{56}^2) \\ &+2(\alpha_{11}\alpha_{44}+\alpha_{22}\alpha_{55}+\alpha_{33}\alpha_{66})+2A'A'''-2(a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22} \\ &+a_{33}A_{33}+a_{44}A_{44}). \end{aligned}$$

Nun ist aber (I Anm. 1, III, (17)):

$$(7)\quad\begin{cases} A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}, \\ A=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}+a_{24}A_{24}, \\ A=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}, \\ A=a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}, \end{cases}$$

und daher:

$$(8)\quad \begin{aligned} 4A &= a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22}+a_{33}A_{33}+a_{44}A_{44} \\ &+2(a_{23}A_{23}+a_{31}A_{31}+a_{12}A_{12}+a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}). \end{aligned}$$

Es ist ferner (I Anm. 1, III, (19)):

$$(9)\quad\begin{cases} A=\alpha_{11}\alpha_{44}+\alpha_{21}\alpha_{54}+\alpha_{31}\alpha_{64}+\alpha_{41}\alpha_{14}+\alpha_{51}\alpha_{24}+\alpha_{61}\alpha_{34}, \\ A=\alpha_{12}\alpha_{45}+\alpha_{22}\alpha_{55}+\alpha_{32}\alpha_{65}+\alpha_{42}\alpha_{15}+\alpha_{52}\alpha_{25}+\alpha_{62}\alpha_{35}, \\ A=\alpha_{13}\alpha_{46}+\alpha_{23}\alpha_{56}+\alpha_{33}\alpha_{66}+\alpha_{43}\alpha_{16}+\alpha_{53}\alpha_{26}+\alpha_{63}\alpha_{36}, \end{cases}$$

und danach:

$$(10)\quad \begin{aligned} 3A &= (\alpha_{11}\alpha_{44}+\alpha_{22}\alpha_{55}+\alpha_{33}\alpha_{66})+(\alpha_{14}^2+\alpha_{25}^2+\alpha_{36}^2) \\ &+2(\alpha_{23}\alpha_{56}+\alpha_{31}\alpha_{64}+\alpha_{12}\alpha_{45})+2(\alpha_{26}\alpha_{35}+\alpha_{34}\alpha_{16}+\alpha_{15}\alpha_{24}). \end{aligned}$$

Aus (8) und (10) ergibt sich sodann:

$$(11)\quad \begin{aligned} A &= (a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22}+a_{33}A_{33}+a_{44}A_{44})-(\alpha_{11}\alpha_{44}+\alpha_{22}\alpha_{55}+\alpha_{33}\alpha_{66}) \\ &-(\alpha_{14}^2+\alpha_{25}^2+\alpha_{36}^2)+2(a_{23}A_{23}+a_{31}A_{31}+a_{12}A_{12}+a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}) \\ &-2(\alpha_{23}\alpha_{56}+\alpha_{31}\alpha_{64}+\alpha_{12}\alpha_{45})-2(\alpha_{26}\alpha_{35}+\alpha_{34}\alpha_{16}+\alpha_{15}\alpha_{24}). \end{aligned}$$

Aus (4) folgt weiter durch Addition:

$$(12)\quad a_{23}A_{23}+a_{31}A_{31}+a_{12}A_{12}+a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}$$
$$=(\alpha_{23}\alpha_{56}+\alpha_{31}\alpha_{64}+\alpha_{12}\alpha_{45})+(\alpha_{26}\alpha_{35}+\alpha_{34}\alpha_{16}+\alpha_{15}\alpha_{24})$$
$$-2(\alpha_{25}\alpha_{36}+\alpha_{36}\alpha_{14}+\alpha_{14}\alpha_{25}).$$

Da sich aber direkt aus der Bedeutung der α_{kl} (I Anm. 1, III, (4)) ergibt:

$$(13)\quad \alpha_{14}+\alpha_{25}+\alpha_{36}=0,$$

also auch:

$$(14)\quad \alpha_{14}^2+\alpha_{25}^2+\alpha_{36}^2+2(\alpha_{25}\alpha_{36}+\alpha_{36}\alpha_{14}+\alpha_{14}\alpha_{25})=0,$$

so wird aus (12):

$$(15)\quad a_{23}A_{23}+a_{31}A_{31}+a_{12}A_{12}+a_{14}A_{14}+a_{24}A_{24}+a_{34}A_{34}$$
$$=(\alpha_{23}\alpha_{56}+\alpha_{31}\alpha_{64}+\alpha_{12}\alpha_{45})+(\alpha_{26}\alpha_{35}+\alpha_{34}\alpha_{16}+\alpha_{15}\alpha_{24})$$
$$+(\alpha_{14}^2+\alpha_{25}^2+\alpha_{36}^2)$$

und hiermit aus (11):

$$(16)\quad A=(a_{11}A_{11}+a_{22}A_{22}+a_{33}A_{33}+a_{44}A_{44})$$
$$-(\alpha_{11}\alpha_{44}+\alpha_{22}\alpha_{55}+\alpha_{33}\alpha_{66})+(\alpha_{14}^2+\alpha_{25}^2+\alpha_{36}^2).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit 2 und addiert sie alsdann zu (6), so ergibt sich die *identische Gleichung*[80]):

$$(17)\quad 2A+A''^2=(\alpha_{11}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{33}^2+\alpha_{44}^2+\alpha_{55}^2+\alpha_{66}^2)$$
$$+2(\alpha_{12}^2+\alpha_{13}^2+\alpha_{14}^2+\alpha_{15}^2+\alpha_{16}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{24}^2+\alpha_{25}^2+\alpha_{26}^2$$
$$+\alpha_{34}^2+\alpha_{35}^2+\alpha_{36}^2+\alpha_{45}^2+\alpha_{46}^2+\alpha_{56}^2)+2A'A'''.$$

Wenn nun $A=0$, $A'=0$, $A''=0$, so folgt aus (17), daß alle α_{kl} verschwinden. Verschwinden aber alle α_{kl}, so ist nach (9) $A=0$, nach § 79, (6) $A''=0$ und (I Anm. 1, II, (6)) alle A_{kl}, also auch $A'=0$.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden aller Unterdeterminanten zweiten Grades α_{kl} *sind daher:*

$$(18)\quad A=0,\quad A'=0,\quad A''=0.$$

Die Bedingungen (1) *sind dagegen mit Rücksicht auf* § 79, (11) *ersetzbar durch:*

$$(19)\quad A=0,\quad A'=0,\quad A''\neq 0.$$

6. Doppelebene und Doppelpunkt. Wenn alle Unterdeterminanten α_{kl} aber nicht alle Elemente a_{kl} verschwinden, so gibt es eine Ebene, deren Punkte den Gleichungen § 79, (1) genügen, und die selbst durch jede der Gleichungen § 79, (1) dargestellt ist. Die Fläche kann außerhalb dieser Ebene keinen Punkt haben. Denn wäre P_1 ein solcher, so würde wie in **2.** die Verbindungslinie P_1P_0 mit einem beliebigen Punkte P_0 der Doppelebene ganz der Fläche an-

gehören; die Punkte der Fläche würden also den ganzen Raum erfüllen.

Die Fläche zweiter Ordnung § 79, (2) *ist, wenn:*

(20) *alle* α_{kl}, *aber nicht alle* a_{kl} *Null, eine Doppelebene mit den Koordinaten:*

(21) $u:v:w:s = a_{k1}:a_{k2}:a_{k3}:a_{k4}$, $k = 1, 2, 3$ oder 4.

Die Doppelebene selbst ist die *Polarebene* aller Punkte des Raumes, die ihr nicht angehören, während ihre eigenen Punkte keine bestimmte Polarebene haben.

Die Fläche zweiter Klasse § 79, (2') *ist, wenn:*

(20') *alle* β_{kl}, *aber nicht alle* b_{kl} *Null, ein Doppelpunkt mit den Koordinaten:*

(21') $x:y:z:t = b_{k1}:b_{k2}:b_{k3}:b_{k4}$,

Der Doppelpunkt selbst ist der *Pol* aller Ebenen des Raumes, die nicht durch ihn gehen, während seine eigenen Ebenen keinen bestimmten Pol haben.

7. Andere Form der Bedingungen der Doppelebene. Nach der Bedeutung der α_{kl} ist:

$$(22)\quad \begin{cases} a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = \alpha_{11}, & a_{33}a_{11} - a_{31}^2 = \alpha_{22}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \alpha_{33}, \\ a_{11}a_{44} - a_{14}^2 = \alpha_{44}, & a_{22}a_{44} - a_{2}^2 = \alpha_{55}, \quad a_{33}a_{44} - a_{34}^2 = \alpha_{66}. \end{cases}$$

Damit ergibt sich aus § 79, (7):

$$23)\quad \begin{cases} A'''a_{11} = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44}, \\ A'''a_{22} = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 + a_{24}^2 + \alpha_{33} + \alpha_{11} + \alpha_{55}, \\ A'''a_{33} = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 + a_{34}^2 + \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{66}, \\ A'''a_{44} = a_{41}^2 + a_{42}^2 + a_{43}^2 + a_{44}^2 + \alpha_{44} + \alpha_{55} + \alpha_{66}. \end{cases}$$

Hieraus aber folgt durch Addition die *identische Gleichung*[80]:

$$(24)\quad \begin{aligned} A'''^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{44}^2 \\ + 2(a_{23}^2 + a_{31}^2 + a_{12}^2 + a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2) + 2A''. \end{aligned}$$

Wenn nun $A'' = 0$ und $A''' = 0$, so folgt aus (24), daß alle a_{kl} verschwinden. Ist umgekehrt das letztere der Fall, so verschwinden auch A''', A'' sowie A' und A.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden aller Elemente a_{kl} *sind:*

$$(25)\qquad (A = 0,\quad A' = 0),\quad A'' = 0,\quad A''' = 0.$$

Die Bedingungen (20) sind dagegen mit Rücksicht auf (18) und (25) ersetzbar durch:

$$(26)\qquad A = 0,\quad A' = 0,\quad A'' = 0,\quad A''' \neq 0.$$

8. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung oder Klasse nach dem Rang. Der *Rang* der Fläche zweiter Ordnung oder Klasse ist entscheidend für die *Anzahl ihrer Doppelelemente* (§ 78, **1**), für die *Natur ihrer Polarsysteme* (§ 78, **3**—**5**; § 79, **4**; § 81, **3**) und für die *Darstellung in Punkt- und Ebenenkoordinaten* (§ 78, **6**) (vgl. § 19, **9**).

Wir stellen die *Merkmale des Ranges der Flächen zweiter Ordnung* § 78, (1) noch einmal tabellarisch zusammen und bedienen uns dabei der § 19, (26) eingeführten Abkürzung mit Bezug auf die Unterdeterminanten A_{kl}, α_{kl} und die Elemente a_{kl}[76]):

$$(27)\quad \begin{cases} A \neq 0\text{: Eigentliche Flächen zweiter Ordnung,} \\ A = 0,\ A_{kl} \neq 0!\text{: Kegel zweiter Ordnung,} \\ A = 0,\ A_{kl} = 0!\ \alpha_{kl} \neq 0!\text{: Getrennte Ebenenpaare,} \\ A = 0,\ A_{kl} = 0!\ \alpha_{kl} = 0!\ a_{kl} \neq 0!\text{: Doppelebenen.} \end{cases}$$

Die drei letzten Zeilen (27) sind (bei reellen a_{kl}) ersetzbar durch:

$$(28)\quad \begin{cases} A = 0,\ A' \neq 0 & \text{: Kegel zweiter Ordnung,} \\ A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0 & \text{: Getrennte Ebenenpaare,} \\ A = 0,\ A' = 0,\ A'' = 0,\ A''' \neq 0 & \text{: Doppelebenen.} \end{cases}$$

Unter den entsprechenden Bedingungen mit b_{kl} für a_{kl} sind *die Flächen zweiter Klasse* § 78, (1') *eigentliche Flächen zweiter Klasse, eigentliche Kurven zweiter Klasse, getrennte Punktepaare* und *Doppelpunkte.*

Alle diese Merkmale (27) und (28) gelten wie die Gleichungen § 67, (32) und § 76, (16), auf denen sie beruhen, auch für *schiefwinklige* Koordinaten x, y, z, t und u, v, w, s in § 78, (1) und (1') und sind, wie ihre geometrische Bedeutung zeigt, *in jedem Koordinatensystem dieselben* (vgl. den direkten Nachweis hierfür § 139, **1**).

§ 82. Die Polarentheorie der Ellipsoide und Hyperboloide.

1. Ellipsoide und Hyperboloide als Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der Ellipsoide und Hyperboloide in homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten lauten nach § 70, (1); (10):

$$(1)\qquad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - t^2 = 0,$$

$$(1')\qquad -a^2b^2c^2F = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - s^2 = 0.$$

Die Funktionen f und F stehen in der Tat in dem § 78, 8 angegebenen Zusammenhange, insofern:

$$(2)\begin{cases} a_{11}=\frac{1}{a^2},\ a_{22}=\frac{1}{b^2},\ a_{33}=\frac{1}{c^2},\ a_{44}=-1,\\ a_{23}=a_{31}=a_{12}=a_{14}=a_{24}=a_{34}=0;\\ A_{11}=-\frac{1}{b^2c^2},\quad A_{22}=-\frac{1}{c^2a^2},\quad A_{33}=-\frac{1}{a^2b^2},\quad A_{44}=\frac{1}{a^2b^2c^2},\\ A_{23}=\cdots=A_{34}=0.\end{cases}$$

Die Determinante § 78, (2) wird mit den Elementen a_{kl} aus (2):

$$(3)\qquad A=-\frac{1}{a^2b^2c^2}.$$

Da sie bei endlichen a, b, c nicht verschwindet, sind nach § 78, **2** *die Ellipsoide und Hyperboloide stets eigentliche Flächen zweiter Ordnung und Klasse* (§ 20, **1**).

2. Pol und Polarebene. In der Bezeichnung § 78, (12); (13) ist jetzt, wenn wir den Faktor $-a^2b^2c^2$ in (1′) der Kürze wegen unterdrücken:

$$(4)\qquad f_1=\frac{x}{a^2},\quad f_2=\frac{y}{b^2},\quad f_3=\frac{z}{c^2},\quad f_4=-t;$$

$$(4')\qquad F_1=a^2u,\quad F_2=b^2v,\quad F_3=c^2w,\quad F_4=-s.$$

Daher bestehen nach § 78, **10** *zwischen Pol $P=x, y, z, t$ und Polarebene $\Pi=u, v, w, s$ in bezug auf die Fläche* (1), (1′) *die Beziehungen:*

$$(5)\qquad \varrho u=\frac{x}{a^2},\quad \varrho v=\frac{y}{b^2},\quad \varrho w=\frac{z}{c^2},\quad \varrho s=-t,$$

$$(5')\qquad \sigma x=a^2u,\quad \sigma y=b^2v,\quad \sigma z=c^2w,\quad \sigma t=-s.$$

Die Gleichungen der Polarebene des Punktes $P_0=x_0, y_0, z_0, t_0$ und des Poles der Ebene $\Pi_0=u_0, v_0, w_0, s_0$ lauten:

$$(6)\ \frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}-t_0t=0,\quad (6')\ a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-s_0s=0$$

und *die Bedingungen für zwei konjugierte Punkte $P_1=x_1, y_1, z_1, t_1$ und $P_2=x_2, y_2, z_2, t_2$ oder Ebenen $\Pi_1=u_1, v_1, w_1, s_1$ und $\Pi_2=u_2, v_2, w_2, s_2$:*

$$(7)\ \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}-t_1t_2=0,\quad (7')\ a^2u_1u_2+b^2v_1v_2+c^2w_1w_2-s_1s_2=0.$$

Mit $P_1=P_2=P$ und $\Pi_1=\Pi_2=\Pi$ gehen aus (7) und (7′) wieder die Flächen (1) und (1′) als *Örter der sich selbst konjugierten Punkte und Ebenen* hervor.

Mit $t=1$, $s=1$ geht man überall von homogenen zu gemeinen Koordinaten über (§ 20, **2**).

3. Reziproke Polaren. Die Unterdeterminanten zweiten Grades (§ 66, **6**) der Elemente a_{kl} aus (2) sind:

$$(8)\begin{cases}\alpha_{11}=\frac{1}{b^2c^2},\ \alpha_{22}=\frac{1}{c^2a^2},\ \alpha_{33}=\frac{1}{a^2b^2},\ \alpha_{44}=-\frac{1}{a^2},\ \alpha_{55}=-\frac{1}{b^2},\ \alpha_{66}=-\frac{1}{c^2},\\ \alpha_{12}=\cdots=\alpha_{56}=0.\end{cases}$$

Daher werden die Beziehungen § 78, (22) zwischen zwei reziproken Polaren p und q':

$$(9)\qquad \varrho q'_{23}=\frac{p_{23}}{b^2c^2},\cdots,\quad \varrho q'_{14}=-\frac{p_{14}}{a^2},\cdots,$$

so daß mit Einführung der Strahlenkoordinaten p' statt der Achsenkoordinaten q' (I § 48, (10)) sich ergibt:

Zwischen den Strahlenkoordinaten zweier reziproker Polaren p und p' in bezug auf die Fläche (1), (1') *bestehen die Beziehungen*[166]:

$$(10)\qquad \begin{cases}\varrho p'_{23}=-\frac{p_{14}}{a^2},\quad \varrho p'_{31}=-\frac{p_{24}}{b^2},\quad \varrho p'_{12}=-\frac{p_{34}}{c^2},\\ \varrho p'_{14}=\frac{p_{23}}{b^2c^2},\quad \varrho p'_{24}=\frac{p_{31}}{c^2a^2},\quad \varrho p'_{34}=\frac{p_{12}}{a^2b^2}.\end{cases}$$

Die Auflösungen der Gleichungen nach den p_{kl} ergeben mit einem neuen Proportionalitätsfaktor $\sigma=1:-a^2b^2c^2\varrho$ dieselbe Form:

$$\sigma p_{23}=-\frac{p'_{14}}{a^2},\cdots,\quad \sigma p_{34}=\frac{p'_{12}}{a^2b^2}.$$

Zwischen den *Richtungskosinus* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *von zwei reziproken Polaren* gilt nach § 68, **15**, VI die Gleichung:

$$(11)\qquad \frac{\alpha_1\alpha_2}{a^2}+\frac{\beta_1\beta_2}{b^2}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{c^2}=0.$$

4. Konjugierte Gerade. Die *Bedingung für zwei konjugierte Gerade* $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ lautet nach § 78, (26) mit Rücksicht auf (8):

$$(12)\qquad \frac{p_{23}^{(1)}p_{23}^{(2)}}{b^2c^2}+\frac{p_{31}^{(1)}p_{31}^{(2)}}{c^2a^2}+\frac{p_{12}^{(1)}p_{12}^{(2)}}{a^2b^2}-\frac{p_{14}^{(1)}p_{14}^{(2)}}{a^2}-\frac{p_{24}^{(1)}p_{24}^{(2)}}{b^2}-\frac{p_{34}^{(1)}p_{34}^{(2)}}{c^2}=0.$$

Aus ihr geht mit $p^{(1)}=p^{(2)}=p$ wieder die Gleichung der Fläche in Linienkoordinaten (§ 70, (23)) hervor:

$$(13)\qquad \frac{p_{23}^2}{b^2c^2}+\frac{p_{31}^2}{c^2a^2}+\frac{p_{12}^2}{a^2b^2}-\frac{p_{14}^2}{a^2}-\frac{p_{24}^2}{b^2}-\frac{p_{34}^2}{c^2}=0;$$

die Fläche erscheint dann als *Ort der sich selbst konjugierten Geraden.*

Da ein Durchmesser § 72, (5) die Strahlenkoordinaten 0, 0, 0, α, β, γ hat (I § 48, (18)), so sind zwei der Bedingung § 72, (8) unterworfene *konjugierte Durchmesser* auch *konjugierte Gerade* im Sinne von (12) (§ 72, **5**, IV).

5. Punkte und Ebenen einer Erzeugenden. Nach § 67, 8 und § 76, 5 ergibt sich für die Fläche (1), (1'):

Die *Verbindungslinie zweier Punkte* x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 der Fläche (1) ist eine *Erzeugende*, wenn neben:

$$(14)\quad \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-t_1^2=0,\quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}-t_2^2=0:$$

$$(15)\quad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}+\frac{z_1z_2}{c^2}-t_1t_2=0,$$

also *jeder der beiden Punkte in der Tangentialebene des anderen liegt.*

Alle Punkte:

$$(16)\quad x_1+\lambda x_2,\; y_1+\lambda y_2,\; z_1+\lambda z_2,\; t_1+\lambda t_1$$

der Erzeugenden sind Punkte der Fläche.

Die *Schnittlinie zweier Tangentialebenen* u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 der Fläche (1′) ist *Erzeugende*, wenn neben:

$$(14')\quad a^2u_1^2+b^2v_1^2+c^2w_1^2-s_1^2=0,\quad a^2u_2^2+b^2v_2^2+c^2w_2^2-s_2^2=0:$$

$$(15')\quad a^2u_1u_2+b^2v_1v_2+c^2w_1w_2-s_1s_2=0,$$

also *jede der beiden Ebenen durch den Berührungspunkt der anderen geht.*

Alle Ebenen:

$$(16')\quad u_1+\lambda u_2,\; v_1+\lambda v_2,\; w_1+\lambda w_2,\; s_1+\lambda s_2$$

der Erzeugenden sind Tangentialebenen der Fläche.

6. Zusammenfall reziproker Polaren. Eine Erzeugende entsteht nach § 68, 21 auch durch den Zusammenfall von zwei reziproken Polaren p und p'. Nach (10) wird aber für $p'_{kl}=p_{kl}$ mit einem neuen Proportionalitätsfaktor $\varrho : a^2b^2c^2$ an Stelle von ϱ[156]):

$$(17)\quad \begin{cases} \varrho p_{23}=-b^2c^2p_{14}, & \varrho p_{31}=-c^2a^2p_{24}, & \varrho p_{12}=-a^2b^2p_{34},\\ \varrho p_{14}=a^2p_{23}, & \varrho p_{24}=b^2p_{31}, & \varrho p_{34}=c^2p_{12}.\end{cases}$$

Durch Multiplikation von je zwei übereinanderstehenden Gleichungen folgt:

$$(18)\qquad \varrho^2=-a^2b^2c^2.$$

Von den Flächen (1) hat daher *nur das einschalige Hyperboloid* ($-c^2$ *für* c^2) *reelle gerade Linien* (§ 63, 1).

Indem wir für dieses, mit Übergang zu den Gleichungen:

$$(19)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-t^2=0,\qquad (20)\quad a^2u^2+b^2v^2-c^2w^2-s^2=0$$

aus (18) entnehmen:

$$(21)\qquad \varrho=\varepsilon abc,\quad \varepsilon=\pm 1,$$

ergibt sich aus (17), nachdem auch dort $-c^2$ für c^2 gesetzt ist:

Die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden des Hyperboloids (19) *genügen den drei Bedingungen:*

$$(22)\qquad \frac{p_{23}}{bc} = \varepsilon\frac{p_{14}}{a},\quad \frac{p_{31}}{ca} = \varepsilon\frac{p_{24}}{b},\quad \frac{p_{12}}{ab} = -\varepsilon\frac{p_{34}}{c},$$

wo ε *entweder* $+1$ *oder* -1 *ist.*

7. Parameterdarstellung der Erzeugenden. Aus der Identität:

$$(23)\qquad p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0$$

ergibt sich infolge von (22):

$$(24)\qquad \frac{p_{14}^2}{a^2} + \frac{p_{24}^2}{b^2} - \frac{p_{34}^2}{c^2} = 0.$$

Man kann daher mit einem Parameter ϑ setzen (§ 6, (1)):

$$(25)\qquad \frac{p_{14}}{p_{34}} = \frac{a}{c}\cos\vartheta,\quad \frac{p_{24}}{p_{34}} = \frac{b}{c}\sin\vartheta.$$

Dann folgt aber aus (22):

$$(26)\qquad \frac{p_{23}}{p_{34}} = \varepsilon b\cos\vartheta,\quad \frac{p_{31}}{p_{34}} = \varepsilon a\sin\vartheta,\quad \frac{p_{12}}{p_{34}} = -\varepsilon\frac{ab}{c}.$$

Die Strahlenkoordinaten der Erzeugenden des Hyperboloids (19) *stellen sich durch einen Parameter* ϑ *in der Weise dar*[161])*:*

$$(27)\qquad \begin{aligned} p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{14}:p_{24}:p_{34} &= \varepsilon bc\cos\vartheta : \varepsilon ca\sin\vartheta : -\varepsilon ab : a\cos\vartheta : b\sin\vartheta : c \\ &= \varepsilon bc(1-\lambda^2) : 2\varepsilon ca\lambda : -\varepsilon ab(1+\lambda^2) : a(1-\lambda^2) : 2b\lambda : \varepsilon(1+\lambda^2), \end{aligned}$$

wobei wie in § 63, (24):

$$(28)\qquad \lambda = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}.$$

8. Gleichungen der Erzeugenden in Punkt- und Ebenenkoordinaten. Da in (27) die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden gegeben sind, ergibt sich sofort (I § 48, (12); (11')):

Die Erzeugende (27) *hat in laufenden Punkt- und Ebenenkoordinaten die Gleichungen:*

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{z}{c}\cos\vartheta + \varepsilon t\sin\vartheta, \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}\sin\vartheta - \varepsilon t\cos\vartheta, \end{cases} \qquad (29')\quad \begin{cases} au\cos\vartheta + bv\sin\vartheta + cw = 0, \\ au\sin\vartheta - bv\cos\vartheta + \varepsilon s = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (29) sind die § 63, (8) angegebenen; von den Gleichungen (29') stellt die erste den unendlich fernen Punkt der Erzeugenden (§ 63, (11)), die zweite ihren Schnittpunkt mit der xy-Ebene dar[157]).

Die Gleichungen (29) *und* (29') *sind* mit Einführung von λ *ersetzbar durch:*

$$(30)\quad \begin{cases} \left(-\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-\lambda\left(\frac{y}{b}-\varepsilon t\right)=0, \\ \left(\frac{y}{b}+\varepsilon t\right)-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0, \end{cases} \qquad (30')\begin{cases} \lambda(-au+cw)+(bv-\varepsilon s)=0, \\ \lambda(bv+\varepsilon s)+(au+cw)=0. \end{cases}$$

Denn die Elimination von y oder x aus (30), sowie s oder u aus (30′) führt wieder auf (29) und (29′) zurück (§ 63, 8).

9. Lineare Komplexe der Erzeugenden. Da die den Gleichungen (22) genügenden Strahlen p_{kl} in Punktkoordinaten die Gleichungen (29) haben, die bei laufendem ϑ mit $\varepsilon = +1$ die eine, mit $\varepsilon = -1$ die andere Schar der Erzeugenden darstellen (§ 63, 3), so folgt mit Rücksicht auf § 57, (19)[173]:

Die Erzeugenden jeder einzelnen Schar ϑ, ε sind die gemeinsamen Linien der drei linearen Komplexe (22).

Für die Schar ϑ, -1 sind die beiden ersten Komplexe (22) *positiv*, der dritte *negativ gewunden*, für die Schar ϑ, $+1$ umgekehrt die beiden ersten negativ, der dritte positiv (s. auch später § 87, 6).

10. Verbindungsebene zweier ungleichnamiger Erzeugenden. Stellt man neben die Erzeugende (30′) eine beliebige ungleichnamige:

$$(31)\quad \begin{cases} \lambda'(-au+cw)+(bv+\varepsilon s)=0, \\ \lambda'(\ \ bv-\varepsilon s)+(au+cw)=0, \end{cases}$$

so folgt aus den vier Gleichungen (30′) und (31) zunächst mit einem Faktor 2ϱ:

$$(32)\quad \begin{cases} bv+\varepsilon s = 2\varrho\lambda', & au+cw=-2\varrho\lambda\lambda', \\ bv-\varepsilon s = 2\varrho\lambda, & au-cw=2\varrho, \end{cases}$$

und damit dual zu § 63, (26):

Die Verbindungsebene der beiden ungleichnamigen Erzeugenden λ, ε und λ', $-\varepsilon$ hat die Koordinaten[161]:

$$(33)\quad u:v:w:s=\frac{1-\lambda\lambda'}{a}:\frac{\lambda+\lambda'}{b}:-\frac{1+\lambda\lambda'}{c}:-\varepsilon(\lambda-\lambda').$$

Sie liegt mit dem Schnittpunkt § 63, (26) vereinigt und ist Tangentialebene in ihm (§ 67, 8).

11. Projektive Ebenenbüschel. Die *Gleichung der Verbindungsebene* der beiden Erzeugenden λ_0, ε und λ, $-\varepsilon$ ist nach (33) in laufenden Koordinaten x, y, z, t:

$$(34)\quad \frac{1-\lambda_0\lambda}{a}x+\frac{\lambda_0+\lambda}{b}y-\frac{1+\lambda_0\lambda}{c}z-\varepsilon(\lambda_0-\lambda)t=0.$$

Daher sind:

$$(35)\quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a}+\lambda_0\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-\varepsilon\lambda_0 t\right)-\lambda\left(\lambda_0\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\lambda_0\frac{z}{c}-\varepsilon t\right)=0,\\ \left(\frac{x}{a}+\lambda_1\frac{y}{b}-\frac{z}{c}-\varepsilon\lambda_1 t\right)-\lambda\left(\lambda_1\frac{x}{a}-\frac{y}{b}+\lambda_1\frac{z}{c}-\varepsilon t\right)=0 \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Ebenenbüschel, welche die festen Erzeugenden λ_0, ε und λ_1, ε mit einer laufenden Erzeugenden $\lambda, -\varepsilon$ verbinden. Aus ihrer Form folgt (I § 66, 4):

Die Tangentialebenen, welche zwei feste Erzeugende der einen Schar mit der laufenden Erzeugenden der andern verbinden, sind projektiv (§ 63, 10)[162].

12. Reelles Polarsystem bei imaginärem Ellipsoid. Bei negativen Werten von a^2, b^2, c^2 stellt die Gleichung (1), (1′) ein *imaginäres* Ellipsoid dar. Es hat *keinen reellen Punkt* und *keine reelle Tangentialebene*, aber das zu ihm gehörige Polarsystem ist *reell*, indem nach (5); (5′) reellen Polen reelle Polarebenen entsprechen und umgekehrt (§ 20, 10)[85].

13. Das Polarsystem der Dualität. Insbesondere gehört zu der *imaginären Kugel:*

$$(36)\quad x^2+y^2+z^2+t^2=0, \qquad (37)\quad u^2+v^2+w^2+s^2=0,$$

$$(38)\quad p_{23}^2+p_{31}^2+p_{12}^2+p_{14}^2+p_{24}^2+p_{34}^2=0$$

(vgl. (13) mit $a^2=b^2=c^2=-1$) nach (5); (5′); (10) das Polarsystem (I § 69, (29)):

$$(39)\quad u:v:w:s=x:y:z:t,$$

$$(40)\quad p'_{23}:p'_{31}:p'_{12}:p'_{14}:p'_{24}:p'_{34}=q_{23}:q_{31}:q_{12}:q_{14}:q_{24}:q_{34},$$

bei dem *Pol und Polarebene gleiche Koordinaten haben und die Strahlenkoordinaten einer Geraden gleich den Achsenkoordinaten der reziproken Polaren sind.*

Dieses Polarsystem bietet eine Deutung der *Dualität*, die in der Gegenüberstellung der Punkte und Ebenen des Raumes zum Ausdruck kommt (I § 45, 4).

Zwei nach (39); (40) sich entsprechende Gebilde, z. B. die *Flächen*

$$(41)\quad f(x, y, z, t)=0 \quad\text{und}\quad f(u, v, w, s)=0$$

oder die *Komplexe*:

$$(42)\quad f(p_{23}, p_{31}, \ldots, p_{34})=0 \quad\text{und}\quad f(q_{23}, q_{31}, \ldots, q_{34})=0$$

heißen *dual* oder *polarreziprok*. Da die Gleichung (36) gegen jede Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems invariant ist (I § 37, (11)), so hängt dies Polarsystem nur vom *Anfangspunkt O*, dem *Ur-*

sprung der Polarreziprozität ab. Ihm entspricht die unendlich ferne Ebene (I § 47, 5).

14. Kugel und Rotationsflächen als reziproke Flächen. Die Kugel mit dem Mittelpunkt $M = a, b, c$ und dem Radius r hat in bezug auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ in Punkt- und Ebenenkoordinaten die Gleichungen (§ 69, (1); (27)):

$$(43) \qquad F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0,$$

$$(44) \qquad f(u, v, w) = (au + bv + cw + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

Die reziproke Fläche mit Bezug auf den Ursprung O hat daher in Ebenen- und Punktkoordinaten die Gleichungen:

$$(45) \qquad F(u, v, w) = (u - a)^2 + (v - b)^2 + (w - c)^2 - r^2 = 0,$$

$$(46) \qquad f(x, y, z) = (ax + by + cz + 1)^2 - r^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Führt man, um die Bedeutung der Gleichung (46) zu ermitteln, ein neues rechtwinkliges System $O\xi\eta\zeta$ ein, dessen ξ-Achse die Richtungskosinus:

$$(47) \qquad \alpha = \frac{a}{d}, \quad \beta = \frac{b}{d}, \quad \gamma = \frac{c}{d}, \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \overline{OM}$$

hat, so wird (I § 37, (11)):

$$(48) \qquad ax + by + cz = d\xi, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

und daher die Gleichung (46):

$$(49) \qquad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - \frac{d^2}{r^2}\left(\xi + \frac{1}{d}\right)^2 = 0.$$

Die Reziproke einer Kugel in bezug auf einen beliebigen Ursprung O ist (§ 53, (25)) *eine Rotationsfläche zweiter Ordnung (verlängertes Rotationsellipsoid, zweischaliges Rotationshyperboloid oder Rotationsparaboloid), deren einer Brennpunkt in O und dessen Rotationsachse in den Radiusvektor des Kugelmittelpunktes fällt*[86]).

Sie entsteht durch Rotation eines Kegelschnittes von der Exzentrizität $\varepsilon = d : r$ und dem Parameter $p = 1 : r$.

15. Reziproke Ellipsoide, Hyperboloide und Kegel. Die Reziproke der Fläche (1), (1') in bezug auf den Mittelpunkt O als Ursprung ist nach (41) die koaxiale *gleichartige* Fläche:

$$(50) \qquad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} - s^2 = 0, \qquad (50') \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - t^2 = 0,$$

die Reziproke des *Kegels* § 71, (11) ist der *Kegelschnitt*:

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 0 \qquad (§ 71, (11')).$$

Die Reziprozität *zweier Kegel* § 71, 8 ist eine solche im *Bündel* (§ 80, 8; § 84, 6, V), nicht im Raume.

16. Das dual orthogonale Hyperboloid. Ist die Fläche (1) ein *orthogonales einschaliges Hyperboloid* (§ 64, 5):

$$(51)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\; a^2>b^2; \qquad (52)\quad \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=0,$$

so heißt die reziproke Fläche:

$$(51')\qquad a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2=1,\quad \frac{1}{b^2}>\frac{1}{a^2},$$

ein *dual orthogonales einschaliges Hyperboloid*[165]). Schreibt man nun in den Gleichungen (51′) und (52) für a^2, b^2, c^2 ihre reziproken Werte, so nehmen sie die Form an:

$$(53)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\; b^2>a^2;\; a^2-b^2+c^2=0.$$

Mit Vertauschung von x und y, sowie a und b folgt dann:

Das einschalige Hyperboloid [der Kegel]:

$$(54)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,[0],\; a^2>b^2,$$

ist dual orthogonal unter der Bedingung:

$$(55)\qquad a^2-b^2-c^2=0.$$

§ 83. Die Polarentheorie der Paraboloide.

1. Die Paraboloide als Flächen zweiter Ordnung und Klasse. Die Gleichungen der Paraboloide in homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten lauten nach § 70, (24); (32):

$$(1)\qquad f=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2xt+at^2=0,$$

$$(1')\qquad -b^2c^2F=b^2v^2+c^2w^2+2us-au^2=0.$$

Die Funktionen f und F stehen in der Tat in dem § 78, 8 angegebenen Zusammenhang, insofern:

$$(2)\quad \begin{cases} a_{22}=\frac{1}{b^2},\; a_{33}=\frac{1}{c^2},\; a_{44}=a,\; a_{14}=1,\; a_{11}=a_{23}=a_{31}=a_{12}=a_{24}=a_{34}=0, \\ A_{11}=\frac{a}{b^2c^2},\; A_{22}=-\frac{1}{c^2},\; A_{33}=-\frac{1}{b^2},\; A_{14}=-\frac{1}{b^2c^2},\; A_{44}=A_{23}=A_{31} \\ \qquad =A_{12}=A_{24}=A_{34}=0. \end{cases}$$

Die Determinante § 78, (2) wird mit den Elementen a_{kl} aus (2)

$$(3)\qquad A=-\frac{1}{b^2c^2}.$$

Da sie nicht verschwindet, sind nach § 78, 2 *die Paraboloide stets eigentliche Flächen zweiter Ordnung und Klasse.*

2. Pol und Polarebene. In der Bezeichnung § 78, (12) ist jetzt, wenn der Faktor $-b^2c^2$ in (1') der Kürze wegen unterdrückt wird:

$$(4)\qquad f_1 = t,\ f_2 = \frac{y}{b^2},\ f_3 = \frac{z}{c^2},\ f_4 = x + at,$$

$$(4')\qquad F_1 = -au + s,\ F_2 = b^2v,\ F_3 = c^2w,\ F_4 = u.$$

Daher bestehen nach § 78, 10 *zwischen Pol* $P = x, y, z, t$ *und Polarebene* $\Pi = u, v, w, s$ *in bezug auf die Fläche* (1), (1') *die Beziehungen:*

$$(5)\qquad \varrho u = t,\quad \varrho v = \frac{y}{b^2},\quad \varrho w = \frac{z}{c^2},\quad \varrho s = x + at,$$

$$(5')\qquad \sigma x = -au + s,\quad \sigma y = b^2v,\quad \sigma z = c^2w,\quad \sigma t = u.$$

Die Gleichungen der Polarebene des Punktes $P_0 = x_0, y_0, z_0, t_0$ *und des Poles der Ebene* $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ *lauten:*

$$(6)\qquad t_0x + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} + (x_0 + at_0)t = 0,$$

$$(6')\qquad (-au_0 + s_0)u + b^2v_0v + c^2w_0w + u_0s = 0$$

und die Bedingungen zwischen zwei konjugierten Punkten $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ und $P_2 = x_2, y_2, z_2, t_2$ oder Ebenen $\Pi_1 = u_1, v_1\ w_1, s_1$ und $\Pi_2 = u_2, v_2, w_2, s_2$:

$$(7)\qquad t_1x_2 + \frac{y_1y_2}{b^2} + \frac{z_1z_2}{c^2} + (x_1 + at_1)t_2 = 0,$$

$$(7')\qquad (-au_1 + s_1)u_2 + b^2v_1v_2 + c^2w_1w_2 + u_1s_2 = 0.$$

Mit $P_1 = P_2 = P$ und $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi$ gehen aus (7) und (7') wieder die Flächen (1) und (1') als *Örter der sich selbst konjugierten Punkte und Ebenen* hervor.

3. Reziproke Polaren. Die Unterdeterminanten zweiten Grades § 66, 6) der Elemente a_{kl} aus (2) sind:

$$(8)\qquad \alpha_{11} = \frac{1}{b^2c^2},\quad \alpha_{44} = -1,\quad \alpha_{55} = \frac{a}{b^2},\quad \alpha_{66} = \frac{a}{c^2},\quad \alpha_{35} = -\frac{1}{b^2},\quad \alpha_{26} = \frac{1}{c^2},$$
$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{16} = \cdots = 0.$$

Daher folgt aus § 78, (22), wie § 82, 3:

Zwischen den Strahlenkoordinaten zweier reziproker Polaren p *und* p' *in bezug auf das Paraboloid* (1), (1') *bestehen die Beziehungen*[166]:

$$(9)\qquad \begin{cases} \varrho p_{23}' = -p_{14}, & \varrho p_{31}' = -\dfrac{p_{12}}{b^2} + a\dfrac{p_{24}}{b^2}, & \varrho p_{12}' = \dfrac{p_{31}}{c^2} + a\dfrac{p_{34}}{c^2}, \\[2ex] \varrho p_{14}' = \dfrac{p_{23}}{b^2c^2}, & \varrho p_{24}' = \dfrac{p_{34}}{c^2}, & \varrho p_{34}' = -\dfrac{p_{24}}{b^2}. \end{cases}$$

Zwischen den *Richtungskosinus* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *von zwei reziproken Polaren* gilt die Gleichung:

$$(10) \qquad \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{c^2} = 0.$$

4. Konjugierte Gerade. Die *Bedingung für zwei konjugierte Gerade* $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ lautet nach § 78, (26) mit Rücksicht auf (8):

$$(11) \qquad \frac{p_{23}^{(1)} p_{23}^{(2)}}{b^2 c^2} + \frac{p_{34}^{(1)} p_{31}^{(2)}}{c^2} - \frac{p_{24}^{(1)} p_{12}^{(2)}}{b^2} - p_{14}^{(1)} p_{14}^{(2)} + (-p_{12}^{(1)} + a p_{24}^{(1)}) \frac{p_{24}^{(2)}}{b^2} + (p_{31}^{(1)} + a p_{34}^{(1)}) \frac{p_{34}^{(2)}}{c^2} = 0.$$

Aus ihr geht mit $p^{(1)} = p^{(2)} = p$ wieder die Gleichung der Fläche in Linienkoordinaten (§ 70, (41)) hervor:

$$(12) \qquad \frac{p_{23}^2}{b^2 c^2} + 2 \frac{p_{34} p_{31}}{c^2} - 2 \frac{p_{24} p_{12}}{b^2} - p_{14}^2 + a \frac{p_{24}^2}{b^2} + a \frac{p_{34}^2}{c^2} = 0;$$

die Fläche erscheint dann als *Ort der sich selbst konjugierten Geraden.*

5. Punkte und Ebenen einer Erzeugenden. Nach § 67, 8 und § 76, 5 ergibt sich für das Paraboloid (1); (1'):

Die *Verbindungslinie zweier Punkte* x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 der Fläche (1) ist eine *Erzeugende,* wenn neben:

$$(13) \qquad \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} + 2 x_1 t_1 + a t_1^2 = 0, \quad \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} + 2 x_2 t_2 + a t_2^2 = 0:$$

$$(14) \qquad \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} + x_1 t_2 + x_2 t_1 + a t_1 t_2 = 0,$$

Die *Schnittlinie zweier Tangentialebenen* u_1, v_1, w_1, s_1 und u_2, v_2, w_2, s_2 der Fläche (1') ist eine *Erzeugende,* wenn neben:

$$(13') \qquad b^2 v_1^2 + c^2 w_1^2 + 2 u_1 s_1 - a u_1^2 = 0, \quad b^2 v_2^2 + c^2 w_2^2 + 2 u_2 s_2 - a u_2^2 = 0:$$

$$(14') \qquad b^2 v_1 v_2 + c^2 w_1 w_2 + u_1 s_2 + s_1 u_2 - a u_1 u_2 = 0,$$

im Sinne von § 82, 5.

6. Zusammenfall reziproker Polaren. Mit $p'_{\varkappa l} = p_{kl}$ ergibt sich aus (9), wenn zur Vereinfachung $a = 0$ genommen wird[156]):

$$(15) \qquad \begin{cases} \varrho p_{23} = -p_{14}, & \varrho p_{31} = -\frac{p_{12}}{b^2}, & \varrho p_{12} = \frac{p_{31}}{c^2}, \\ \varrho p_{14} = \frac{p_{23}}{b^2 c^2}, & \varrho p_{24} = \frac{p_{34}}{c^2}, & \varrho p_{34} = -\frac{p_{24}}{b^2}, \end{cases}$$

und danach:

$$(16) \qquad \varrho^2 = -\frac{1}{b^2 c^2}.$$

Daher hat *nur das hyperbolische Paraboloid* ($-c^2$ für c^2) *reelle gerade Linien* (§ 65, 1).

Indem wir für dieses, mit Übergang auf die Gleichungen:

$$(17)\qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2xt = 0, \quad b^2v^2 - c^2w^2 + 2us = 0$$

setzen:

$$(18)\qquad \varrho = -\frac{\varepsilon}{bc}, \quad \varepsilon = \pm 1,$$

ergibt sich aus (15), wo ebenfalls $-c^2$ für c^2 gesetzt werde:

Die Strahlenkoordinaten einer Erzeugenden des Paraboloids (17) *genügen den drei Bedingungen:*

$$(19)\qquad p_{23} = \varepsilon bc p_{14}, \quad b p_{31} = \varepsilon c p_{12}, \quad c p_{24} = \varepsilon b p_{34},$$

wo ε *entweder* $+1$ *oder* -1 *ist.*

7. Parameterdarstellung der Erzeugenden. Bei Einführung eines Parameters λ wird der ersten und dritten Gleichung (19) genügt durch:

$$\frac{p_{23}}{p_{34}} = -b\lambda, \quad \frac{p_{14}}{p_{34}} = -\frac{\varepsilon\lambda}{c}, \quad \frac{p_{24}}{p_{34}} = \frac{\varepsilon b}{c}.$$

Sodann folgt aus den beiden letzten Gleichungen (19) und § 82, (23) der Reihe nach:

$$p_{31}p_{24} = p_{12}p_{34}; \; p_{23}p_{14} + 2p_{12}p_{34} = 0; \; \frac{p_{12}}{p_{34}} = -\frac{\varepsilon b \lambda^2}{2c}; \; \frac{p_{31}}{p_{34}} = -\frac{\lambda^2}{2}.$$

Die Strahlenkoordinaten der Erzeugenden des Paraboloids (17) *stellen sich durch einen Parameter* λ *in der Weise dar*[161]*):*

$$(20)\qquad p_{23}:p_{31}:p_{12}:p_{14}:p_{24}:p_{34} = 2bc\lambda : c\lambda^2 : \varepsilon b\lambda^2 : 2\varepsilon\lambda : -2\varepsilon b : -2c.$$

8. Gleichungen der Erzeugenden in Punkt- und Ebenenkoordinaten. Aus (20) folgt weiter (I § 48, (12), (11')):

Die Erzeugende (20) *hat in laufenden Punkt- und Ebenenkoordinaten die Gleichungen:*

$$(21)\quad \begin{cases} \left(\frac{y}{b} - \varepsilon\frac{z}{c}\right) - \lambda t = 0, \\ 2x + \lambda\left(\frac{y}{b} + \varepsilon\frac{z}{c}\right) = 0, \end{cases} \qquad (21')\quad \begin{cases} \lambda(bv - \varepsilon cw) + 2s = 0, \\ -\lambda u + (bv + \varepsilon cw) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (21) sind die in § 65, (10) mit umgekehrtem Vorzeichen von x in § 65, (8) abgeleiteten. Von den Gleichungen (21') stellt die zweite den unendlich fernen Punkt der Erzeugenden (§ 65, (16)) dar, die erste ihren Schnittpunkt mit der yz-Ebene[157]).

9. Lineare Komplexe der Erzeugenden. Wie § 82, 9 gilt auch hier der Satz[173]):

Die Erzeugenden jeder einzelnen Schar λ, ε *sind die gemeinsamen Linien der drei linearen Komplexe* (19).

Der erste dieser Komplexe ist nach § 57, (19) für die Schar $\lambda, -1$ *positiv*, für die Schar $\lambda, +1$ *negativ gewunden*.

Die beiden andern Komplexe (19) sind keine eigentlichen mehr (s. später § 86, **4**), sondern bestehen aus allen Strahlen, welche bezüglich die Geraden (I § 60, (8)):

$$(22) \qquad q_{31} = b, \quad q_{12} = -\varepsilon c, \quad q_{23} = q_{14} = q_{24} = q_{34} = 0$$
$$\text{und} \quad q_{24} = c, \quad q_{34} = -\varepsilon b, \quad q_{23} = q_{31} = q_{12} = q_{14} = 0$$

schneiden. Diese Geraden haben in Punktkoordinaten die Gleichungen (I § 48, (11)):

$$(23) \qquad x = 0, \quad \frac{y}{b} + \varepsilon \frac{z}{c} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{y}{b} - \varepsilon \frac{z}{c} = 0, \quad t = 0,$$

sind also nach (21) die Erzeugenden $\lambda = 0, -\varepsilon$ und $\lambda = \infty, -\varepsilon$, der mit λ, ε ungleichnamigen Schar.

10. Verbindungsebene zweier ungleichnamiger Erzeugenden. Stellt man neben die Gerade λ, ε in (21′) die Gerade $\lambda', -\varepsilon$ aus (21′), so ergibt sich wie § 82, **10** und dual zu § 65, (15), nur mit umgekehrtem Vorzeichen von x:

Die Verbindungsebene der beiden ungleichnamigen Erzeugenden λ, ε und $\lambda', -\varepsilon$ hat die Koordinaten[161]*):*

$$(24) \qquad u : v : w : s = 2 : \frac{\lambda + \lambda'}{b} : \varepsilon \frac{\lambda - \lambda'}{c} : -\lambda\lambda'.$$

11. Projektive Ebenenbüschel. Daher sind:

$$(25) \qquad \begin{cases} \left(2x + \lambda_0 \frac{y}{b} + \varepsilon \lambda_0 \frac{z}{c}\right) - \lambda\left(-\frac{y}{b} + \varepsilon \frac{z}{c} + \lambda_0 t\right) = 0, \\ \left(2x + \lambda_1 \frac{y}{b} + \varepsilon \lambda_1 \frac{z}{c}\right) - \lambda\left(-\frac{y}{b} + \varepsilon \frac{z}{c} + \lambda_1 t\right) = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der beiden Ebenenbüschel, welche die festen Erzeugenden λ_0, ε und λ_1, ε mit der laufenden Erzeugenden $\lambda, -\varepsilon$ verbinden. Aus ihrer Form folgt auch für das Paraboloid (17) der Satz § 82, **11**[162]).

§ 84. Die Polarentheorie des Kegels und unendlich fernen Kegelschnittes.

1. Kegel und unendlich ferner Kegelschnitt als Flächen mit Doppelelement. Für den Kegel § 71, (1) und seine Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene § 71, (11′):

$$(1) \quad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad (1') \quad F = a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0$$

ist im Sinne von § 66, (3) und § 75, (1):

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = -\frac{1}{c^2}; \quad A_{44} = -\frac{1}{a^2b^2c^2}; \\ \alpha_{11} = -\frac{1}{b^2c^2}, \quad \alpha_{22} = -\frac{1}{c^2a^2}, \quad \alpha_{33} = \frac{1}{a^2b^2}; \\ \text{die übrigen } a_{kl}, A_{kl}, \alpha_{kl}, \text{ sowie } A, \text{ alle gleich } 0; \end{cases}$$

$$(2')\quad \begin{cases} b_{11} = a^2, \quad b_{22} = b^2, \quad b_{33} = -c^2; \quad B_{44} = -a^2b^2c^2; \\ \beta_{11} = -b^2c^2, \quad \beta_{22} = -c^2a^2, \quad \beta_{33} = a^2b^2; \\ \text{die übrigen } b_{kl}, B_{kl}, \beta_{kl}, \text{ sowie } B, \text{ alle gleich } 0. \end{cases}$$

Daher folgt aus § 79, **1**:

Der elliptische Kegel (1) *ist eine Fläche zweiter Ordnung mit dem Doppelpunkt* $x, y, z, t = 0, 0, 0, 1$, *seiner Spitze.*

Der Kegelschnitt (1') *ist eine Fläche zweiter Klasse mit der Doppelebene* $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$, *der unendlich fernen Ebene.*

Aber der Kegel (1) gehört nach § 71, (12') nicht zu den Flächen zweiter Klasse § 75, (1) und der Kegelschnitt (1') nach § 71, (12) nicht zu den Flächen zweiter Ordnung § 66, (3), (§ 20, 20).

2. Die Polarentheorie des Kegels und Kegelschnittes im Raume. In bezug auf den Kegel (1) ergibt sich aus § 68, (18); (22); (25) und, unabhängig davon, in bezug auf den Kegelschnitt (1') aus § 77, (7); (8); (9)

für die *Polarebene eines Punktes* x, y, z, t:

$$(3)\quad \varrho u = \frac{x}{a^2}, \quad \varrho v = \frac{y}{b^2}, \quad \varrho w = -\frac{z}{c^2}, \quad \varrho s = 0;$$

für die *Polare einer Geraden* p_{kl}:

$$(4)\quad \varrho q_{23}' = -\frac{p_{23}}{b^2c^2}, \quad \varrho q_{31}' = -\frac{p_{31}}{c^2a^2}, \quad \varrho q_{12}' = \frac{p_{12}}{a^2b^2}, \quad \varrho q_{14}' = 0, \quad \varrho q_{24}' = 0, \quad \varrho q_{34}' = 0;$$

für den *Pol einer Ebene* u, v, w, s:

$$(5)\quad \varrho x = 0, \quad \varrho y = 0, \quad \varrho z = 0, \quad \varrho t = -\frac{s}{a^2b^2c^2}.$$

für den *Pol einer Ebene* u, v, w, s:

$$(3')\quad \varrho x = a^2u, \quad \varrho y = b^2v, \quad \varrho z = -c^2w, \quad \varrho t = 0;$$

für die *Polare einer Geraden* q_{kl}:

$$(4')\quad \varrho p_{23}' = -b^2c^2q_{23}, \quad \varrho p_{31}' = -c^2a^2q_{31}, \quad \varrho p_{12}' = a^2b^2q_{12}, \quad \varrho p_{14}' = 0, \quad \varrho p_{24}' = 0, \quad \varrho p_{3}' = 0;$$

für die *Polarebene eines Punktes* x, y, z, t:

$$(5')\quad \varrho u = 0, \quad \varrho v = 0, \quad \varrho w = 0, \quad \varrho s = -a^2b^2c^2t.$$

Nach (3) geht *beim Kegel* (1) die *Polarebene* jedes nicht in die Spitze O fallenden Punktes durch O $(s = 0)$, während die von O selbst $(x = y = z = 0)$ unbestimmt wird. I. *Alle Punkte ferner, die auf derselben durch O gehenden Geraden liegen, haben dieselbe Polarebene.*

Nach (4) geht die *Polare* jeder nicht durch O gehenden Geraden durch O ($q'_{14} = q'_{24} = q'_{34} = 0$), während die Polare jeder durch O gehenden Geraden ($p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0$, I § 48, (12)) unbestimmt wird. II. *Alle Geraden, die in derselben durch O gehenden Ebene liegen* (gleiche Verhältnisse $p_{23} : p_{31} : p_{12}$ haben, I § 48, (12) vierte Gleichung) *haben dieselbe Polare.*

Nach (5) ist der *Pol* jeder nicht durch O gehenden Ebene die Spitze O selbst, der Pol jeder durch O gehenden Ebene ($s = 0$) unbestimmt (§ 79, 4).

Dual haben I'. *beim Kegelschnitt* (1') *alle Ebenen, die durch dieselbe unendlich ferne Gerade gehen, denselben unendlich fernen Pol;* und II'. *alle Geraden, die durch denselben unendlich fernen Punkt gehen, dieselbe unendlich ferne Polare.*

Zwischen zwei *konjugierten Punkten P* und P' in bezug auf den *Kegel* (1) besteht die Gleichung:

$$(6)\quad \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} - \frac{zz'}{c^2} = 0.$$

Zwischen zwei *konjugierten Ebenen* Π und Π' in bezug auf die *Kurve* (1') besteht die Gleichung:

$$(6')\quad a^2uu' + b^2vv' - c^2ww' = 0.$$

3. Die Polarentheorie des Kegels im Bündel und des Kegelschnittes in der Ebene. Behält man beim Kegel (1) nur diejenigen Strahlen und Ebenen bei, die durch die Spitze gehen, und beim Kegelschnitt (1') nur die Strahlen und Punkte der unendlich fernen Ebene so bleibt von den *räumlichen* Polarsystemen unter 2. nur ein *Polarsystem im Bündel* („*Polarbündel*") und ein *Polarsystem in der unendlich fernen Ebene* („*unendlich fernes Polarfeld*") übrig, bei dem sich nach 2, I; II *Ebene und Strahl,* bezüglich nach 2, I'; II' *Punkt und Strahl* entsprechen (§ 79, 6).

Man kann dabei x, y, z und q_{23}, q_{31}, q_{12} als Richtungskosinus α, β, γ (I § 48, (19)) oder Koordinaten eines unendlich fernen Punktes (I § 49, 2; 6), ferner u, v, w und p_{23}, p_{31}, p_{12} als Stellungskosinus (I § 49, 4) oder Koordinaten einer unendlich fernen Geraden nehmen. Alsdann geben die Gleichungen (3); (4) und (3'); (4')

für die *Polarebene eines Strahles* α, β, γ im Bündel:

$$(7)\quad u : v : w = \frac{\alpha}{a^2} : \frac{\beta}{b^2} : -\frac{\gamma}{c^2};$$

für den *Pol einer Geraden u, v, w* in der unendlich fernen Ebene:

$$(7')\quad \alpha : \beta : \gamma = a^2u : b^2v : -c^2w;$$

für die *Polare* (den Polstrahl) *einer Ebene u, v, w:*

$$(8)\quad \alpha : \beta : \gamma = a^2u : b^2v : -c^2w.$$

für die *Polare eines Punktes* α, β, γ:

$$(8')\quad u : v : w = \frac{\alpha}{a^2} : \frac{\beta}{b^2} : -\frac{\gamma}{c^2}.$$

Das Polarbündel (7); (8) des Kegels (1) schneidet die unendlich ferne Ebene in dem polaren Feld (7'); (8') der Kurve (1'); *Bündel und Feld liegen perspektiv.*

Das Polarbündel (7); (8) des Kegels (1) fällt mit der Beziehung § 72, (2); (4) zwischen *Durchmesser* und *Diametralebene* bei dem Hyperboloid zusammen, dessen Asymptotenkegel der Kegel (1) ist (§ 14, 4).

4. Gleichungen des Kugelkegels und des Kugelkreises. Als besondere Fälle gehen aus (1) und (1') mit $a^2 = b^2 = -c^2$ hervor der *imaginäre Kugelkegel am Punkte O* und der *imaginäre Kugelkreis der unendlich fernen Ebene,* beide zueinander perspektiv gelegen. Nach § 71, 3, 4, 6, 7 sind *die Gleichungen* (§ 20, 22)

des Kugelkegels in Punktkoordinaten:

(9) $x^2 + y^2 + z^2 = 0;$

in Ebenenkoordinaten:

(10) $u^2 + v^2 + w^2 = 0, \quad s = 0;$

in Linienkoordinaten und zwar Bedingung der *Tangenten:*

(11) $p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 = 0;$

und Bedingungen der *Erzeugenden:*

(12) $p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 0,$
$p_{23} = p_{31} = p_{12} = 0.$

des imaginären Kugelkreises in Ebenenkoordinaten[60]):

(9') $u^2 + v^2 + w^2 = 0;$

in Punktkoordinaten:

(10') $x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad t = 0;$

in Linienkoordinaten und zwar Bedingung der *Treffgeraden:*

(11') $p_{14}^2 + p_{24}^2 + p_{34}^2 = 0;$

und Bedingungen der *Tangenten:*

(12') $p_{23}^2 + p_{31}^2 + p_{12}^2 = 0,$
$p_{14} = p_{24} = p_{34} = 0.$

5. Polarentheorie des Kugelkegels und Kugelkreises im Raume. Insofern der Kugelkegel (9) als Fläche zweiter Ordnung und der Kugelkreis (9') als Fläche zweiter Klasse betrachtet wird, folgt aus (6) und (6') als Beziehung zwischen zwei konjugierten Punkten P und P', bezüglich Ebenen Π und Π':

(13) $xx' + yy' + zz' = 0.$ | (13') $uu' + vv' + ww' = 0.$

Die Gleichung (13') gibt die Sätze (I § 42, (5)):

I. *In bezug auf den imaginären Kugelkreis sind zwei Ebenen konjugiert (harmonische Polarebenen), wenn sie aufeinander senkrecht stehen* (§ 20, 22, I); ferner (§ 77, 2):

II. *Die Involution harmonischer Polarebenen, die der Kugelkreis an einer Geraden des Raumes bestimmt, ist eine Involution rechtwinkliger Ebenen* (§ 20, 22, II).

Da die Gleichung (13') auch den Pol der Ebene u, v, w, s in laufenden Ebenenkoordinaten u', v', w', s' darstellt (§ 77, (5)), so sind

$u, v, w, 0$ die Koordinaten des Poles der Ebene u, v, w, s, also (I § 47, (14); § 41, (5)):

III. *Der Pol einer Ebene in bezug auf den Kugelkreis ist der gemeinsame unendlich ferne Punkt aller Normalen der Ebene.*

IV. *Die reziproke Polare einer Geraden ist die gemeinsame unendlich ferne Schnittlinie aller Normalebenen der Geraden*[87]).

6. Polarentheorie des Kugelkegels und Kugelkreises in Bündel und Ebene. Im Polarbündel des Kugelkegels und im polaren Felde des Kugelkreises bestehen nach (7) und (7') zwischen Polstrahl α, β, γ und Polarebene u, v, w, bezüglich zwischen Pol α, β, γ und Polare u, v, w die Beziehungen:

$$(14) \qquad u : v : w = \alpha : \beta : \gamma.$$

Ferner sind zwei konjugierte Strahlen α, β, γ und α', β', γ' und zwei konjugierte Ebenen u, v, w und u', v', w', bezüglich zwei konjugierte Punkte und Geraden durch die Gleichungen verbunden:

$$(15) \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad (16) \quad uu' + vv' + ww' = 0.$$

V. *In bezug auf den Kugelkegel (im „orthogonalen Polarbündel") stehen Polstrahl und Polarebene aufeinander senkrecht.*

VI. *In bezug auf den Kugelkegel sind zwei konjugierte Strahlen oder Ebenen aufeinander senkrecht.*

V'. *Eine Gerade und eine Ebene, die zueinander senkrecht sind, schneiden die unendlich ferne Ebene in Pol und Polare des Kugelkreises.*

VI'. *Zwei senkrechte Gerade und zwei senkrechte Ebenen schneiden die unendlich ferne Ebene in konjugierten Punkten, bezüglich konjugierten Geraden des Kugelkreises.*

§ 85. Der Achsenkomplex der Mittelpunktsflächen und Paraboloide.

1. Begriff der Achse und des Achsenkomplexes. In bezug auf eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung gehören nach § 78, 4 je ein Punkt und eine Ebene als Pol und Polarebene zusammen.

Die von Pol auf Polarebene gefällte Senkrechte (§ 20, 5) *heißt eine „Achse" der Fläche* (im weiteren Sinne).

Zu jedem der ∞^3 Punkte, bezüglich jeder der ∞^3 Ebenen des Raumes gehört daher eine Achse[82]).

Die Gesamtheit der ∞^3 Achsen bildet den Achsenkomplex der Fläche.

2. Doppelte Parameterdarstellung der Achsen. In bezug auf die Mittelpunktsfläche:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} = 1$$

bestehen nach § 82, (5) zwischen Pol $P = x, y, z$ und Polarebene $\Pi = u, v, w$ die Beziehungen:

$$(2) \qquad u = -\frac{x}{\alpha}, \quad v = -\frac{y}{\beta}, \quad w = -\frac{z}{\gamma}.$$

Die vom Pol P auf die Polarebene Π gefällte Senkrechte hat daher in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichungen:

$$(3) \qquad X - x : Y - y : Z - z = \frac{x}{\alpha} : \frac{y}{\beta} : \frac{z}{\gamma}.$$

Daraus folgt aber (I § 48, (18)):

Die Strahlenkoordinaten der zum Punkte x, y, z gehörigen Achse sind:

$$(4) \qquad \begin{cases} \varrho p_{23} = (\beta - \gamma)\frac{yz}{\beta\gamma}, & \varrho p_{14} = -\frac{x}{\alpha}, \\ \varrho p_{31} = (\gamma - \alpha)\frac{zx}{\gamma\alpha}, & \varrho p_{24} = -\frac{y}{\beta}, \\ \varrho p_{12} = (\alpha - \beta)\frac{xy}{\alpha\beta}, & \varrho p_{34} = -\frac{z}{\gamma}. \end{cases}$$

Führt man hier statt x, y, z mittels (2) u, v, w ein, so ergibt sich weiter (§ 20, (12)):

Die Strahlenkoordinaten der zur Ebene u, v, w gehörigen Achse sind:

$$(5) \qquad \begin{cases} \varrho p_{23} = (\beta - \gamma) vw, & \varrho p_{14} = u, \\ \varrho p_{31} = (\gamma - \alpha) wu, & \varrho p_{24} = v, \\ \varrho p_{12} = (\alpha - \beta) uv, & \varrho p_{34} = w. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten eine Parameterdarstellung der Achsen p_{kl} der Fläche (1) in den Parametern x, y, z oder u, v, w. Die Gleichungen (4) geben die Achse als *„konjugierte Achse des Punktes x, y, z“*, die Gleichungen (5) als *„konjugierten Normalstrahl der Ebene u, v, w“*.

3. Die Gleichung des Achsenkomplexes. Aus den Gleichungen (4) folgt unter Elimination der Parameter x, y, z die Proportion:

$$(6) \qquad p_{23}p_{14} : p_{31}p_{24} : p_{12}p_{34} = \beta - \gamma : \gamma - \alpha : \alpha - \beta,$$

die mit den beiden Gleichungen:

$$(7)\; p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0, \qquad (8)\; \alpha p_{23}p_{14} + \beta p_{31}p_{24} + \gamma p_{12}p_{34} = 0$$

gleichbedeutend ist.

Jede Achse der Fläche (1) genügt somit der Gleichung (8). Wir beweisen unter 4, daß auch jede der Gleichung (8) genügende Gerade eine Achse ist.

Daher ist (8) *die Gleichung des Achsenkomplexes der Fläche* (1) *in laufenden Strahlenkoordinaten.*

Er ist ein Komplex *zweiten* Grades. Seine Gleichung behält auch in Achsenkoordinaten dieselbe Form (I § 48, (10)):

$$(9) \qquad \alpha q_{23} q_{14} + \beta q_{31} q_{24} + \gamma q_{12} q_{34} = 0.$$

Der Komplex ist also im Sinne von § 82, (42)) *zu sich selbst polar reziprok.*

4. Konjugierter Pol und konjugierte Normalebene einer Achse. Ist jetzt p irgendeine Gerade und $P = x, y, z$ ein auf ihr liegender Punkt, so bestehen die vier Bedingungen der vereinigten Lage (I § 48, (12)):

$$(10) \qquad \begin{cases} p_{34} y - p_{24} z + p_{23} = 0, \\ p_{14} z - p_{34} x + p_{31} = 0, \\ p_{24} x - p_{14} y + p_{12} = 0, \\ p_{23} x + p_{31} y + p_{12} z = 0, \end{cases}$$

die für *zwei unabhängige* zählen. Soll nun die Polarebene Π von P auf p senkrecht, also p die konjugierte Achse von P sein, muß nach (2) (I § 48, (19)):

$$-\frac{x}{\alpha} : -\frac{y}{\beta} : -\frac{z}{\gamma} = p_{14} : p_{24} : p_{34}$$

oder mit einem Faktor ϱ sein:

$$(11) \qquad x = -\varrho \alpha p_{14}, \quad y = -\varrho \beta p_{24}, \quad z = -\varrho \gamma p_{34}.$$

Diese Annahme ist mit der vierten Gleichung (10) immer dann und nur dann verträglich, wenn die Gerade p der Bedingung (8) genügt, worauf die andern Gleichungen (10) werden:

$$(12) \quad \varrho p_{24} p_{34} (\beta - \gamma) = p_{23}, \quad \varrho p_{34} p_{14} (\gamma - \alpha) = p_{31}, \quad \varrho p_{14} p_{24} (\alpha - \beta) = p_{12}.$$

Diese Gleichungen zählen nur für eine, da sie mit p_{14}, p_{24}, p_{34} oder mit $\alpha p_{14}, \beta p_{24}, \gamma p_{34}$ multipliziert und addiert auf (7) und (8) führen. Aus jeder von ihnen kann daher der Wert von ϱ entnommen werden.

Jede der Gleichung (8) *genügende Gerade* p_{kl} *ist daher eine Achse der Fläche* (1). *Derjenige Punkt der Achse, dessen konjugierte Achse sie ist, und der ihr „konjugierter Pol" heißt, hat die Koordinaten:*

$$(13) \; x = -\frac{\alpha p_{23} p_{14}}{(\beta - \gamma) p_{24} p_{34}}, \quad y = -\frac{\beta p_{31} p_{24}}{(\gamma - \alpha) p_{34} p_{14}}, \quad z = -\frac{\gamma p_{12} p_{34}}{(\alpha - \beta) p_{14} p_{24}}$$

oder auch nach (6):

$$(14) \quad x = -\frac{\alpha}{\alpha - \beta} \frac{p_{12}}{p_{24}} = -\frac{\alpha}{\gamma - \alpha} \frac{p_{31}}{p_{34}}, \quad y = -\frac{\beta}{\beta - \gamma} \frac{p_{23}}{p_{34}} = -\frac{\beta}{\alpha - \beta} \frac{p_{12}}{p_{14}},$$

$$z = -\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \frac{p_{31}}{p_{14}} = -\frac{\gamma}{\beta - \gamma} \frac{p_{23}}{p_{24}}.$$

Damit folgt aber unter Benutzung von (2):

Diejenige Ebene, deren konjugierter Normalstrahl die Achse p_{kl} *ist, und die ihre „konjugierte Normalebene" heißt, hat die Koordinaten:*

$$(15)\quad u=\frac{p_{23}p_{14}}{(\beta-\gamma)p_{24}p_{34}},\quad v=\frac{p_{31}p_{24}}{(\gamma-\alpha)p_{34}p_{14}},\quad w=\frac{p_{12}p_{34}}{(\alpha-\beta)p_{14}p_{24}}$$

oder auch nach (6):

$$(16)\quad \begin{gathered} u=\frac{p_{12}}{(\alpha-\beta)p_{24}}=\frac{p_{31}}{(\gamma-\alpha)p_{34}},\quad v=\frac{p_{23}}{(\beta-\gamma)p_{34}}=\frac{p_{12}}{(\alpha-\beta)p_{14}},\\ w=\frac{p_{31}}{(\gamma-\alpha)p_{14}}=\frac{p_{23}}{(\beta-\gamma)p_{24}}. \end{gathered}$$

5. Der Fußpunkt der Achse. Der Schnittpunkt einer Achse p_{kl} mit ihrer konjugierten Normalebene (Fig. 173) heißt der *Fußpunkt der Achse.* Man erhält seine Koordinaten, indem man in (I § 48, (20)):

$$(17)\quad \begin{cases} x=-\dfrac{p_{12}v-p_{31}w+p_{14}}{p_{14}u+p_{24}v+p_{34}w},\\[2ex] y=-\dfrac{p_{23}w-p_{12}u+p_{24}}{p_{14}u+p_{24}v+p_{34}w},\\[2ex] z=-\dfrac{p_{31}u-p_{23}v+p_{34}}{p_{14}u+p_{24}v+p_{34}w} \end{cases}$$

die Werte (15) substituiert.

Fig. 173.

6. Zueinander senkrechte reziproke Polaren. Zwischen zwei reziproken Polaren p_{kl} und p'_{kl} der Fläche (1) besteht nach § 82, (10) die Beziehung:

$$(18)\quad p'_{23}:p'_{31}:p'_{12}:p'_{14}:p'_{24}:p'_{34}=-\frac{p_{14}}{\alpha}:-\frac{p_{24}}{\beta}:-\frac{p_{34}}{\gamma}:\frac{p_{23}}{\beta\gamma}:\frac{p_{31}}{\gamma\alpha}:\frac{p_{12}}{\alpha\beta}.$$

Sie sind beide aufeinander senkrecht immer dann und nur dann, wenn (I § 48, (19)):

$$p_{14}p'_{14}+p_{24}p'_{24}+p_{34}p'_{34}=0$$

oder nach (18):

$$\frac{p_{14}p_{23}}{\beta\gamma}+\frac{p_{24}p_{31}}{\gamma\alpha}+\frac{p_{34}p_{12}}{\alpha\beta}=0.$$

also mit Hinblick auf (8):

Der Achsenkomplex besteht auch aus der Gesamtheit der Geraden, die zu ihrer reziproken Polaren senkrecht sind.

7. Die Normalen als Achsen. Wenn Pol und Polarebene vereinigt liegen, also der Pol der Fläche angehört, wird die ihm zugehörige Achse nach **1.** die Normale der Fläche in ihm (§ 20, 7):

Die ∞^2 Normalen der Fläche gehören dem Achsenkomplex an.

8. Besondere Achsen. Zu dem Achsenkomplex *im Sinne der Gleichung* (8) gehören alle Durchmesser der Fläche (1), $p_{23}=p_{31}=p_{12}=0$ (I § 49, (6)), alle unendlich fernen Geraden, $p_{14}=p_{24}=p_{34}=0$ (I § 49 (3)), alle in einer der drei Hauptebenen liegenden Geraden, $p_{31}=p_{12}=p_{14}=0$

oder $p_{12}=p_{23}=p_{24}=0$ oder $p_{23}=p_{31}=p_{34}=0$ (I § 49, (1)), alle einer Hauptachse parallelen Geraden, $p_{23}=p_{24}=p_{34}=0$ oder $p_{31}=p_{34}=p_{14}=0$ oder $p_{12}=p_{14}=p_{24}=0$. Die ursprüngliche Erklärung unter **1.** und die Entwicklungen unter **4.** erleiden für diese besonderen Geraden teilweise eine Ausnahme (§ 20, **5**).

9. Zwei sich schneidende Achsen. Sind P und P' die konjugierten Pole zweier sich schneidender Achsen p und p', und Π und Π' die Polarebenen von P und P', so sind $q = PP'$ und $q' = \Pi \times \Pi'$ zwei reziproke Polaren (§ 68, **15**, I). Da aber nach **1.** p senkrecht zu Π und ebenso p' zu Π', so ist q' zu p und p', also auch zur Ebene pp' und damit zu q senkrecht; dann sind aber nach **6.** q und q' selbst Achsen.

Wenn sich zwei Achsen schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer konjugierten Pole auch eine Achse, ebenso die Schnittlinie ihrer konjugierten Normalebenen.

Insbesondere folgt hieraus nach **7**:

Wenn zwei Normalen der Fläche (1) *sich schneiden, so ist die Verbindungslinie ihrer Fußpunkte eine Achse, ebenso die Schnittlinie der zugehörigen Tangentialebenen.*

10. Der Komplexkegel. In den Koordinaten zweier Punkte x_0, y_0, z_0 und x, y, z einer Geraden p_{kl} dargestellt, lautet die Gleichung (8) des Achsenkomplexes:

$$\alpha(y_0 z - z_0 y)(x - x_0) + \beta(z_0 x - x_0 z)(y - y_0) + \gamma(x_0 y - y_0 x)(z - z_0) = 0$$

oder:

$$\alpha\{y_0(z - z_0) - z_0(y - y_0)\}(x - x_0) + \beta\{z_0(x - x_0) - x_0(z - z_0)\}(y - y_0) \\ + \gamma\{x_0(y - y_0) - y_0(x - x_0)\}(z - z_0) = 0$$

oder:

$$(19) \quad (\beta - \gamma)x_0(y - y_0)(z - z_0) + (\gamma - \alpha)y_0(z - z_0)(x - x_0) \\ + (\alpha - \beta)z_0(x - x_0)(y - y_0) = 0$$

oder endlich:

$$(20) \quad (\beta - \gamma)x_0 yz + (\gamma - \alpha)y_0 zx + (\alpha - \beta)z_0 xy + (\beta - \gamma)y_0 z_0 x \\ + (\gamma - \alpha)z_0 x_0 y + (\alpha - \beta)x_0 y_0 z = 0.$$

Die Gleichung (19) hat die Form § 80, (19) mit $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ für x, y, z; also:

Die durch einen Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$ gehenden Komplexstrahlen bilden einen gleichseitigen Kegel zweiter Ordnung.

Dieser enthält nämlich unter anderen die Strahlen, die durch P_0 parallel den Hauptachsen der Fläche (1) gezogen sind, $y = y_0$, $z = z_0$, usw.,

also zu einer Erzeugenden zwei zu dieser und unter sich senkrechte (§ 64, 3; 4; vgl. auch § 93, 4); außerdem noch den Strahl, der P_0 mit dem Mittelpunkt O verbindet.

11. Die Komplexkurve. In den Koordinaten zweier Ebenen u_0, v_0, w_0, s_0 und u, v, w, s einer Geraden q_{kl} dargestellt, lautet die Gleichung (9) des Achsenkomplexes entsprechend (19):

$$(21)\quad \begin{aligned}(\beta-\gamma)u_0(s_0v-v_0s)(s_0w-w_0s)+(\gamma-\alpha)v_0(s_0w-w_0s)(s_0u-u_0s)\\ +(\alpha-\beta)w_0(s_0u-u_0s)(s_0v-v_0s)=0\end{aligned}$$

oder:

$$(22)\quad \begin{aligned}F(u,v,w,s)=(\beta-\gamma)u_0s_0vw+(\gamma-\alpha)v_0s_0wu+(\alpha-\beta)w_0s_0uv\\ +(\beta-\gamma)v_0w_0su+(\gamma-\alpha)w_0u_0sv+(\alpha-\beta)u_0v_0sw=0.\end{aligned}$$

Dies ist in laufenden Ebenenkoordinaten u, v, w, s die Gleichung der in der Ebene u_0, v_0, w_0, s_0 liegenden Komplexkurve. Zu den Tangentialebenen der Kurve gehört die unendlich ferne Ebene $u=v=w=0$ (§ 13, 14), sowie die Koordinatenebenen $v=w=s=0$, $w=u=s=0$, $u=v=s=0$.

Die in einer Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0, s_0$ liegenden Komplexstrahlen umhüllen eine Parabel, welche die drei Hauptebenen berührt.

12. Ort der Pole der durch einen festen Punkt gehenden Achsen. Jede Achse p_{kl} des Komplexes hat ihren konjugierten Pol $P = x, y, z$, von dem sie mittels der Gleichungen (4) abhängt. Geht die Achse durch einen festen Punkt $P_0 = x_0, y_0, z_0$, so gehört sie dem Komplexkegel (19) an, und ihre Pole bilden *eine auf diesem verzeichnete Kurve.* Ein Punkt dieser Kurve genügt außer der Gleichung (19) den vier Gleichungen, die man erhält, indem man die Darstellung (4) der Achse p_{kl} durch ihren Pol $P = x, y, z$ in die Bedingungen der vereinigten Lage von p_{kl} und P_0, also die mit x_0, y_0, z_0 für x, y, z gebildeten Gleichungen (10) einsetzt. Man erhält dadurch in homogener Schreibweise:

$$(23)\quad \begin{cases}(\beta-\gamma)\dfrac{yz}{\beta\gamma}+z_0\dfrac{y}{\beta}t-y_0\dfrac{z}{\gamma}t=0,\\ (\gamma-\alpha)\dfrac{zx}{\gamma\alpha}+x_0\dfrac{z}{\gamma}t-z_0\dfrac{x}{\alpha}t=0,\\ (\alpha-\beta)\dfrac{xy}{\alpha\beta}+y_0\dfrac{x}{\alpha}t-x_0\dfrac{y}{\beta}t=0,\end{cases}$$

$$(24)\quad (\beta-\gamma)x_0\frac{yz}{\beta\gamma}+(\gamma-\alpha)y_0\frac{zx}{\gamma\alpha}+(\alpha-\beta)z_0\frac{xy}{\alpha\beta}=0.$$

Die Gleichungen (23) bedeuten drei *gleichseitig hyperbolische Zylinder* (§ 20, (22)), die bezüglich den Hauptachsen x, y, z parallel

sind, die Gleichung (24) einen *gleichseitigen Kegel* (§ 64, **3**; § 93, **4**) mit der Spitze O. Die beiden letzten Zylinder (23):

$$\left\{(\gamma-\alpha)\frac{z}{\gamma}-z_0 t\right\}\frac{x}{\alpha}+\frac{z}{\gamma}x_0 t=0,$$

$$\left\{(\alpha-\beta)\frac{y}{\beta}+y_0 t\right\}\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}x_0 t=0,$$

haben die Erzeugende $x=0,\ t=0$ *gemein*, während *jeder andere* ihnen gemeinsame Punkt der Gleichung:

$$-\left\{(\gamma-\alpha)\frac{z}{\gamma}-z_0 t\right\}\frac{y}{\beta}-\left\{(\alpha-\beta)\frac{y}{\beta}+y_0 t\right\}\frac{z}{\gamma}=0$$

genügt, also dem ersten Zylinder (23) angehört. Die gemeinsamen Punkte der drei Zylinder bilden daher eine *Raumkurve dritter Ordnung als teilweisen Durchschnitt je zweier Zylinder* (23), *die jedesmal noch eine Gerade gemein haben.*

Bildet man durch lineare Kombination der Gleichungen (23) mit zwei Parameterverhältnissen $\lambda:\mu:\nu$ die Gleichung:

$$(25)\quad \begin{aligned}\lambda(\beta-\gamma)\frac{yz}{\beta\gamma}+\mu(\gamma-\alpha)\frac{zx}{\gamma\alpha}+\nu(\alpha-\beta)\frac{xy}{\alpha\beta}+(y_0\nu-z_0\mu)\frac{x}{\alpha}\\+(z_0\lambda-x_0\nu)\frac{y}{\beta}+(x_0\mu-y_0\lambda)\frac{z}{\gamma}=0,\end{aligned}$$

so stellt diese ∞^2 Flächen zweiter Ordnung (ein „*Flächenbündel*") dar, die alle durch die gemeinsamen Punkte der drei Zylinder (23), also durch die Raumkurve dritter Ordnung gehen.

Zu diesen Flächen gehören aber mit:

$$(26)\qquad \lambda:\mu:\nu=x_0:y_0:z_0 \quad \text{und} \quad =\beta\gamma x_0:\gamma\alpha y_0:\alpha\beta z_0$$

auch die Kegel (24) und (20), auf denen somit die Raumkurve ebenfalls liegt.

Sie schneidet nach (23) die unendlich ferne Ebene in den unendlich fernen Punkten der drei Achsen des rechtwinkligen Systems $Oxyz$ und heißt daher (§ 1, **10**) eine *gleichseitige kubische Hyperbel*[12]).

Der Ort der Pole der durch einen festen Punkt $P_0=x_0, y_0, z_0$ *gehenden Achsen der Fläche ist eine gleichseitige kubische Hyperbel* (§ 20, **9**).

13. Die Sehnen der Raumkurve. Jede Sehne der Raumkurve gehört als Verbindungslinie der Pole zweier sich in P_0 schneidenden Achsen nach **9.** selbst dem Achsenkomplex an. Verbindet man also einen Punkt P_1 der Raumkurve mit allen ihren übrigen Punkten P durch Sehnen, so bilden diese den Komplexkegel des Punktes P_1, so daß sich nach **10.** ergibt:

Die kubische Hyperbel (23) *wird aus jedem ihrer Punkte durch einen gleichseitigen Kegel zweiter Ordnung projiziert.*

14. Normalen der Fläche durch einen Punkt. Die Raumkurve ist der Ort der Pole aller durch P_0 gehenden Achsen. Ihre sechs Schnittpunkte mit der Fläche (1) sind die Pole derjenigen durch P_0 gehenden Achsen, deren Pole auf der Fläche liegen, die also nach 7, Normalen sind[88]).

Durch einen Punkt P_0 *des Raumes gehen im allgemeinen sechs Normalen an die Fläche* (1), *deren Fußpunkte die Schnittpunkte der Raumkurve* (23) *mit der Fläche sind* (§ 20, 9).

15. Ort der Pole der in einer festen Ebene liegenden Achsen. Jede Achse p_{kl} des Komplexes hat ihren konjugierten Pol $P = x, y, z$, von dem sie mittels der Gleichungen (4) abhängt. Liegt die Achse in einer festen Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0$, so ist sie Tangente der Komplexkurve (21), und ihre Pole bilden eine *in der Ebene liegende Ortskurve.* Ein Punkt dieser Kurve genügt den Gleichungen, die man erhält, indem man die Darstellung (4) der Achse p_{kl} durch ihren Pol $P = x, y, z$ in die Bedingungen der vereinigten Lage von p_{kl} und Π_0 (I § 48, (11')):

$$(27)\qquad \begin{cases} p_{12}v_0 - p_{31}w_0 + p_{14} = 0, \\ p_{23}w_0 - p_{12}u_0 + p_{24} = 0, \\ p_{31}u_0 - p_{23}v_0 + p_{34} = 0, \\ p_{14}u_0 + p_{24}v_0 + p_{34}w_0 = 0 \end{cases}$$

einsetzt, also:

$$(28)\qquad \begin{cases} \frac{x}{\alpha}\left\{(\alpha-\beta)v_0\frac{y}{\beta} + (\alpha-\gamma)w_0\frac{z}{\gamma} - 1\right\} = 0, \\ \frac{y}{\beta}\left\{(\beta-\gamma)w_0\frac{z}{\gamma} + (\beta-\alpha)u_0\frac{x}{\alpha} - 1\right\} = 0, \\ \frac{z}{\gamma}\left\{(\gamma-\alpha)u_0\frac{x}{\alpha} + (\gamma-\beta)v_0\frac{y}{\beta} - 1\right\} = 0, \end{cases}$$

$$(29)\qquad u_0\frac{x}{\alpha} + v_0\frac{y}{\beta} + w_0\frac{z}{\gamma} = 0.$$

Die Ebene (29) bestimmt mit der Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0$ das Ebenenbüschel:

$$(30)\qquad \left(\frac{1}{\alpha} - \lambda\right)u_0x + \left(\frac{1}{\beta} - \lambda\right)v_0y + \left(\frac{1}{\gamma} - \lambda\right)w_0z - \lambda = 0,$$

zu dem für $\lambda = \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ auch die Ebenen gehören, welche den zweiten Faktoren der Gleichungen (28) entsprechen.

Die gesuchte Ortskurve ist also eine gerade Linie, die Achse des Büschels (30). Sie hat die Strahlenkoordinaten (I § 48, (3)):

$$(31)\quad \begin{cases} p_{23} = -\dfrac{u_0}{\alpha}, \quad p_{31} = -\dfrac{v_0}{\beta}, \quad p_{12} = -\dfrac{w_0}{\gamma}, \\ p_{14} = (\beta-\gamma)\dfrac{v_0 w_0}{\beta\gamma}, \quad p_{24} = (\gamma-\alpha)\dfrac{w_0 u_0}{\gamma\alpha}, \quad p_{34} = (\alpha-\beta)\dfrac{u_0 v_0}{\alpha\beta}, \end{cases}$$

gehört also selbst dem Achsenkomplex (8) an. Alle Ebenen u, v, w, s des Büschels (30) sind daher Tangentialebenen der Komplexkurve (22). Der Berührungspunkt einer solchen Tangentialebene u, v, w, s hat nach § 76, (10) die Koordinaten ($s_0 = 1$ genommen):

$$(32)\quad \begin{cases} x = F_1 = (\beta-\gamma)v_0 w_0 s + (\gamma-\alpha)v_0 w + (\alpha-\beta)w_0 v, \\ y = F_2 = (\beta-\gamma)u_0 w + (\gamma-\alpha)w_0 u_0 s + (\alpha-\beta)w_0 u, \\ z = F_3 = (\beta-\gamma)u_0 v + (\gamma-\alpha)v_0 u + (\alpha-\beta)u_0 v_0 s, \\ t = F_4 = (\beta-\gamma)v_0 w_0 u + (\gamma-\alpha)w_0 u_0 v + (\alpha-\beta)u_0 v_0 w. \end{cases}$$

Für die Ebene $\lambda = 0$ oder $u = \frac{u_0}{\alpha}, \; v = \frac{v_0}{\beta}, \; w = \frac{w_0}{\gamma}, \; s = 0$ des Büschels (30) werden die gemeinen Koordinaten dieses Punktes:

$$(33)\quad x = \frac{\alpha^2}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)u_0}, \quad y = \frac{\beta^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)v_0}, \quad z = \frac{\gamma^2}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)w_0}.$$

Derselbe Punkt folgt aber auch durch Einsetzen der Werte (31) in (13). Also ergibt sich:

Die Pole der in einer festen Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0$ liegenden Achsen liegen auf einer Tangente (31) *der von diesen Achsen umhüllten Parabel* (21). *Der Pol dieser Tangente ist ihr Berührungspunkt mit der Parabel.*

16. Normalen der Fläche in einer Ebene. Die Tangente t der Parabel schneidet die Fläche (1) in zwei Punkten, von denen außer t je eine zweite Tangente t_1 und t_2 an die Parabel geht. Diese beiden Tangenten sind diejenigen Achsen innerhalb Π_0, die ihre Pole auf der Fläche (1) haben, also nach 7. Normalen sind.

In einer Ebene $\Pi_0 = u_0, v_0, w_0$ liegen zwei Normalen der Fläche (1), *deren Fußpunkte die Schnittpunkte der Fläche mit der Achse des Ebenenbüschels* (30) *sind.*

17. Doppelte Parameterdarstellung der Achsen beim Paraboloid. In bezug auf das Paraboloid:

$$(34)\quad \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + 2x + a = 0$$

bestehen nach § 83, (5) zwischen Pol $P = x, y, z$ und Polarebene $\Pi = u, v, w$ die Beziehungen:

$$(35)\quad u = \frac{1}{x+a}, \quad v = \frac{y}{\beta(x+a)}, \quad w = \frac{z}{\gamma(x+a)}.$$

Die vom Pol P auf die Polarebene Π gefällte Senkrechte hat daher in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichungen:

$$X - x : Y - y : Z - z = 1 : \frac{y}{\beta} : \frac{z}{\gamma}. \tag{36}$$

Die Strahlenkoordinaten der zum Punkte x, y, z gehörigen Achse sind:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho p_{23} = (\beta - \gamma)\frac{yz}{\beta\gamma}, & \varrho p_{14} = -1, \\ \varrho p_{31} = (\gamma - x)\frac{z}{\gamma}, & \varrho p_{24} = -\frac{y}{\beta}, \\ \varrho p_{12} = -(\beta - x)\frac{y}{\beta}, & \varrho p_{34} = -\frac{z}{\gamma}. \end{array}\right. \tag{37}$$

Die Strahlenkoordinaten der zur Ebene u, v, w gehörigen Achse sind:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho p_{23} = (\beta - \gamma)\frac{vw}{u}, & \varrho p_{14} = -u, \\ \varrho p_{31} = \left(\gamma + a - \frac{1}{u}\right)w, & \varrho p_{24} = -v, \\ \varrho p_{12} = -\left(\beta + a - \frac{1}{u}\right)v, & \varrho p_{34} = -w. \end{array}\right. \tag{38}$$

18. Die Gleichung des Achsenkomplexes beim Paraboloid. Durch Elimination der Parameter x, y, z folgt als *Gleichung des Achsenkomplexes* in laufenden Strahlenkoordinaten:

$$p_{23}p_{14} + (\beta - \gamma)p_{24}p_{31} = 0 \tag{39}$$

und in laufenden Achsenkoordinaten:

$$q_{23}q_{14} + (\beta - \gamma)q_{31}q_{12} = 0. \tag{40}$$

Dieselbe Gleichung erhält man wie unter **6.** aus der Bedingung, daß zwei reziproke Polaren p_{kl} und p'_{kl} mit der Beziehung (§ 83, (9)):

$$p'_{23}:p'_{31}:p'_{12}:p'_{14}:p'_{24}:p'_{34} = -p_{14} : -\frac{p_{12}}{\beta} + a\frac{p_{24}}{\beta} : \frac{p_{31}}{\gamma} + a\frac{p_{34}}{\gamma} : \frac{p_{23}}{\beta\gamma} : \frac{p_{34}}{\gamma} : -\frac{p_{24}}{\beta}$$

aufeinander senkrecht stehen:

$$\frac{p_{14}p_{23}}{\beta\gamma} + \frac{p_{34}p_{34}}{\gamma} - \frac{p_{24}p_{24}}{\beta} = 0. \tag{41}$$

19. Konjugierter Pol und konjugierte Normalebene einer Achse. Ist jetzt p irgendeine Gerade und $P = x, y, z$ ein auf ihr liegender Punkt, dessen Polarebene Π auf p senkrecht steht, muß nach (35) sein:

$$1 : \frac{y}{\beta} : \frac{z}{\gamma} = p_{14} : p_{24} : p_{34}$$

oder:

$$p_{14}y = \beta p_{24}, \quad p_{14}z = \gamma p_{34}. \tag{42}$$

Diese Gleichungen sind unter der Voraussetzung (39) mit den vier Gleichungen (10) verträglich, und alle sechs können nach x, y, z aufgelöst werden.

Jede der Gleichung (39) *genügende Gerade* p_{kl} *ist eine Achse des Paraboloids* (34). *Derjenige Punkt der Achse, dessen konjugierte Achse sie ist, und der ihr konjugierter Pol heißt, hat die Koordinaten:*

$$(43)\qquad x = \beta - \frac{p_{12}}{p_{24}} = \gamma + \frac{p_{31}}{p_{34}}, \quad y = \beta \frac{p_{24}}{p_{14}}, \quad z = \gamma \frac{p_{34}}{p_{14}}.$$

Diejenige Ebene, deren konjugierter Normalstrahl die Achse p_{kl} *ist, und die ihre konjugierte Normalebene heißt, hat die Koordinaten:*

$$(44)\quad u = \frac{p_{24}}{(\beta + \alpha)p_{24} - p_{12}} = \frac{p_{34}}{(\gamma + \alpha)p_{34} + p_{31}}, \quad v = \frac{p_{24}}{p_{14}} u, \quad w = \frac{p_{34}}{p_{14}} u.$$

20. Ort der Pole der durch einen festen Punkt gehenden Achsen. Setzt man wie in **12.** die Werte (37) in die mit x_0, y_0, z_0 geschriebenen Gleichungen (10) ein, so ergibt sich:

$$(45)\qquad \begin{cases} (\beta - \gamma)\dfrac{yz}{\beta\gamma} + z_0 \dfrac{y}{\beta} t - y_0 \dfrac{z}{\gamma} t = 0, \\ \dfrac{zx}{\gamma} - x_0 \dfrac{z}{\gamma} t - (z - z_0 t)t = 0, \\ \dfrac{xy}{\beta} - x_0 \dfrac{y}{\beta} t - (y - y_0 t)t = 0, \end{cases}$$

$$(46)\qquad (\beta - \gamma)x_0 \frac{yz}{\beta\gamma} - y_0 \frac{zx}{\gamma} + z_0 \frac{xy}{\beta} + (y_0 z - z_0 y)t = 0.$$

Die drei Gleichungen (45) stellen (§ 20, (22); (51)) wiederum drei *gleichseitige hyperbolische Zylinder* dar, die eine *gleichseitige kubische Hyperbel* gemein haben.

Von ihren sechs Schnittpunkten mit dem Paraboloid ist der eine, unabhängig von P_0, der unendlich ferne Punkt der x-Achse (§ 20, **19**), so daß im allgemeinen durch P_0 nur *fünf Normalen des Paraboloids* gehen (vgl. **14**[83])).

IV. Kapitel.

Das Strahlengewinde oder der lineare Komplex.

§ 86. Allgemeine Gleichung und Polarentheorie des linearen Komplexes.

1. Die allgemeine Gleichung des linearen Komplexes. Sind p_{kl} Strahlen- und q_{kl} Achsenkoordinaten in bezug auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$, a_{kl} aber gegebene Konstanten, so ist:

$$(1)\quad \varphi(p) = a_{23}p_{23} + a_{31}p_{31} + a_{12}p_{12} + a_{14}p_{14} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34} = 0$$

oder, was dasselbe ist (I § 48, (10)):

$$(2)\qquad \Phi(q) = a_{23}q_{14} + a_{31}q_{24} + a_{12}q_{34} + a_{14}q_{23} + a_{24}q_{31} + a_{34}q_{12} = 0,$$

die *allgemeine Gleichung eines linearen Komplexes oder Strahlengewindes*[174]).

Da die sechs Linienkoordinaten stets der Gleichung (I § 48, (5)):

$$(3)\quad P = p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0 \text{ oder } Q = q_{23}q_{14} + q_{31}q_{24} + q_{12}q_{34} = 0$$

genügen müssen, so enthält der Komplex ∞^3 Gerade.

2. Transformation des Komplexes. Sind p'_{kl} die Koordinaten der Geraden p_{kl} in bezug auf irgendein schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$, dessen Anfangspunkt Ω die Koordinaten x_0, y_0, z_0 und dessen Achsen die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben, so gelten die Transformationsformeln (I § 50, (5); I § 37, (13)):

$$(4)\qquad \begin{cases} p_{23} = \mathsf{A}_1 p'_{23} + \mathsf{A}_2 p'_{31} + \mathsf{A}_3 p'_{12} + (\beta_1 z_0 - \gamma_1 y_0)p'_{14} \\ \qquad\qquad + (\beta_2 z_0 - \gamma_2 y_0)p'_{24} + (\beta_3 z_0 - \gamma_3 y_0)p'_{34}, \\ p_{31} = \mathsf{B}_1 p'_{23} + \mathsf{B}_2 p'_{31} + \mathsf{B}_3 p'_{12} + (\gamma_1 x_0 - \alpha_1 z_0)p'_{14} \\ \qquad\qquad + (\gamma_2 x_0 - \alpha_2 z_0)p'_{24} + (\gamma_3 x_0 - \alpha_3 z_0)p'_{34}, \\ p_{12} = \Gamma_1 p'_{23} + \Gamma_2 p'_{31} + \Gamma_3 p'_{12} + (\alpha_1 y_0 - \beta_1 x_0)p'_{14} \\ \qquad\qquad + (\alpha_2 y_0 - \beta_2 x_0)p'_{24} + (\alpha_3 y_0 - \beta_3 x_0)p'_{34}, \\ p_{14} = \alpha_1 p'_{14} + \alpha_2 p'_{24} + \alpha_3 p'_{34}, \\ p_{24} = \beta_1 p'_{14} + \beta_2 p'_{24} + \beta_3 p'_{34}, \\ p_{34} = \gamma_1 p'_{14} + \gamma_2 p'_{24} + \gamma_3 p'_{34}. \end{cases}$$

Hier sind $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \ldots, \Gamma_3$ (I § 37, (4)) die Unterdeterminanten der Determinante:

$$(5)\qquad S = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (1) erhält im neuen System die Form[42]):

$$(6)\quad \varphi = a'_{23}p'_{23} + a'_{31}p'_{31} + a'_{12}p'_{12} + a'_{14}p'_{14} + a'_{24}p'_{24} + a'_{34}p'_{34} = 0,$$

wo die neuen Koeffizienten die Werte haben:

$$(7)\qquad \begin{cases} a'_{23} = a_{23}\mathsf{A}_1 + a_{31}\mathsf{B}_1 + a_{12}\Gamma_1, \\ a'_{31} = a_{23}\mathsf{A}_2 + a_{31}\mathsf{B}_2 + a_{12}\Gamma_2, \\ a'_{12} = a_{23}\mathsf{A}_3 + a_{31}\mathsf{B}_3 + a_{12}\Gamma_3; \end{cases}$$

$$(8)\quad\begin{cases} a'_{14} = (a_{12}y_0 - a_{31}z_0 + a_{14})\alpha_1 + (a_{23}z_0 - a_{12}x_0 + a_{24})\beta_1 \\ \qquad\qquad + (a_{31}x_0 - a_{23}y_0 + a_{34})\gamma_1, \\ a'_{24} = (a_{12}y_0 - a_{31}z_0 + a_{14})\alpha_2 + (a_{23}z_0 - a_{12}x_0 + a_{24})\beta_2 \\ \qquad\qquad + (a_{31}x_0 - a_{23}y_0 + a_{34})\gamma_2, \\ a'_{34} = (a_{12}y_0 - a_{31}z_0 + a_{14})\alpha_3 + (a_{23}z_0 - a_{12}x_0 + a_{24})\beta_3 \\ \qquad\qquad + (a_{31}x_0 - a_{23}y_0 + a_{34})\gamma_3. \end{cases}$$

3. Invarianten im gemeinen Koordinatensystem. Aus (7) und (8) folgt (I Anm. 1, II, (6)):

$$(9)\qquad a'_{23}a'_{14} + a'_{31}a'_{24} + a'_{12}a'_{34} = S(a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34}).$$

Aus (7) folgt zunächst (I Anm. 2, II, (1); (2)):

$$(10)\qquad\begin{cases} Sa_{23} = a'_{23}\alpha_1 + a'_{31}\alpha_2 + a'_{12}\alpha_3, \\ Sa_{31} = a'_{23}\beta_1 + a'_{31}\beta_2 + a'_{12}\beta_3, \\ Sa_{12} = a'_{23}\gamma_1 + a'_{31}\gamma_2 + a'_{12}\gamma_3, \end{cases}$$

und daraus durch Quadrieren und Addieren:

$$(11)\, a'^2_{23} + a'^2_{31} + a'^2_{12} + 2a'_{31}a'_{12}\alpha + 2a'_{12}a'_{23}\beta + 2a'_{23}a'_{31}\gamma = S^2(a^2_{23} + a^2_{31} + a^2_{12});$$

dabei haben α, β, γ die Bedeutung (I § 37, (7)):

$$(12)\qquad \alpha = \cos\eta\zeta,\quad \beta = \cos\zeta\xi,\quad \gamma = \cos\xi\eta.$$

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem beliebigen schiefwinkligen $\Omega\xi\eta\zeta$ gelten also stets die Beziehungen (9) *und* (11)[90].

Ist $\Omega\xi\eta\zeta$ auch rechtwinklig, ist:

$$(13)\qquad S = 1;\ \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

4. Der allgemeine und der spezielle lineare Komplex. *Der Komplex* (1) *heißt ein allgemeiner oder spezieller, je nachdem die Konstantenverbindung:*

$$(14)\qquad D = a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34}$$

von Null verschieden oder gleich Null ist (I § 60, 5).

Im ersteren Falle ist daher (bei reellen a_{kl}) stets auch:

$$(15)\qquad E^2 = a^2_{23} + a^2_{31} + a^2_{12}$$

von Null verschieden.

Im letzteren Falle können die Koeffizienten a_{kl} nach (3) selbst als Linienkoordinaten gelten, und die Gleichung (1) wird die Gleichung der Geraden:

$$(16)\qquad q^0_{kl} = a_{kl};\quad p^0_{kl} = a_{\bar{k}\bar{l}}$$

in laufenden Strahlenkoordinaten p_{kl} (I § 60, (8)), wobei k, l und $\bar{k}, \bar{l}$

komplementäre Indizespaare sind, die zusammen alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4 enthalten.

Der spezielle lineare Komplex besteht aus den Treffgeraden der geraden Linie (16), *der Achse des speziellen linearen Komplexes.*

5. Komplexstrahlen, die mit einem Punkt oder einer Ebene vereinigt liegen. Drückt man die Strahlenkoordinaten p_{kl} in (1) durch die Koordinaten x, y, z, t und x', y', z', t' zweier Punkte P und P' oder die Achsenkoordinaten q_{kl} in (2) durch die Koordinaten u, v, w, s und u', v', w', s' zweier Ebenen Π und Π' aus (I § 48, (3'); (3)), so ergibt sich:

Die Verbindungslinie der Punkte P und P' gehört dem Komplex an, wenn:

$$(17)\quad a_{23}(yz'-zy')+a_{31}(zx'-xz')+a_{12}(xy'-yx')+a_{14}(xt'-tx') \\ +a_{24}(yt'-ty')+a_{34}(zt'-tz')=0.$$

Die Schnittlinie der Ebenen Π und Π' gehört dem Komplex an, wenn:

$$(18)\quad a_{14}(vw'-wv')+a_{24}(wu'-uw')+a_{34}(uv'-vu')+a_{23}(us'-su') \\ +a_{31}(vs'-sv')+a_{12}(ws'-sw')=0.$$

Bei festem Punkte $P=x, y, z, t$ stellt die Gleichung (17) den Ort der Punkte x', y', z', t' dar, die, mit P verbunden, eine Linie des Komplexes geben. Dieser Ort ist eine *Ebene*, deren Koordinaten u, v, w, s die Koeffizienten von x', y', z', t' in (17) sind.

Die durch den Punkt $P=x, y, z, t$ gehenden Komplexstrahlen bilden daher einen Strahlbüschel, dessen Ebene Π die Koordinaten hat:

$$(19)\quad \begin{cases} \varrho u = \phantom{-a_{12}x} \quad a_{12}y-a_{31}z+a_{14}t, \\ \varrho v = -a_{12}x \quad\quad +a_{23}z+a_{24}t, \\ \varrho w = \quad a_{31}x-a_{23}y \quad\quad +a_{34}t, \\ \varrho s = -a_{14}x-a_{24}y-a_{34}z, \end{cases}$$

Bei fester Ebene $\Pi=u, v, w, s$ stellt die Gleichung (18) den Ort der Ebenen u', v', w', s' dar, die, mit Π geschnitten, eine Linie des Komplexes geben. Dieser Ort ist ein *Punkt*, dessen Koordinaten x, y, z, t die Koeffizienten von u', v', w', s' in (18) sind.

Die in der Ebene $\Pi=u, v, w, s$ liegenden Komplexstrahlen bilden daher einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt P die Koordinaten hat:

$$(20)\quad \begin{cases} \sigma x = \quad a_{34}v-a_{24}w+a_{23}s, \\ \sigma y = -a_{34}u \quad\quad +a_{14}w+a_{31}s, \\ \sigma z = \quad a_{24}u-a_{14}v \quad\quad +a_{12}s, \\ \sigma t = -a_{23}u-a_{31}v-a_{12}w, \end{cases}$$

wo ϱ und σ Proportionalitätsfaktoren bedeuten.

6. Polarverwandtschaft des allgemeinen linearen Komplexes. Die Determinanten der Gleichungen (19) und (20) sind:

$$(21)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & -a_{31} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{34} & -a_{24} & a_{23} \\ -a_{34} & 0 & a_{14} & a_{31} \\ a_{24} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ -a_{23} & -a_{31} & -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = D^2.$$

Die Determinante aus den Unterdeterminanten dritten Grades (I Anm. 1, III, (7)) der ersten Determinante (21) ist:

$$(22)\quad \begin{vmatrix} 0 & a_{34}D & -a_{24}D & a_{23}D \\ -a_{34}D & 0 & a_{14}D & a_{31}D \\ a_{24}D & -a_{14}D & 0 & a_{12}D \\ -a_{23}D & -a_{31}D & -a_{12}D & 0 \end{vmatrix} = D^6.$$

Für $D \neq 0$ sind daher die Gleichungen (19) eindeutig nach $x : y : z : t$ und (20) ebenso nach $u : v : w : s$ auflösbar, und das eine System ist nach (22) die Auflösung des andern (I Anm. 2, III, (8); (10)).

I. *Durch den allgemeinen linearen Komplex wird jedem Punkt P eine bestimmte Ebene, seine Polarebene, und jeder Ebene Π ein bestimmter Punkt, ihr Pol, zugeordnet* (§ 78, **14**).

II. *Jeder Punkt ist der Pol seiner Polarebene, jede Ebene die Polarebene ihres Pols.*

III. *Zwischen den Koordinaten von Pol und Polarebene bestehen die Gleichungen* (19); (20).

IV. *Alle durch einen Punkt gehenden Komplexstrahlen liegen in seiner Polarebene, alle in einer Ebene liegenden gehen durch ihren Pol.*

Da vermöge (19) oder (20) identisch:

$$(23)\qquad ux + vy + wz + st = 0,$$

so folgt:

V. *Pol und Polarebene liegen stets vereinigt*[174]).

7. Ausartung der Polarverwandtschaft beim speziellen Komplex. Mit $D = 0$ hört die eindeutige Beziehung zwischen Pol und Polarebene auf.

Die Polarebene (19) des Punktes $P = x, y, z, t$ ist (I § 48, (20')) die Verbindungsebene des Punktes mit der Achse (16) des Komplexes.

Alle Punkte einer durch die Achse gehenden Ebene haben dieselbe Polarebene.

Der Pol (20) der Ebene $\Pi = u, v, w, s$ ist (I § 48, (20)) der Schnittpunkt der Ebene mit der Achse (16) des Komplexes.

Alle Ebenen durch einen auf der Achse liegenden Punkt haben denselben Pol.

Die Polarebene (19) eines Punktes P der Achse (16) ist (I § 48, (11)) unbestimmt.

Der Pol (20) einer Ebene Π der Achse (16) ist (I § 48, (12')) unbestimmt.

8. Konjugierte Punkte und Ebenen.

Zwei durch die Bedingung (17) verknüpfte Punkte x, y, z, t und x', y', z', t' sollen *konjugierte* Punkte heißen.

Zwei durch die Bedingung (18) verknüpfte Ebenen u, v, w, s und u', v', w', s' sollen *konjugierte* Ebenen heißen.

Aus der Definition von Pol und Polarebene in **5.** und **6.** folgt dann:

I. *Die Polarebene eines Punktes ist der Ort seiner konjugierten Punkte.*

Der Pol einer Ebene ist der Ort ihrer konjugierten Ebenen.

Ferner aus der Symmetrie der Gleichungen (17) oder (18) in den Koordinaten beider Elemente (§ 68, **13**):

II. *Von zwei konjugierten Punkten liegt jeder in der Polarebene des andern.*

Von zwei konjugierten Ebenen geht jede durch den Pol der andern.

III. *Liegt der Punkt P_2 in der Polarebene Π_1 des Punktes P_1, so geht die Polarebene Π_2 von P_2 durch P_1.*

Geht die Ebene Π_2 durch den Pol P_1 der Ebene Π_1, so liegt der Pol P_2 von Π_2 in Π_1.

9. Reziproke Polaren. Mit derselben Begründung wie in § 68, **15** sprechen wir ferner die Definition aus (Fig. 174):

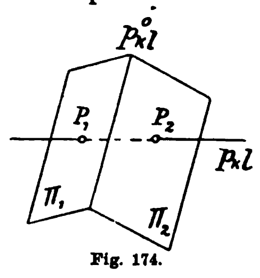


Fig. 174.

I. *Zwei Gerade, von denen jede die Schnittlinie der Polarebenen Π_1, Π_2 zweier Punkte P_1, P_2 der andern oder die Verbindungslinie der Pole zweier Ebenen der andern ist, heißen reziproke Polaren*[166]).

Sind nun x, y, z, t und x', y', z', t' irgend zwei Punkte der Geraden p_{kl} und u, v, w, s und u', v', w', s' ihre Polarebenen, so ist nach (19) für die Achsenkoordinaten q^0_{kl} der Schnittlinie der letzteren (I § 48, (3); (3')):

$$q^0_{23} = vw' - wv' = a^2_{23}(yz' - zy') + a_{23}a_{31}(zx' - xz') + a_{23}a_{12}(xy' - yx')$$
$$- (a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34})(xt' - tx') + a_{23}a_{24}(yt' - ty') + a_{23}a_{34}(zt' - tz')$$

oder mit Rücksicht auf (14):

$$q^0_{23} = a_{23}(a_{23}p_{23} + a_{31}p_{31} + a_{12}p_{12} + a_{14}p_{14} + a_{24}p_{24} + a_{34}p_{34}) - Dp_{14}.$$

Unter Hinzufügung der entsprechenden Formeln und eines Proportionalitätsfaktors ϱ folgt daher mit der Abkürzung (1):

II. *Zwischen den Strahlenkoordinaten p_{kl} und p^0_{kl} von zwei reziproken Polaren gelten die Beziehungen:*

$$(24)\quad \begin{cases} \varrho p_{14}^0 = a_{23}\varphi - Dp_{14}, & \varrho p_{23}^0 = a_{14}\varphi - Dp_{23}, \\ \varrho p_{24}^0 = a_{31}\varphi - Dp_{24}, & \varrho p_{31}^0 = a_{24}\varphi - Dp_{31}, \\ \varrho p_{34}^0 = a_{12}\varphi - Dp_{34}, & \varrho p_{12}^0 = a_{34}\varphi - Dp_{12}. \end{cases}$$

Hiernach ist:

$$\varrho(a_{23}p_{23}^0 + a_{31}p_{31}^0 + a_{12}p_{12}^0 + a_{14}p_{14}^0 + a_{24}p_{24}^0 + a_{34}p_{34}^0)$$
$$= 2(a_{23}a_{14} + a_{31}a_{24} + a_{12}a_{34})\varphi - D(a_{23}p_{23} + \cdots + a_{34}p_{34})$$

oder:

$$(25)\quad \varrho\varphi^0 = D\varphi.$$

Daher folgt aus der ersten Gleichung (24):

$$\varrho Dp_{14}^0 = Da_{23}\varphi - D^2p_{14} = \varrho a_{23}\varphi^0 - D^2p_{14}; \quad \frac{D^2}{\varrho}p_{14} = a_{23}\varphi^0 - Dp_{14}^0.$$

Die Auflösungen der Gleichungen (24) sind daher:

$$(26)\quad \begin{matrix} \sigma p_{14} = a_{23}\varphi^0 - Dp_{14}^0, & \sigma p_{23} = a_{14}\varphi^0 - Dp_{23}^0, \\ \sigma p_{24} = a_{31}\varphi^0 - Dp_{24}^0, & \sigma p_{31} = a_{24}\varphi^0 - Dp_{31}^0, \\ \sigma p_{34} = a_{12}\varphi^0 - Dp_{34}^0, & \sigma p_{12} = a_{34}\varphi^0 - Dp_{12}^0. \end{matrix}$$

Danach *entsprechen sich in der Tat zwei reziproke Polaren wechselseitig eindeutig.*

10. Vereinigte Lage von zwei reziproken Polaren. Aus (24) ergibt sich identisch in den p_{kl}:

$$(27)\quad \varrho(p_{14}^0p_{23} + p_{24}^0p_{31} + p_{34}^0p_{12} + p_{23}^0p_{14} + p_{31}^0p_{24} + p_{12}^0p_{34}) = \varphi^2 - 2DP = \varphi^2.$$

Eine Gerade p_{kl} schneidet daher immer dann und nur dann ihre reziproke Polare, wenn sie dem Komplex $\varphi = 0$ angehört, worauf sie aber nach (24) mit ihrer reziproken Polaren zusammenfällt (§ 68, **21**).

Eine Gerade des Komplexes fällt mit ihrer reziproken Polare zusammen. Eine andere Gerade hat niemals einen Punkt mit ihrer reziproken Polare gemein.

11. Konjugierte Gerade. Ist p_{kl}^0 die reziproke Polare von p_{kl} und p_{kl}' eine beliebige Gerade, so ist nach (24) identisch in p_{kl} und p_{kl}':

$$(28)\quad \varrho(p_{14}^0p_{23}' + p_{24}^0p_{31}' + p_{34}^0p_{12}' + p_{23}^0p_{14}' + p_{31}^0p_{24}' + p_{12}^0p_{34}') = \varphi\varphi' - DS,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(29)\quad S = p_{14}p_{23}' + p_{24}p_{31}' + p_{34}p_{12}' + p_{23}p_{14}' + p_{31}p_{24}' + p_{12}p_{34}'.$$

Die in den Geraden p_{kl} und p_{kl}' *symmetrische* Bedingung:

$$(30)\quad \varphi\varphi' - DS = 0$$

drückt daher aus, daß *die eine Gerade p_{kl}' mit der reziproken Polare p_{kl}^0 der andern Geraden p_{kl} vereinigt liegt.* Zwei solche durch die Gleichung (30) verbundene Gerade heißen *konjugierte Gerade* (§ 68, **31**)[166].

Mit $p'_{kl} = p_{kl}$ ist nach (3) $S = 0$, und (30) reduziert sich auf $\varphi^2 = 0$, also:

Der Komplex ist der Ort der sich selbst konjugierten Geraden.

12. Gemeinsame Transversalen reziproker Polaren. Zwischen zwei reziproken Polaren p und p^0 und einer beliebigen Geraden p' besteht die Identität (28), die wir abgekürzt schreiben:

(31) $$\varrho S^0 = \varphi\varphi' - DS.$$

Ist daher p' eine Komplexgerade ($\varphi' = 0$), die p schneidet ($S = 0$), so schneidet sie nach (31) auch p^0 ($S^0 = 0$).

Ist umgekehrt p' eine Gerade, die eine nicht dem Komplex angehörige Gerade p ($\varphi \neq 0$) und deren reziproke Polare p^0 schneidet, ($S = 0$, $S^0 = 0$), so gehört sie nach (31) dem Komplex an ($\varphi' = 0$). Also:

I. *Jede Komplexgerade, die eine nicht dem Komplex angehörige Gerade schneidet, schneidet auch deren reziproke Polare.*

II. *Alle gemeinsamen Transversalen von zwei getrennten reziproken Polaren sind Komplexgerade.*

§ 87. Durchmesser, Hauptachse und Parameter des linearen Komplexes.

1. Der unendlich ferne Mittelpunkt. Nach § 86, (20) ist der *Pol der unendlich fernen Ebene* $u, v, w, s = 0, 0, 0, 1$ in bezug auf den Komplex § 86, (1) der unendlich ferne Punkt:

(1) $$x : y : z : t = a_{23} : a_{31} : a_{12} : 0.$$

Wir nennen ihn den *Mittelpunkt des Komplexes* (§ 68, **11**, II).

Die Kosinus der *Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt, der „Hauptachsenrichtung" des Komplexes*, sind (I § 47, (14)):

(2) $$\alpha_3 = \frac{a_{23}}{E}, \quad \beta_3 = \frac{a_{31}}{E}, \quad \gamma_3 = \frac{a_{12}}{E},$$

wo E die Bedeutung § 86, (15) mit beliebig gewähltem Vorzeichen hat.

Bei dem *allgemeinen* linearen Komplex ist der Mittelpunkt *stets bestimmt*, bei dem *speziellen* nur dann *nicht*, wenn mit $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$ die Achse § 86, (16) unendlich fern liegt (I § 49, (3)).

2. Durchmesser des Komplexes. Der Pol der Ebene u, v, w, s hat nach § 86, (20) die gemeinen Koordinaten:

(3) $$x = \frac{a_{34}v - a_{24}w + a_{23}s}{-m}, \quad y = \frac{a_{14}w - a_{34}u + a_{31}s}{-m},$$
$$z = \frac{a_{24}u - a_{14}v + a_{12}s}{-m},$$

wo:

(4) $$m = a_{23}u + a_{31}v + a_{12}w.$$

Bei festen Werten von u, v, w und veränderlichem s stellen diese Gleichungen eine gerade Linie dar (I § 43, (2)), deren Richtungskosinus sich verhalten wie $a_{23} : a_{31} : a_{12}$.

Die Pole aller Ebenen eines Büschels von Parallelebenen (I § 42, 3) *erfüllen jedesmal eine Gerade, welche die Hauptachsenrichtung hat.*

Jede solche Gerade soll ein *Durchmesser des Komplexes* heißen[175]).

Jedem Büschel von Parallelebenen (jeder Stellung I § 42, 3) *entspricht ein bestimmter Durchmesser.*

Ausgenommen sind nur die Büschel, für welche in (4) $m = 0$ wird, deren Ebenen also durch den Mittelpunkt (1) gehen (I § 47, (5)). Zu diesen Büscheln gehört kein Durchmesser.

3. Durchmesser als reziproke Polaren. Als Ort der Pole der Ebenen eines Büschels ist der einem Parallelebenenbüschel entsprechende Durchmesser die reziproke Polare der unendlich fernen Achse des Büschels. Diese letztere hat (I § 49, 4) die Strahlenkoordinaten:

$$p_{23} : p_{31} : p_{12} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = u : v : w : 0 : 0 : 0. \tag{5}$$

Ihre reziproke Polare hat also nach § 86, (24) die Koordinaten:

$$\left\{\begin{array}{ll} \varrho p_{23}^0 = a_{14} m - D u, & \varrho p_{14}^0 = a_{23} m, \\ \varrho p_{31}^0 = a_{24} m - D v, & \varrho p_{24}^0 = a_{31} m, \\ \varrho p_{12}^0 = a_{34} m - D w, & \varrho p_{34}^0 = a_{12} m. \end{array}\right. \tag{6}$$

Sie hat also in der Tat (I § 48, (19)) die Richtung (2), wenn nicht $m = 0$ ist. Ist umgekehrt eine beliebige Gerade von der Richtung (2) gegeben, so kann man für sie $p_{14} = a_{23}$, $p_{24} = a_{31}$, $p_{34} = a_{12}$ nehmen, worauf nach § 86, (3) $a_{23} p_{23} + a_{31} p_{31} + a_{12} p_{12} = 0$, also in § 86, (24) $\varphi = D$ wird und damit:

$$p_{14}^0 = 0, \quad p_{24}^0 = 0, \quad p_{34}^0 = 0, \tag{7}$$

also ihre reziproke Polare unendlich fern.

Daher entspricht nicht nur jedem Büschel paralleler Ebenen ein Durchmesser, sondern auch jedem Durchmesser ein Büschel paralleler Ebenen.

4. Die Hauptachse des Komplexes. Wählt man unter den verschiedenen Büscheln paralleler Ebenen denjenigen der *„Hauptebenen“* aus, *die zur gemeinsamen Richtung aller Durchmesser senkrecht stehen,* also die Stellung:

$$u = a_{23}, \quad v = a_{31}, \quad w = a_{12} \tag{8}$$

haben, so bekommt der entsprechende Durchmesser, der dann die *Hauptachse des Komplexes* heißt, nach (6) die Strahlenkoordinaten:

(9) $p_{23}^0 : p_{31}^0 : p_{12}^0 : p_{14}^0 : p_{24}^0 : p_{34}^0 = a_{14} - k a_{23} : a_{24} - k a_{31} : a_{34} - k a_{12} : a_{23} : a_{31} : a_{12}$,
wo:

$$k = \frac{D}{E^2}. \tag{10}$$

In laufenden Punktkoordinaten sind daher (I § 48, (12)) die *Gleichungen der Hauptachse:*

$$\left\{\begin{aligned} a_{12} y - a_{31} z + a_{14} - k a_{23} &= 0, \\ a_{23} z - a_{12} x + a_{24} - k a_{31} &= 0, \\ a_{31} x - a_{23} y + a_{34} - k a_{12} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Die Hauptachse ist die reziproke Polare derjenigen unendlich fernen Linie, durch die alle zu ihr senkrechten Ebenen gehen. Daher *gehören alle Geraden, welche die Achse senkrecht schneiden,* nach § 86, **12**, II *dem Komplex an,* wie auch die aus (9) hervorgehenden Bedingungen:

$$(a_{14} - k a_{23}) p_{14} + (a_{24} - k a_{31}) p_{24} + (a_{34} - k a_{12}) p_{34} + a_{23} p_{23} + a_{31} p_{31} + a_{12} p_{12} = 0,$$
$$a_{23} p_{14} + a_{31} p_{24} + a_{12} p_{34} = 0$$

ersichtlich auf § 86, (1) zurückführen.

5. Kanonische Gleichung des Komplexes. Wir führen jetzt ein schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$ ein, dessen ζ-Achse die Hauptachsenrichtung (2) hat. Dann wird zunächst aus § 86, (7):

$$\left\{\begin{aligned} a'_{23} &= E(\alpha_3 \mathsf{A}_1 + \beta_3 \mathsf{B}_1 + \gamma_3 \Gamma_1) = 0, \\ a'_{31} &= E(\alpha_3 \mathsf{A}_2 + \beta_3 \mathsf{B}_2 + \gamma_3 \Gamma_2) = 0, \\ a'_{12} &= E(\alpha_3 \mathsf{A}_3 + \beta_3 \mathsf{B}_3 + \gamma_3 \Gamma_3) = ES. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Es verschwinden also a'_{23} und a'_{31}. Umgekehrt, wenn a'_{23} und a'_{31} Null sind, so sind nach § 86, (7) die Normalenrichtungen $\mathsf{A}_1 : \mathsf{B}_1 : \Gamma_1$ und $\mathsf{A}_2 : \mathsf{B}_2 : \Gamma_2$ der $\eta\zeta$- und $\zeta\xi$-Ebene (I § 41, (23)) zu der Richtung (2) senkrecht, ist also die ζ-Achse ein Durchmesser. Ferner wird nach § 86, (8) unter Benutzung von (2):

$$\left\{\begin{aligned} a'_{14} &= E(\mathsf{A}_2 x_0 + \mathsf{B}_2 y_0 + \Gamma_2 z_0) + (a_{14}\alpha_1 + a_{24}\beta_1 + a_{34}\gamma_1), \\ a'_{24} &= -E(\mathsf{A}_1 x_0 + \mathsf{B}_1 y_0 + \Gamma_1 z_0) + (a_{14}\alpha_2 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\gamma_2), \\ a'_{34} &= a_{14}\alpha_3 + a_{24}\beta_3 + a_{34}\gamma_3 = \frac{D}{E} = Ek. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Die $\xi\eta$-Ebene hat die Stellung:

$$u = \mathsf{A}_3, \quad v = \mathsf{B}_3, \quad w = \Gamma_3 \qquad \text{(I § 41, (23))}. \tag{14}$$

Für den entsprechenden Durchmesser gelten nach (3), da mit (2) und (14) $m = ES$ wird, die Gleichungen:

$$(15)\quad \begin{cases} ESx + a_{34}B_3 - a_{24}\Gamma_3 + E\alpha_3 s = 0, \\ ESy + a_{14}\Gamma_3 - a_{34}A_3 + E\beta_3 s = 0, \\ ESz + a_{24}A_3 - a_{14}B_3 + E\gamma_3 s = 0. \end{cases}$$

Als Gleichungen dieses Durchmessers folgen, wenn man, um s zu eliminieren, mit A_1, B_1, Γ_1 oder A_2, B_2, Γ_2 multipliziert und addiert (I Anm. 1, II, (5)):

$$(16)\quad \begin{cases} ES(A_1 x + B_1 y + \Gamma_1 z) - S(a_{14}\alpha_2 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\gamma_2) = 0, \\ ES(A_2 x + B_2 y + \Gamma_2 z) + S(a_{14}\alpha_1 + a_{24}\beta_1 + a_{34}\gamma_1) = 0. \end{cases}$$

Die Koeffizienten a'_{14} und a'_{24} in (13) verschwinden daher, wenn der Anfangspunkt $\Omega = x_0, y_0, z_0$ diesen Gleichungen (16) genügt, also die ζ-Achse der der Stellung der $\xi\eta$-Ebene entsprechende Durchmesser ist; also:

Die Gleichung des Komplexes § 86, (1) *erhält in einem schiefwinkligen System $\Omega\xi\eta\zeta$ immer dann und nur dann die Form:*

$$(17)\quad p'_{12} + \frac{k}{S}\, p'_{34} = 0,$$

wenn die ζ-Achse der der Stellung der $\xi\eta$-Ebene entsprechende Durchmesser ist. Dabei hat k den Wert (10) *und ist* (I § 41, (26)):

$$(18)\quad S = \sin \xi\eta\zeta = \sin \overline{\xi\eta} \cdot \sin (\xi\eta, \zeta)$$

der Sinus der Ecke.

6. Hauptachsengleichung. Wählt man als $\xi\eta$-Ebene eine Hauptebene, so wird die ζ-Achse die Hauptachse. Nimmt man außerdem den Winkel $\xi\eta = \frac{\pi}{2}$ und das System $\Omega\xi\eta\zeta$ ebenso wie $Oxyz$ positiv orientiert, so wird $S = 1$ (I § 37, (10)). Also[149]):

In bezug auf ein rechtwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$, dessen ζ-Achse die Hauptachse ist, lautet die Gleichung des Komplexes § 86, (1):

$$(19)\quad p'_{12} + k p'_{34} = 0.$$

Die Konstante k heißt der *Parameter des Komplexes.* Sie hat nach (10) das Vorzeichen von D, so daß nach § 57, **13** *der allgemeine Komplex* § 86, (1) *positiv oder negativ gewunden ist, je nachdem D positiv oder negativ ist.* Seine Gestalt ist die in § 57, **13** beschriebene.

7. Polarentheorie für die Hauptachsengleichung. Die allgemeine Gleichung § 86, (1) nimmt die Form:

$$(20)\quad p_{12} + k p_{34} = 0$$

an, wenn:

$$(21)\quad a_{23} = a_{31} = 0,\ a_{12} = 1,\ a_{14} = a_{24} = 0,\ a_{34} = k;\ E = 1,\ D = k.$$

Daher lauten die Beziehungen § 86, (19); (20) zwischen Pol und Polarebene für die Gleichung (20):

(22) $$u : v : w : s = y : -x : kt : -kz,$$

(23) $$x : y : z : t = kv : -ku : s : -w,$$

und diejenigen § 86, (24) zwischen zwei *reziproken Polaren* in bezug auf den Komplex (20):

(24) $$p_{23}^0 : p_{31}^0 : p_{12}^0 : p_{14}^0 : p_{24}^0 : p_{34}^0 = p_{23} : p_{31} : -kp_{34} : p_{14} : p_{24} : -\frac{p_{12}}{k}.$$

8. Konstruktion der Polarebene. Die *Polarebene* des Punktes x, y, z, 1 hat nach (22) in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung:

(25) $$yX - xY + k(Z - z) = 0.$$

Da nun durch Differentiation der Formeln § 57, (13) nach φ sich ergibt:

$$x'' = -x, \quad y'' = -y, \quad z'' = 0,$$

so hat die *Schmiegungsebene* im Punkte x, y, z irgendeiner der Schraubenlinien § 57, (11) in laufenden Koordinaten X, Y, Z die Gleichung[146]):

$$\frac{hy}{2\pi}(X - x) - \frac{hx}{2\pi}(Y - y) + a^2(Z - z) = 0$$

oder mit Rücksicht auf § 57, (20):

$$yX - xY + k(Z - z) = 0.$$

Die Polarebene Π eines Punktes $P = x, y, z$ des Raumes in bezug auf den Komplex (20) *ist daher die Schmiegungsebene derjenigen Schraubenlinie des Systems* § 57, (21), (22), *die durch den Punkt geht* (Fig. 175)[147]).

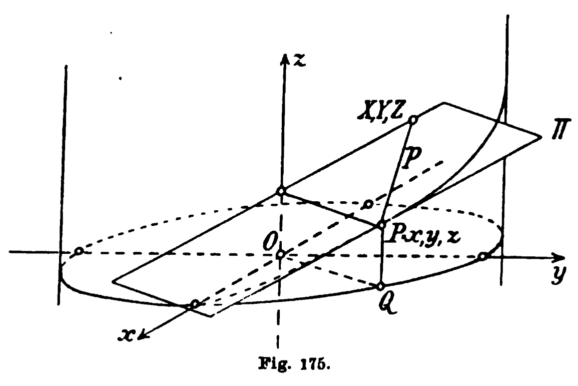


Fig. 175.

Eine Gerade p, die den Punkt x, y, z mit irgendeinem Punkte X, Y, Z dieser Schmiegungsebene verbindet, gehört dem Komplex an.

9. Projektion reziproker Polaren auf eine zur Achse senkrechte Ebene. Die senkrechte Projektion einer Geraden p auf die xy-Ebene ist (I § 48, (12)):

(26) $$p_{24}x - p_{14}y + p_{12} = 0.$$

Die Projektion der reziproken Polaren p^0 ebenso:

$$p^0_{24}x - p^0_{14}y + p^0_{12} = 0. \tag{27}$$

Da aber nach (24):

$$p^0_{24} : -p^0_{14} = p_{24} : -p_{14},$$

so folgt (I § 18, (6))[176]):

Die senkrechten Projektionen von zwei reziproken Polaren des Komplexes auf eine zu seiner Achse senkrechte Ebene sind parallele Gerade.

III. Abschnitt.

Einteilung der Flächen zweiter Ordnung und Klasse.

I. Kapitel.

Das Hauptachsenproblem der Flächen zweiter Ordnung.

§ 88. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten.

1. Begriff der Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten. Wenn die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogene Gleichung:

$$(1) \qquad g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

mittels der Substitution § 66, (16) auf ein neues *recht-* oder *schiefwinkliges* System $\Omega\xi\eta\zeta$ (Fig. 176) transformiert wird, so erhält sie die Form § 66, (18). Dabei hängen die sechs neuen Koeffizienten $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{23}, a'_{31}, a'_{12}$ nach § 66, (19) einerseits nur von den sechs *ersten* Koeffizienten $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$ in (1), andererseits aber *nicht von dem Anfangspunkt* Ω, *sondern lediglich von den Richtungen* $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1;\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2;\ \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *der Achsen* ξ, η, ζ *ab.*

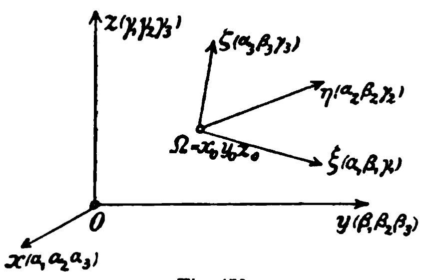


Fig. 176.

Wir nennen nun diese ein *System von Hauptachsenrichtungen* (vgl. weiterhin 5, II) der Fläche (1), wenn sie zueinander *rechtwinklig* stehen, *und die drei Koeffizienten* $a'_{23}, a'_{31}, a'_{12}$ *verschwinden,* so daß die neue Gleichung die Form erhält:

$$(2) \quad g(x, y, z) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0.$$

Die Koeffizienten $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$ sollen alsdann *die zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten* heißen.

2. Bedeutung der Hauptachsenrichtungen in der Polarentheorie. Mit Rücksicht auf die Werte § 66, (19) von $a'_{23}, a'_{31}, a'_{12}$

und die Bedingung § 68, (11) unendlich ferner harmonischer Pole folgt auch[88]):

I. *Ein System von drei Hauptachsenrichtungen besteht aus drei zueinander senkrechten Richtungen, von deren unendlich fernen Punkten jeder harmonischer Pol der beiden andern in bezug auf die Fläche ist;* oder nach § 84, 6, VI′:

II. *Ein System von drei Hauptachsenrichtungen besteht aus drei Richtungen, von deren unendlich fernen Punkten jeder harmonische Pol der beiden andern sowohl in bezug auf die Fläche* (1) *als in bezug auf den imaginären Kugelkreis ist (die ein gemeinsames Polardreieck der unendlich fernen Kurve* § 66, (23) *und des Kugelkreises bilden* (§ 50, 2).

3. Notwendige und hinreichende Bedingungen der Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten. Die Hauptachsenrichtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ haben nach ihrer Erklärung den Gleichungen zu genügen (I § 33, (18); I § 35, (4)):

$$(3)\quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

$$(4)\quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0;$$

$$(5)\quad \begin{cases} a'_{23} = h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_3 + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_3 + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_3 = 0, \\ a'_{31} = h_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\alpha_1 + h_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\beta_1 + h_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\gamma_1 = 0, \\ a'_{12} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Die Hauptachsenkoeffizienten sind alsdann durch die Gleichungen (§ 66, (19)):

$$(6)\quad a'_{11} = h(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \quad a'_{22} = h(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), \quad a'_{33} = h(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

bestimmt.

Die zwölf Gleichungen (3)—(6) *enthalten somit die vollständige Erklärung der zwölf Unbekannten* $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$; $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ *des Hauptachsenproblems.*

Aus (3) und (4) folgen überdies die weiteren Gleichungen (I Anm. 56, (4)):

$$(7)\quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

$$(8)\quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0,$$

da $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Richtungskosinus der Achsen x, y, z gegen $\Omega\xi\eta\zeta$ sind (Fig. 176).

4. Zusammengehörigkeit einer Hauptachsenrichtung und eines Hauptachsenkoeffizienten. Vertauscht man die Richtungen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und zugleich die Koeffizienten a'_{22} und a'_{33}, so ändern sich die Gleichungen (3) und (4) im Ganzen, sowie die ersten Gleichungen (5) und (6) nicht (§ 66, (13)), dagegen vertauschen sich die beiden letzten Gleichungen (5) und ebenso (6) untereinander. Die Gesamtheit der zwölf Gleichungen bleibt also unverändert.

Die zwölf Unbekannten zerfallen daher in drei Gruppen $a'_{11}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $a'_{22}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *und* $a'_{33}, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, *die untereinander vertauschbar sind, während die vier Elemente jeder Gruppe untrennbar zusammengehören.*

5. Notwendige Gleichungen für die einzelnen Gruppen. Wir wiederholen die erste Gleichung (6) und die zweite und dritte (5) in folgender Form (§ 66, (19); (13)):

$$
(9)\qquad \begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1 = a'_{11}, \\ h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2 = 0, \\ h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3 = 0. \end{cases}
$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ oder $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und addiert, so ergibt sich mit Hinblick auf (7) und (8) und mit Hinzufügung der ersten Gleichung (3):

$$
(10)\qquad \begin{cases} h_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = a'_{11}\alpha_1, \\ h_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = a'_{11}\beta_1, \\ h_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = a'_{11}\gamma_1, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1. \end{cases}
$$

Man hat daher vier Gleichungen, die nur die erste Gruppe $a'_{11}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ der Unbekannten enthalten. Durch Buchstabenvertauschung ergibt sich für die beiden anderen Gruppen:

$$
(11)\ \begin{cases} h_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = a'_{22}\alpha_2, \\ h_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = a'_{22}\beta_2, \\ h_3(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = a'_{22}\gamma_2, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1; \end{cases}
\qquad
(12)\ \begin{cases} h_1(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = a'_{33}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = a'_{33}\beta_3, \\ h_3(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = a'_{33}\gamma_3, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1. \end{cases}
$$

I. *Die drei Gruppen von zwölf Unbekannten müssen also beziehungsweise den drei Systemen von je vier Gleichungen* (10), (11), (12) *genügen.*

Ein einzelnes solches System wie (10) hat nach § 68, (3) im allgemeinen (wenn nicht $a'_{11} = 0$ oder h_1, h_2, h_3 identisch 0 sind) die Bedeutung (§ 72, 1, IV):

II. *Jede einzelne Hauptachsenrichtung ist dadurch charakterisiert, daß sie auf der zu ihr konjugierten Ebene senkrecht steht.*

6. Hinreichende Gleichungen für die drei Gruppen. Umgekehrt folgt, ohne daß $\Omega\xi\eta\zeta$ als rechtwinklig vorausgesetzt wird, aus den drei ersten Gleichungen (10) durch Multiplikation mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und Addition mit Rücksicht auf die vierte Gleichung (10):

$$h_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\alpha_1 + h_2(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\beta_1 + h_3(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\gamma_1 = a'_{11},$$

also die erste (6) (§ 66, (12)), und ebenso aus (11) und (12) die beiden anderen Gleichungen (6).

Multipliziert man ferner die drei ersten Gleichungen (11) mit $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und (12) mit $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und addiert, so ergibt sich:

$$(13)\quad \begin{cases} h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_3 + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_3 + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_3 = a'_{22}(\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3), \\ h_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\alpha_2 + h_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\beta_2 + h_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)\gamma_2 = a'_{33}(\alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2). \end{cases}$$

Hieraus aber folgt, da die linken Seiten nach § 66, (13) beide den Ausdruck a'_{23} darstellen, unter der Voraussetzung $a'_{22} \neq a'_{33}$ (I Anm. 2, I, (7)), daß:

$$(14)\qquad a'_{23} = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$

Ebenso würden aus (12) und (10), (10) und (11) die vier anderen Gleichungen (4) und (5) folgen, falls $a'_{33} \neq a'_{11}$ und $a'_{11} \neq a'_{22}$. Die zwölf Gleichungen (10), (11), (12) haben also dann die zwölf Gleichungen (3)—(6) zur Folge.

Ist dagegen $a'_{22} = a'_{33}$, so geht aus (13) nur unter Voraussetzung der zweiten Gleichung (14) die erste (14) hervor.

Die zwölf Gleichungen (10), (11), (12) *sind hinreichende Bedingungen für ein System von Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten, falls diese letzteren, $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}$, alle drei untereinander verschieden ausfallen. Dagegen sind sie für $a'_{22} = a'_{33}$ nur unter Hinzufügung der ersten Gleichung* (4) *und für $a'_{11} = a'_{22} = a'_{33}$ nur unter Hinzufügung aller drei Gleichungen* (4) *hinreichend.*

7. Gleichung für die Hauptachsenkoeffizienten allein. Ausführlich geschrieben, lauten die Gleichungen (10), (11) oder (12) mit $k = 1, 2, 3$:

$$(15)\quad \begin{cases} (a_{11} - a'_{kk})\alpha_k + a_{12}\beta_k + a_{13}\gamma_k = 0, \\ a_{21}\alpha_k + (a_{22} - a'_{kk})\beta_k + a_{23}\gamma_k = 0, \\ a_{31}\alpha_k + a_{32}\beta_k + (a_{33} - a'_{kk})\gamma_k = 0, \\ \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1. \end{cases}$$

Da nach der letzten Gleichung (15) $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ nicht alle verschwinden, folgt aus den drei ersten (I Anm. 2, II, (9)):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - a'_{kk} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - a'_{kk} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a'_{kk} \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Jeder der drei Hauptachsenkoeffizienten a'_{11}, a'_{22}, a'_{33} muß daher der in λ kubischen Gleichung[89]:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

genügen. Sie heißt *die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems* der Fläche (1).

§ 89. Die Wurzeln der kubischen Gleichung.

1. Entwicklung der Determinante $\Delta(\lambda)$. Die Unterdeterminanten der Determinante $\Delta(\lambda)$ in § 88, (17) bezeichnen wir mit:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}, \quad \Delta_{22}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{33} - \lambda & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} - \lambda \end{vmatrix}, \\ \Delta_{33}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}, \\ \Delta_{23}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} - \lambda & a_{12} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} - \lambda & a_{23} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{12}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{33} & a_{21} \\ a_{33} - \lambda & a_{31} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Die drei ersten Differentialquotienten von $\Delta(\lambda)$ nach λ sind:

$$\Delta'(\lambda) = -\Delta_{11}(\lambda) - \Delta_{22}(\lambda) - \Delta_{33}(\lambda), \tag{2}$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta''(\lambda) = (a_{11} - \lambda) + (a_{22} - \lambda) + (a_{33} - \lambda), \tag{3}$$

$$\tfrac{1}{6}\Delta'''(\lambda) = -1. \tag{4}$$

Indem wir (§ 80, (22)) unter Bezugnahme auf die Bezeichnung der Unterdeterminanten der Determinante A in § 66, 6 zur Abkürzung setzen:

$$A'_{44} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad A''_{44} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{5}$$

erhalten wir:

$$\Delta(o) = A_{44}, \quad \Delta'(o) = -A'_{44}, \quad \tfrac{1}{2}\Delta''(o) = A''_{44}. \tag{6}$$

Danach folgt aus der Maclaurinschen Reihe für $\Delta(\lambda)$ die Entwicklung:

$$\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + A''_{44}\lambda^2 - A'_{44}\lambda + A_{44}. \tag{7}$$

2. Die Wurzeln der Hauptunterdeterminanten. Die Gleichung:

$$\Delta_{11}(\lambda) = \lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) = 0 \tag{8}$$

hat zwei reelle Wurzeln (§ 21, (20)):

$$(9)\quad \lambda_1' = \frac{a_{22}+a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{22}-a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2},\quad \lambda_1'' = \frac{a_{22}+a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{22}-a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2},$$

wobei:

$$(10)\qquad \lambda_1' \leqq \lambda_1''.$$

Wir setzen hierüber noch zur Abkürzung:

$$(11)\quad \begin{cases} A_1 = (a_{22}-a_{33})a_{31}a_{12} + a_{23}(a_{31}^2 - a_{12}^2), \\ B_1 = -\frac{a_{22}-a_{33}}{2}(a_{31}^2 - a_{12}^2) + 2a_{23}a_{31}a_{12} \end{cases}$$

und erhalten durch Quadrieren und Addieren:

$$A_1^2 + B_1^2 = \left(\frac{a_{22}-a_{33}}{2}\right)^2 (a_{31}^2 + a_{12}^2)^2 + a_{23}^2(a_{31}^2 + a_{12}^2)^2$$

und daraus weiter:

$$(12)\qquad \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = (a_{31}^2 + a_{12}^2)\sqrt{\left(\frac{a_{22}-a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2}.$$

3. Realität der Wurzeln von $\varDelta(\lambda)$. Die Entwicklung von $\varDelta(\lambda)$ nach den Elementen erster Zeile gibt:

$$(13)\quad \begin{aligned} \varDelta(\lambda) &= (a_{11}-\lambda)\varDelta_{11}(\lambda) + a_{12}\varDelta_{12}(\lambda) + a_{13}\varDelta_{13}(\lambda) \\ &= (a_{11}-\lambda)\varDelta_{11}(\lambda) - a_{31}^2(a_{22}-\lambda) - a_{12}^2(a_{33}-\lambda) + 2a_{23}a_{31}a_{12}. \end{aligned}$$

Daher wird für die erste Wurzel (9) der Gleichung (8):

$$\begin{aligned} \varDelta(\lambda_1') &= -a_{31}^2(a_{22}-\lambda_1') - a_{12}^2(a_{33}-\lambda_1') + 2a_{23}a_{31}a_{12} \\ &= -\frac{a_{22}-a_{33}}{2}(a_{31}^2-a_{12}^2) + 2a_{23}a_{31}a_{12} - (a_{31}^2+a_{12}^2)\sqrt{\left(\frac{a_{22}-a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2} \end{aligned}$$

oder nach (11) und (12):

$$(14)\qquad \varDelta(\lambda_1') = B_1 - \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Ebenso wird für die zweite Wurzel (9):

$$(14')\qquad \varDelta(\lambda_1'') = B_1 + \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Da nun bei allgemeinen Werten der Koeffizienten a_{kl} die hierin auftretende Quadratwurzel größer als der absolute Betrag von B_1 sein muß, so ist $\varDelta(\lambda_1')$ negativ und $\varDelta(\lambda_1'')$ positiv, also mit Rücksicht auf (7):

$$(15)\quad \varDelta(-\infty) > 0,\quad \varDelta(\lambda_1') < 0,\quad \varDelta(\lambda_1'') > 0,\quad \varDelta(+\infty) < 0.$$

Daher hat $\varDelta(\lambda)$ drei reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zwischen den Grenzen:

$$(16)\qquad -\infty < \lambda_1 < \lambda_1' < \lambda_2 < \lambda_1'' < \lambda_3 < +\infty.$$

Die kubische Gleichung $\varDelta(\lambda) = 0$ hat stets drei reelle Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ [89]).

Dies ist auf anderem Wege bereits § 50, 7 bewiesen worden.

4. Beziehung der Wurzeln von $\Delta(\lambda)$ und von $\Delta_{ii}(\lambda)$. Bei allgemeinen Werten der Koeffizienten a_{kl} gelten die Ungleichungen (15) auch für die Wurzeln λ_2', λ_2'' von $\Delta_{22}(\lambda) = 0$ und λ_3', λ_3'' von $\Delta_{33}(\lambda) = 0$, so daß:

$$(17) \qquad \Delta(\lambda_i') < 0, \quad \Delta(\lambda_i'') > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

und wie in (16) folgt:

Die Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ haben gegen die Wurzeln λ_i', λ_i'' der quadratischen Gleichung $\Delta_{ii}(\lambda) = 0$ die Lage:

$$(18) \qquad -\infty < \lambda_1 < \lambda_i' < \lambda_2 < \lambda_i'' < \lambda_3 < +\infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Der Verlauf der Kurven:

$$(19) \qquad \mu = \Delta(\lambda); \quad \mu = \Delta_{ii}(\lambda),$$

bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\Omega\lambda\mu$, ist in Fig. 177 schematisch dargestellt. Aus dieser gehen die weiteren Ungleichungen:

$$(20) \qquad \Delta_{ii}(\lambda_1) > 0, \quad \Delta_{ii}(\lambda_2) < 0, \quad \Delta_{ii}(\lambda_3) > 0$$

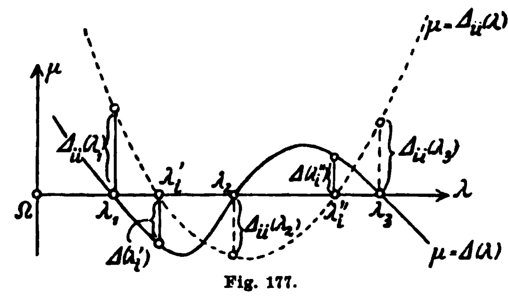


Fig. 177.

hervor, wobei wie in (18) λ_2 *die algebraisch mittlere* Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$, also $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ist.

Bei besonderen Werten der Koeffizienten a_{kl} können die Ungleichheitszeichen in (18) und (20) teilweise in Gleichheitszeichen übergehen.

5. Zweifache Wurzeln der kubischen Gleichung. Wäre für einen Wert λ neben $\Delta(\lambda) = 0$ auch $\Delta_{11}(\lambda) = 0$, $\Delta_{22}(\lambda) = 0$, $\Delta_{33}(\lambda) = 0$, so wäre nach (2) $\Delta'(\lambda) = 0$, also λ eine Doppelwurzel, also:

I. *Für eine einfache Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ können niemals alle drei Hauptunterdeterminanten $\Delta_{11}(\lambda)$, $\Delta_{22}(\lambda)$, $\Delta_{33}(\lambda)$ gleichzeitig verschwinden.*

Infolge des § 19, (7) abgeleiteten Determinantensatzes ist nun mit Rücksicht auf (2); (3) *identisch in λ* (§ 50, (25)):

$$(21) \qquad \Delta'^2(\lambda) = \Delta_{11}^2(\lambda) + \Delta_{22}^2(\lambda) + \Delta_{33}^2(\lambda) \\ + 2\Delta_{23}^2(\lambda) + 2\Delta_{31}^2(\lambda) + 2\Delta_{12}^2(\lambda) + \Delta(\lambda)\Delta''(\lambda).$$

Bei reellem λ folgt daher aus:

$$(22) \qquad \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta'(\lambda) = 0$$

stets:

$$(23) \qquad \begin{matrix} \Delta_{11}(\lambda) = 0, & \Delta_{22}(\lambda) = 0, & \Delta_{33}(\lambda) = 0, \\ \Delta_{23}(\lambda) = 0, & \Delta_{31}(\lambda) = 0, & \Delta_{12}(\lambda) = 0. \end{matrix}$$

Da aber die Gleichungen (22) für eine zweifache Wurzel λ bestehen, die als solche stets reell ist, so ergibt sich:

II. *Für eine zweifache Wurzel der Gleichung* $\Delta(\lambda) = 0$ *verschwinden alle Unterdeterminanten* $\Delta_{kl}(\lambda)$.

Genügt umgekehrt eine Größe λ den sechs Gleichungen (23), so genügt sie nach (2) und (13) auch den beiden Gleichungen (22).

III. *Wenn für eine Größe* λ *alle Unterdeterminanten* $\Delta_{kl}(\lambda)$ *verschwinden, so ist sie eine (mindestens) zweifache Wurzel von* $\Delta(\lambda) = 0$.

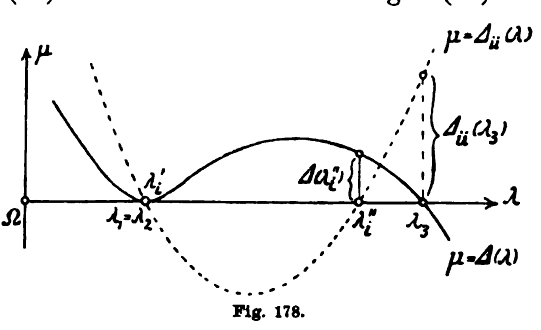


Fig. 178.

Da nach (18) λ_1 und λ_3 durch λ_2 getrennt sind, so können nur mit $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $\lambda_2 = \lambda_3$ zweifache Wurzeln entstehen. Nach (18) und (20) wird dann (Fig. 178) in diesen zwei Fällen bezüglich:

(24) $$\lambda_1 = \lambda_i' = \lambda_2, \quad \Delta_{ii}(\lambda_3) > 0$$

oder:

(24') $$\lambda_2 = \lambda_i'' = \lambda_3, \quad \Delta_{ii}(\lambda_1) > 0.$$

6. Dreifache Wurzeln der kubischen Gleichung. Wäre für einen Wert λ neben $\Delta(\lambda) = 0$ und $\Delta'(\lambda) = 0$ auch $a_{11} - \lambda = 0$, $a_{22} - \lambda = 0$, $a_{33} - \lambda = 0$, so wäre nach (3) $\Delta''(\lambda) = 0$, also λ eine dreifache Wurzel.

IV. *Für eine zweifache Wurzel der Gleichung* $\Delta(\lambda) = 0$ *können niemals alle drei Hauptelemente* $a_{11} - \lambda$, $a_{22} - \lambda$, $a_{33} - \lambda$ *gleichzeitig verschwinden.*

Infolge des § 19, (23) abgeleiteten Determinantensatzes ist nun mit Rücksicht auf (2), (3) identisch in λ (§ 50, (25)):

(25) $$\tfrac{1}{4}\Delta''^2(\lambda) = (a_{11} - \lambda)^2 + (a_{22} - \lambda)^2 + (a_{33} - \lambda)^2 + 2a_{23}^2 + 2a_{31}^2 + 2a_{12}^2 - 2\Delta'(\lambda).$$

Bei reellem λ folgt daher aus:

(26) $$\Delta'(\lambda) = 0, \quad \Delta''(\lambda) = 0$$

stets:

(27) $$a_{11} - \lambda = 0,\ a_{22} - \lambda = 0,\ a_{33} - \lambda = 0,\ a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,\ a_{12} = 0.$$

Da aber für eine dreifache Wurzel λ neben $\Delta(\lambda) = 0$ die Gleichungen (26) bestehen, so ergibt sich:

V. *Für eine dreifache Wurzel der Gleichung* $\Delta(\lambda) = 0$ *verschwinden alle Elemente der Determinante* $\Delta(\lambda)$.

Aus (27) folgen als notwendige Bedingungen einer dreifachen Wurzel:

$$(28) \qquad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{23} = 0,\ a_{31} = 0,\ a_{12} = 0,$$

die man nach § 88, (17) als hinreichend erkennt.

VI. *Die Bedingungen* (28) *sind für eine dreifache Wurzel der Gleichung* $\Delta(\lambda) = 0$ *notwendig und hinreichend.*

Die dreifache Wurzel selbst ist dann:

$$(29) \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

7. Notwendige und hinreichende Bedingungen für eine zweifache Wurzel. Die Bedingungen (23) einer zweifachen Wurzel sind nicht unabhängig voneinander. Die Auswahl einer hinreichenden Anzahl unabhängiger unter ihnen ist aber bei verschiedenen Voraussetzungen verschieden.

Für die Determinante $\Delta(\lambda)$ ist unbedingt und identisch in λ (I Anm. 1, II, (6)):

$$(30) \qquad \begin{cases} a_{31}\Delta_{11}(\lambda) + a_{32}\Delta_{12}(\lambda) + (a_{33} - \lambda)\Delta_{13}(\lambda) = 0, \\ a_{21}\Delta_{11}(\lambda) + (a_{22} - \lambda)\Delta_{12}(\lambda) + a_{23}\Delta_{13}(\lambda) = 0, \\ (a_{11} - \lambda)\Delta_{21}(\lambda) + a_{12}\Delta_{22}(\lambda) + a_{13}\Delta_{23}(\lambda) = 0, \\ a_{31}\Delta_{21}(\lambda) + a_{32}\Delta_{22}(\lambda) + (a_{33} - \lambda)\Delta_{23}(\lambda) = 0, \\ a_{21}\Delta_{31}(\lambda) + (a_{22} - \lambda)\Delta_{32}(\lambda) + a_{23}\Delta_{33}(\lambda) = 0, \\ (a_{11} - \lambda)\Delta_{31}(\lambda) + a_{12}\Delta_{32}(\lambda) + a_{13}\Delta_{33}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Demnach ist unter der Voraussetzung der drei *letzten* Gleichungen (23), nämlich:

$$(31) \qquad \Delta_{23}(\lambda) = 0, \quad \Delta_{31}(\lambda) = 0, \quad \Delta_{12}(\lambda) = 0,$$

nach (30):

$$(32) \qquad \begin{cases} a_{31}\Delta_{11}(\lambda) = 0, \quad a_{12}\Delta_{22}(\lambda) = 0, \quad a_{23}\Delta_{33}(\lambda) = 0, \\ a_{21}\Delta_{11}(\lambda) = 0, \quad a_{32}\Delta_{22}(\lambda) = 0, \quad a_{13}\Delta_{33}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen aber, falls $a_{23} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$ ist, die drei *ersten* Gleichungen (23):

$$(33) \qquad \Delta_{11}(\lambda) = 0, \quad \Delta_{22}(\lambda) = 0, \quad \Delta_{33}(\lambda) = 0.$$

I. *Ist* $a_{23} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, *so sind die drei Bedingungen* (31), *oder nach* (1) *entwickelt* (§ 66, 6):

$$(34) \qquad \alpha_{23} + a_{23}\lambda = 0, \quad \alpha_{31} + a_{31}\lambda = 0, \quad \alpha_{12} + a_{12}\lambda = 0,$$

oder mit Elimination von λ:

$$(35) \qquad \alpha_{23} : \alpha_{31} : \alpha_{12} = a_{23} : a_{31} : a_{12},$$

für eine zweifache Wurzel hinreichend[89]).

Ist ferner $a_{23} = 0$, $a_{31} \neq 0$, $a_{12} \neq 0$, so ist nach (1):

$$\Delta_{23}(\lambda) = a_{31} a_{12} \neq 0,$$

also eine der notwendigen Bedingungen (23) nicht erfüllt.

II. *Ist einer und nur einer der drei Koeffizienten a_{23}, a_{31}, a_{12} Null, so ist keine zweifache Wurzel möglich.*

Ist weiter $a_{23} \neq 0$, $a_{31} = 0$, $a_{12} = 0$, so folgen aus (31) mittels (32) nur die zwei letzten Gleichungen (33), so daß erst mit Hinzunahme von $\Delta_{11}(\lambda) = 0$ alle Gleichungen (23) hervorgehen. Da indessen die beiden letzten Gleichungen (31) in diesem Falle nach (1) von selbst erfüllt sind, so folgt:

III. *Ist nur einer der drei Koeffizienten a_{23}, a_{31}, a_{12} nicht Null, etwa $a_{23} \neq 0$, $a_{31} = 0$, $a_{12} = 0$, so sind die Bedingungen:*

$$\Delta_{11}(\lambda) = 0, \quad \Delta_{23}(\lambda) = 0,$$

oder nach (1) *entwickelt:*

$$(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) - a_{23}^2 = 0, \quad a_{11} - \lambda = 0,$$

oder mit Elimination von λ:

$$(a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33}) - a_{23}^2 = 0, \tag{36}$$

ür eine zweifache Wurzel hinreichend.

Ist endlich $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, so sind die drei letzten Gleichungen (23) erfüllt, und die drei ersten lauten:

$$(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = 0, \quad (a_{33} - \lambda)(a_{11} - \lambda) = 0, \quad (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) = 0.$$

IV. *Sind die drei Koeffizienten a_{23}, a_{31}, a_{12} alle Null, so ist für eine zweifache Wurzel hinreichend, daß zwei von den Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33} gleich sind.*

8. Verschwindende Wurzeln der kubischen Gleichung. Für die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ ist nach (7):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= A''_{44}, \\ \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 &= A'_{44}, \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 &= A_{44}. \end{aligned} \tag{37}$$

Daher sind für:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{44} \neq 0\text{: alle drei Wurzeln } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \\ \quad \text{von Null verschieden und ihr Produkt } A_{44}; \\ A_{44} = 0,\ \ A'_{44} \neq 0\text{: eine Wurzel Null,} \\ \quad \text{zwei von Null verschieden und ihr Produkt } A_{44}; \\ A_{44} = 0,\ \ A'_{44} = 0,\ \ A''_{44} \neq 0\text{: zwei Wurzeln Null,} \\ \quad \text{eine von Null verschieden und gleich } A''_{44}. \end{array} \right. \tag{38}$$

Soll an der algebraischen Größenfolge $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, wie in (18), festgehalten werden, würden im zweiten Fall die Möglichkeiten: $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 < \lambda_3$, $\lambda_1 < \lambda_2 = 0 < \lambda_3$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 = 0$ und im dritten die Möglichkeiten: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 < \lambda_3$, $\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ vorliegen.

9. Positive und negative Wurzeln. Ist $A_{44} \neq 0$, so folgt aus der dritten Gleichung (37), daß die Vorzeichen der Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die folgenden sein müssen:

$$\text{(39)} \qquad \begin{cases} \text{für } A_{44} > 0: +++ \text{ oder } --+, \\ \text{für } A_{44} < 0: -++ \text{ oder } ---. \end{cases}$$

Zur weiteren Unterscheidung dient die Regel von *Descartes:* Wenn alle Wurzeln einer Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ reell sind, so hat sie so viel positive Wurzeln, als Zeichenwechsel in $\Delta(\lambda)$, und so viel negative Wurzeln, als Zeichenwechsel in $\Delta(-\lambda)$ vorkommen[131]).

Nun ist hier:

$$\Delta(\lambda) = -\lambda^3 + A''_{44}\lambda^2 - A'_{44}\lambda + A_{44},$$
$$\Delta(-\lambda) = \lambda^3 + A''_{44}\lambda^2 + A'_{44}\lambda + A_{44}.$$

Daher sind drei Zeichenwechsel von $\Delta(\lambda)$, also drei positive Wurzeln vorhanden für:

$$\text{(40)} \qquad A''_{44} > 0, \quad A'_{44} > 0, \quad A_{44} > 0$$

und drei Zeichenwechsel von $\Delta(-\lambda)$, also drei negative Wurzeln für:

$$\text{(40')} \qquad A''_{44} < 0, \quad A'_{44} > 0, \quad A_{44} < 0.$$

Beide Bedingungen (40) und (40') laufen darin zusammen, daß *für:*

$$\text{(41)} \qquad A'_{44} > 0, \quad A_{44}A''_{44} > 0$$

(mit Ausschluß der Gleichheit) *alle drei Wurzeln einerlei Zeichen haben.*

Durch Verbindung von (39) und (41) aber folgt:

Die Vorzeichen der drei Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ bestimmen sich für $A_{44} \neq 0$ aus folgender Tabelle:

(42)

$A_{44} \neq 0$	$A_{44} > 0$	$A_{44} < 0$
$A_{44}A''_{44} > 0,\ A'_{44} > 0$	$+++$	$---$
$A_{44}A''_{44},\ A'_{44}$ nicht beide > 0	$--+$	$-++$

Für $A_{44} = 0$, $A'_{44} \neq 0$ haben die beiden nicht verschwindenden Wurzeln die Vorzeichen (§ 21, (25)):

$$\text{(43)} \qquad \begin{aligned} &A'_{44} > 0, \quad A''_{44} > 0: ++; \\ &A'_{44} > 0, \quad A''_{44} < 0: --; \\ &A'_{44} < 0: +-. \end{aligned}$$

§ 90. Anzahl und Bestimmung der Hauptachsenrichtungen.

1. Die zu einer Wurzel der kubischen Gleichung gehörige Hauptachsenrichtung. Jeder Hauptachsenkoeffizient a'_{kk} ist nach § 88, (16) eine Wurzel λ_k der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$. Die zu ihm und damit *zu der Wurzel* λ_k *gehörige Hauptachsenrichtung* $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ muß dann nach § 88, (15) den Gleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)\alpha_k + a_{12}\beta_k + a_{13}\gamma_k = 0, \\ a_{21}\alpha_k + (a_{22} - \lambda_k)\beta_k + a_{23}\gamma_k = 0, \\ a_{31}\alpha_k + a_{32}\beta_k + (a_{33} - \lambda_k)\gamma_k = 0, \end{cases}$$

die *wegen* $\Delta(\lambda_k) = 0$ *miteinander verträglich* sind, und der Gleichung:

$$(2) \qquad \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \gamma_k^2 = 1$$

genügen.

2. Die zu einer einfachen Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung. Ist nun λ_k eine einfache Wurzel, für die nach § 89, 5, I niemals alle Unterdeterminanten von $\Delta(\lambda)$ verschwinden, so geben die Gleichungen (1) für die Verhältnisse der zugehörigen Richtungskosinus (I Anm. 2, II, (10)) in:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \alpha_k : \beta_k : \gamma_k &= \Delta_{11}(\lambda_k) : \Delta_{12}(\lambda_k) : \Delta_{13}(\lambda_k) \\ &= \Delta_{21}(\lambda_k) : \Delta_{22}(\lambda_k) : \Delta_{23}(\lambda_k) \\ &= \Delta_{31}(\lambda_k) : \Delta_{32}(\lambda_k) : \Delta_{33}(\lambda_k) \end{aligned}$$

stets ein und nur ein bestimmtes Wertsystem. Mit diesem ist zuzüglich der Formel (2) die zugehörige Hauptachsenrichtung selbst, abgesehen von der Pfeilspitze, bestimmt (I § 33, 8).

Zu einer einfachen Wurzel λ_k *gehört stets eine und nur eine den Gleichungen* (1) *und* (2) *entsprechende Hauptachsenrichtung.*

Aus (3) folgt, wenn man die linke Seite der Proportion für die erste Zeile mit α_k multipliziert und einen Proportionalitätsfaktor einführt[121]):

$$\varrho_1\alpha_k^2 = \Delta_{11}(\lambda_k), \quad \varrho_1\alpha_k\beta_k = \Delta_{12}(\lambda_k), \quad \varrho_1\alpha_k\gamma_k = \Delta_{13}(\lambda_k),$$

und ebenso, wenn man für die zweite Zeile mit β_k multipliziert:

$$\varrho_2\alpha_k\beta_k = \Delta_{21}(\lambda_k), \quad \varrho_2\beta_k^2 = \Delta_{22}(\lambda_k), \quad \varrho_2\beta_k\gamma_k = \Delta_{23}(\lambda_k).$$

Hiernach ist aber wegen $\Delta_{12}(\lambda_k) = \Delta_{21}(\lambda_k)$ auch $\varrho_1 = \varrho_2$. *Somit kann man an Stelle von* (3) *auch schreiben:*

$$(4) \qquad \begin{cases} \varrho\alpha_k^2 = \Delta_{11}(\lambda_k), & \varrho\beta_k^2 = \Delta_{22}(\lambda_k), & \varrho\gamma_k^2 = \Delta_{33}(\lambda_k), \\ \varrho\beta_k\gamma_k = \Delta_{23}(\lambda_k), & \varrho\gamma_k\alpha_k = \Delta_{31}(\lambda_k), & \varrho\alpha_k\beta_k = \Delta_{12}(\lambda_k), \end{cases}$$

wo nunmehr nach (2) und § 89, (2):

$$(5) \qquad \varrho = -\Delta'(\lambda_k).$$

3. Fall von drei einfachen Wurzeln. Sind nun alle drei Wurzeln λ_k einfache Wurzeln, so gehört zu jeder von ihnen eine bestimmte Hauptachsenrichtung $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, die den Gleichungen (1), (2) entspricht. Die drei Gruppen ($k = 1, 2, 3$) von je vier Größen $a'_{kk} = \lambda_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ genügen also den Gleichungen § 88, (15), bezüglich § 88, (10) — (12), die, weil die λ_k alle drei verschieden sind, nach § 88, 6 für ein System von Hauptachsenrichtungen und zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten hinreichend sind.

Hat die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ drei verschiedene Wurzeln λ_k $(k = 1, 2, 3)$, so gibt es stets ein und nur ein System von drei zueinander senkrechten Hauptachsenrichtungen $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ der Fläche mit den zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten $a'_{kk} = \lambda_k$.

Wie die drei Wurzeln λ_k, so sind die drei Gruppen $a'_{kk}, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ nach § 88, 4 vertauschbar und können beliebig auf die Koordinatenachsen ξ, η, ζ von § 88, 1 verteilt werden, etwa nach der algebraischen Größenfolge von $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

4. Die zu einer zweifachen Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung. Ist $\lambda_2 = \lambda_3$ eine zweifache Wurzel, so daß für sie nach § 89, 5, II; 6, IV alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle Elemente $a_{kk} - \lambda$, $a_{kl} (k \neq l)$ verschwinden, so wird die entsprechende Hauptachsenrichtung (1), mit $k = 2$ oder 3, einfach unbestimmt. Die Gleichungen (1) besagen dann, indem sie alle drei gleichbedeutend werden, nur, daß die Richtung $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ zu der Richtung:

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = a_{11} - \lambda_2 : a_{12} : a_{13} \\ \qquad\qquad\;\; = a_{21} : a_{22} - \lambda_2 : a_{23} \\ \qquad\qquad\;\; = a_{31} : a_{32} : a_{33} - \lambda_2 \end{cases}$$

senkrecht steht.

Zu einer zweifachen Wurzel $\lambda_2 = \lambda_3$ gehören ∞^1 Hauptachsenrichtungen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ oder $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, die zu der Richtung (6) senkrecht sind.

5. Fall einer einfachen und einer zweifachen Wurzel. Ist nun λ_1 eine einfache und $\lambda_2 = \lambda_3$ eine zweifache Wurzel, so gehört zu λ_1 nach (3) eine bestimmte Hauptachsenrichtung:

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \Delta_{11}(\lambda_1) : \Delta_{12}(\lambda_1) : \Delta_{13}(\lambda_1), \\ \qquad\qquad\;\; = \Delta_{21}(\lambda_1) : \Delta_{22}(\lambda_1) : \Delta_{23}(\lambda_1), \\ \qquad\qquad\;\; = \Delta_{31}(\lambda_1) : \Delta_{32}(\lambda_1) : \Delta_{33}(\lambda_1), \end{cases}$$

zu $\lambda_2 = \lambda_3$ aber ∞^1 zu der Richtung (6) senkrechte Hauptachsenrichtungen. Wählt man unter diesen irgend zwei rechtwinklige $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ aus, fügt also noch die Bedingung:

$$(8) \qquad \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0$$

hinzu, so genügen die drei Größengruppen $a'_{11} = \lambda_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $a'_{22} = \lambda_2$, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $a'_{33} = \lambda_3 = \lambda_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ den Gleichungen § 88, (15), bezüglich (10) — (12), die nach § 88, **6** bei Hinzunahme von (8) für ein System von drei zueinander senkrechten Hauptachsenrichtungen hinreichend sind.

Die Hauptachsenrichtung (7) muß daher auch mit der Richtung (6), auf der die zwei andern Hauptachsenrichtungen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ senkrecht stehen, zusammenfallen, was wir schon durch die gleiche Bezeichnung $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ vorweggenommen haben. Also:

Ist λ_1 eine einfache und $\lambda_2 = \lambda_3$ eine zweifache Wurzel von $\Delta(\lambda) = 0$, so ist:

$$(9)\quad \begin{cases} \Delta_{11}(\lambda_1) : \Delta_{12}(\lambda_1) : \Delta_{13}(\lambda_1) = \Delta_{21}(\lambda_1) : \Delta_{22}(\lambda_1) : \Delta_{23}(\lambda_1) = \\ \qquad\qquad \Delta_{31}(\lambda_1) : \Delta_{32}(\lambda_1) : \Delta_{33}(\lambda_1) \\ = a_{11} - \lambda_2 : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} - \lambda_2 : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} - \lambda_2. \end{cases}$$

Hat die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine einfache λ_1 und zweifache Wurzel $\lambda_2 = \lambda_3$, so gibt es ∞^1 Systeme von Hauptachsenrichtungen der Fläche, nämlich eine bestimmte Hauptachsenrichtung (7) *oder* (6) *und zwei beliebige zu ihr und zueinander senkrechte Richtungen. Zu jener gehört der Hauptachsenkoeffizient λ_1, zu diesen je $\lambda_2 = \lambda_3$.*

6. Fall von drei gleichen Wurzeln. Ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ eine dreifache Wurzel, so werden mit Rücksicht auf § 89, (27) die Gleichungen (1) für $k = 1, 2, 3$ identisch erfüllt. Die Gleichungen § 88, (10) — (12) sind daher nach § 88, **6** erst unter Hinzunahme der drei Bedingungen § 88, (4) hinreichend.

Hat die kubische Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ eine dreifache Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so gibt es ∞^3 Systeme von Hauptachsenrichtungen der Fläche, nämlich irgend drei zueinander senkrechte Richtungen, und zu jeder gehört der Hauptachsenkoeffizient $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

7. Gesamtergebnis der Hauptachsentransformation. Aus den vorstehenden Entwicklungen geht schließlich hervor:

Die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem Oxyz bezogene Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung:

$$(10)\quad g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

nimmt durch die Transformation:

$$(11)\quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y = y_0 + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = z_0 + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \end{cases}$$

auf ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$, dessen Achsen ξ, η, ζ bei beliebigem Anfangspunkt $\Omega = x_0, y_0, z_0$ die stets vorhandenen Hauptachsenrichtungen der Fläche haben, folgende Formen an (§ 21, 13):

1. Für $A_{44} \neq 0$:

$$(12)\quad g(x, y, z) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die *nicht verschwindenden* Wurzeln der Gleichung: $\Delta(\lambda) = 0$ in § 89, (7) $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = A_{44})$ sind.

a) Die Hauptachsenrichtungen ξ, η, ζ sind für drei *ungleiche* Wurzeln $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ *eindeutig* bestimmt, und zwar ist nach (3):

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \Delta_{k1}(\lambda_1) : \Delta_{k2}(\lambda_1) : \Delta_{k3}(\lambda_1), \\ \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = \Delta_{k1}(\lambda_2) : \Delta_{k2}(\lambda_2) : \Delta_{k3}(\lambda_2), \\ \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \Delta_{k1}(\lambda_3) : \Delta_{k2}(\lambda_3) : \Delta_{k3}(\lambda_3), \quad (k = 1, 2, 3). \end{cases}$$

b) für $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ ist ξ *eindeutig bestimmt* und das Paar η, ζ *einfach unbestimmt* (in der $\eta\zeta$-Ebene drehbar), und zwar ist:

$$(14)\quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \Delta_{k1}(\lambda_1) : \Delta_{k2}(\lambda_1) : \Delta_{k3}(\lambda_1),$$

$$(15)\quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_2)\alpha_i + a_{12}\beta_i + a_{13}\gamma_i = 0, \\ a_{21}\alpha_i + (a_{22} - \lambda_2)\beta_i + a_{23}\gamma_i = 0, \\ a_{31}\alpha_i + a_{32}\beta_i + (a_{33} - \lambda_2)\gamma_i = 0, \end{cases}$$

$$(16)\quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0,$$

mit $i = 2, 3$, und gilt gleichzeitig die Formel (9).

c) für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ist das System ξ, η, ζ *dreifach unbestimmt* (um Ω drehbar) und dabei:

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

2. Für $A_{44} = 0$, $A'_{44} \neq 0$:

$$(18)\quad g(x, y, z) = \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0,$$

wo λ_2 und λ_3 die *nicht verschwindenden* Wurzeln der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ $(\lambda_2 \lambda_3 = A'_{44})$ sind.

a) Die Hauptachsenrichtungen ξ, η, ζ sind für $\lambda_2 \neq \lambda_3$ *eindeutig* bestimmt, und zwar aus (13) mit $\lambda_1 = 0$ in der ersten Zeile.

b) für $\lambda_2 = \lambda_3$ ist ξ *eindeutig* bestimmt, und zwar durch (14) mit $\lambda_1 = 0$, wobei auch Formel (9) mit $\lambda_1 = 0$ gilt, dagegen ist das Paar η, ζ *einfach unbestimmt* (in der $\eta\zeta$-Ebene drehbar) und entspricht den Formeln (15) und (16).

3. Für $A_{44}=0,\ A'_{44}=0,\ A''_{44}\neq 0$:

$$(19)\qquad g(x,y,z)=\lambda_1\xi^2+2a'_{14}\xi+2a'_{24}\eta+2a'_{34}\zeta+a'_{44}=0,$$

wo $\lambda_1=A''_{44}$ die einzige nicht verschwindende Wurzel der Gleichung $\Delta(\lambda)$ ist.

Die Hauptachsenrichtung ξ *ist eindeutig bestimmt*, und zwar durch (14), das Paar η,ζ *aber bleibt einfach unbestimmt* (in der $\eta\zeta$-Ebene drehbar), und zwar entspricht es den Gleichungen (15) und (16) mit $\lambda_2=0$.

4. Für $A_{44}=0,\ A'_{44}=0,\ A''_{44}=0$:

$$(20)\qquad g(x,y,z)=2a'_{14}\xi+2a'_{24}\eta+2a'_{34}\zeta+a'_{44}=0.$$

Es sind weder Hauptachsenrichtungen noch Hauptachsenkoeffizienten mehr vorhanden.

Auf die *algebraische Größenfolge* der Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (§ 89, (18)) ist in dieser Tabelle keine Rücksicht genommen.

§ 91. Invarianten der Fläche zweiter Ordnung im gemeinen Koordinatensystem.

1. Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinkligen System. Transformiert man die auf ein *rechtwinkliges* System $Oxyz$ bezogene Gleichung der Kurve zweiter Ordnung:

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x,y,z,t)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy\\ +2a_{14}xt+2a_{24}yt+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0\end{aligned}$$

durch die Substitution (I § 37, (13); (16)):

$$(2)\begin{cases} x=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z'+x_0t',\\ y=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z'+y_0t',\\ z=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z'+z_0t',\\ t=\qquad\qquad\qquad\qquad t',\end{cases}\qquad (3)\begin{cases} Sx'=\mathrm{A}_1x+\mathrm{B}_1y+\Gamma_1z+Sx_0't,\\ Sy'=\mathrm{A}_2x+\mathrm{B}_2y+\Gamma_2z+Sy_0't,\\ Sz'=\mathrm{A}_3x+\mathrm{B}_3y+\Gamma_3z+Sz_0't,\\ St'=\qquad\qquad\qquad\qquad St\end{cases}$$

auf ein beliebiges *schiefwinkliges* System $O'x'y'z'$, so haben die Koeffizienten der neuen Gleichung:

$$(4)\qquad \begin{aligned} f(x,y,z,t)=a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{33}z'^2+2a'_{23}y'z'+2a'_{31}z'x'\\ +2a'_{12}x'y'+2a'_{14}x't'+2a'_{24}y't'+2a'_{34}z't'+a'_{44}t'^2=0\end{aligned}$$

die Werte § 66, (19)—(21). Gleichzeitig finden die Beziehungen § 75, (8)—(10) statt, so daß für die Substitutionsdeterminante die doppelte Darstellung gilt:

$$(5)\quad S=\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1&0\\ \alpha_2&\beta_2&\gamma_2&0\\ \alpha_3&\beta_3&\gamma_3&0\\ x_0&y_0&z_0&1\end{vmatrix},\qquad (6)\quad S=\sin x'y'z'=\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1&\gamma_1\\ \alpha_2&\beta_2&\gamma_2\\ \alpha_3&\beta_3&\gamma_3\end{vmatrix}.$$

2. Zwei Determinanten als Invarianten. Nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I Anm. 1, V, 3) ist unter Benutzung des Wertes (5) von S und mit Rücksicht auf die Werte § 66, (11); (14); (8):

$$S\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) & h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) & h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) & h_4(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \\ h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2) & h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2) & h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2) & h_4(\alpha_2\beta_2\gamma_2) \\ h_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3) & h_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3) & h_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3) & h_4(\alpha_3\beta_3\gamma_3) \\ g_1(x_0y_0z_0) & g_2(x_0y_0z_0) & g_3(x_0y_0z_0) & g_4(x_0y_0z_0) \end{vmatrix}$$

und abermals nach demselben Multiplikationstheorem und § 66, (19)—(20); (9):

$$(7)\qquad S^2\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{vmatrix}.$$

Ebenso folgt nach dem Multiplikationstheorem (I Anm. 1, V, 2) unter Benutzung des Wertes (6) von S:

$$S\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) & h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) & h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) \\ h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2) & h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2) & h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2) \\ h_1(\alpha_3\beta_3\gamma_3) & h_2(\alpha_3\beta_3\gamma_3) & h_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3) \end{vmatrix}$$

und weiter:

$$(8)\qquad S^2\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem schiefwinkligen $O'x'y'z'$ bestehen zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen (1) *und* (4) *die Beziehungen* (7) *und* (8).

3. Kugel und Fläche zweiter Ordnung. Die Gleichung der um den Punkt $O' = x_0, y_0, z_0$ beschriebenen Kugel vom Radius r:

$$(9)\qquad k(x, y, z, t) = (x - x_0t)^2 + (y - y_0t)^2 + (z - z_0t)^2 - r^2t^2 = 0$$

lautet in dem schiefwinkligen System $O'x'y'z'$ nach (2):

$$(10)\qquad k(x, y, z, t) = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\alpha y'z' + 2\beta z'x' + 2\gamma x'y' - r^2t'^2 = 0,$$

wo:

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha = \cos y'z' = \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3, \\ \beta = \cos z'x' = \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1, \\ \gamma = \cos x'y' = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2. \end{cases}$$

Demnach geht die Gleichung:

$$(12)\qquad f(x, y, z, t) - \lambda k(x, y, z, t) = 0$$

bei beliebigem Werte von λ durch (2) über in:

$$(13)\quad f-\lambda k=a'_{11}x'^2+\cdots+a'_{44}t'^2-\lambda(x'^2+y'^2+z'^2+2\alpha y'z'+2\beta z'x' \\ +2\gamma x'y'-r^2t'^2)=0.$$

Da aber auch für die Fläche zweiter Ordnung (12) der Satz (8) gelten muß, ist identisch in λ:

$$(14)\quad S^2\cdot\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}-\lambda & a'_{12}-\gamma\lambda & a'_{13}-\beta\lambda \\ a'_{21}-\gamma\lambda & a'_{22}-\lambda & a'_{23}-\alpha\lambda \\ a'_{31}-\beta\lambda & a'_{32}-\alpha\lambda & a'_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung enthält schließlich nur mehr die Koeffizienten von (1) und (4), so daß sich ergibt:

Beim Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem schiefwinkligen $O'x'y'z'$ besteht zwischen den Koeffizienten der beiderseitigen Gleichungen (1) *und* (4) *identisch in λ die Beziehung* (14), *wo S nach* (6) *und α, β, γ nach* (11) *dem System $O'x'y'z'$ eigentümlich sind.*

Durch Gleichsetzen der Koeffizienten der beiderseitigen Potenzen von λ folgen dann aus (14) neben (8) die weiteren Gleichungen:

$$(15)\quad S^2=1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma \qquad (\text{I § 37, (8)}),$$

$$(16)\quad \begin{cases} S^2(a_{11}+a_{22}+a_{33})=a'_{11}(1-\alpha^2)+a'_{22}(1-\beta^2)+a'_{33}(1-\gamma^2) \\ \qquad +2a'_{23}(\beta\gamma-\alpha)+2a'_{31}(\gamma\alpha-\beta)+2a'_{12}(\alpha\beta-\gamma), \\ S^2(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33})=\alpha'_{11}+\alpha'_{22}+\alpha'_{33}+2\alpha'_{23}\alpha+2\alpha'_{31}\beta+2\alpha'_{12}\gamma, \end{cases}$$

(§ 89, (5)).

4. Invarianten im gemeinen Koordinatensystem. Dividiert man die Gleichungen (7), (8) und (16) durch S^2, so hängt die linke Seite jeder Gleichung nur von a_{kl}, die rechte nur von a'_{kl}, S, α, β, γ ab. Geht man also von demselben rechtwinkligen System $Oxyz$ zu verschiedenen schiefwinkligen $O'x'y'z'$ über, so bleibt die rechte Seite bei wechselnden Werten von a'_{kl}, S, α, β, γ immer der unveränderten linken Seite gleich. Indem man also die Gleichung (1) für den Augenblick fallen läßt und in der auf das schiefwinklige System bezogenen Gleichung (4) die Akzente unterdrückt, kann man den Satz aussprechen:

Die Koeffizientenverbindungen:[90])

$$(17)\quad \frac{A}{S^2},\ \frac{A_{44}}{S^2},$$

$$\frac{a_{11}(1-\alpha^2)+a_{22}(1-\beta^2)+a_{33}(1-\gamma^2)+2a_{23}(\beta\gamma-\alpha)+2a_{31}(\gamma\alpha-\beta)+2a_{12}(\alpha\beta-\gamma)}{S^2}$$

$$\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}+\alpha_{33}+2\alpha_{23}\alpha+2\alpha_{31}\beta+2\alpha_{12}\gamma}{S^2}$$

der Gleichung der Fläche zweiter Ordnung:

$$(18)\quad f(x, y, z, t)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+\cdots+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0$$

haben in jedem schief- oder rechtwinkligen Koordinatensystem $Oxyz$ *denselben Wert, falls* $\alpha = \cos yz$, $\beta = \cos zx$, $\gamma = \cos xy$ *die Kosinus der jedesmaligen Achsenwinkel sind und* S^2 *die Bedeutung* (15) *hat. Beim rechtwinkligen System ist also* $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $S = 1$.

5. Die kubische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten bei schiefwinkligen Koordinaten. Da die Gleichung (14) identisch in λ gilt, so sind auch die Wurzeln $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der beiderseitigen Determinanten dieselben. Es folgt also mit Rücksicht auf § 88, (17):

Ist eine Fläche zweiter Ordnung durch ihre Gleichung (4) *in bezug auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem* $O'x'y'z'$ *mit den Achsenwinkelkosinus* α, β, γ *gegeben, so lautet die kubische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$: [89])

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} - \gamma\lambda & a'_{13} - \beta\lambda \\ a'_{21} - \gamma\lambda & a'_{22} - \lambda & a'_{23} - \alpha\lambda \\ a'_{31} - \beta\lambda & a'_{32} - \alpha\lambda & a'_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung sind stets reell.

6. Invarianten des Kegels zweiter Ordnung. Mit $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$ kommt die auf $Oxyz$ bezogene Gleichung (1) auf die Gleichung eines *Kegels zweiter Ordnung* im Bündel des Anfangspunktes O zurück (§ 80, (1)):

$$(20)\qquad h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0,$$

wobei man x, y, z als Koordinaten ebensowohl des Punktes P im Raume wie des Strahles $p = OP$ im Bündel nehmen kann.

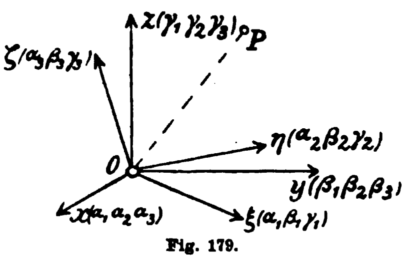


Fig. 179.

Für den Kegel (20) gelten beim Übergang zu einem konzentrischen schief- oder rechtwinkligen System $O\xi\eta\zeta$ (in (2) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ und ξ, η, ζ für x', y', z') ebenfalls die Invariantenbeziehungen (8) und (16).

Insbesondere sind bei ebenfalls rechtwinkligem System $O\xi\eta\zeta$ (Fig. 179) die in § 80, (18) zur Klassifikation benutzten Ausdrücke invariant (§ 50, (42)).[132])

7. Der Kugelkegel. Beim Übergang von dem *rechtwinkligen* System $Oxyz$ zu einem konzentrischen *rechtwinkligen* $O\xi\eta\zeta$ bleibt die Länge des Leitstrahls (I § 33, (13)) OP eines Punktes P und damit

auch die Gleichung des imaginären Kugelkegels im Raume oder im Bündel (§ 84, (9)) selbst invariant:

$$(21) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0.$$

Man kann diesen Satz noch etwas anders auffassen. Denkt man sich nämlich den Strahl OP (Fig. 179) als $p' = \xi, \eta, \zeta$ mit dem Koordinatensystem $O\xi\eta\zeta$ starr verbunden und dreht das System $O\xi\eta\zeta$ bis zum Zusammenfall mit $Oxyz$ (Fig. 180), so bleiben die Koordinaten ξ, η, ζ des Strahles p' während dieser Bewegung immer dieselben. Daher bestehen zwischen der alten Lage $p = x, y, z$ und der neuen $p' = \xi, \eta, \zeta$ in bezug auf die nunmehr identischen Systeme $Oxyz$ und $O\xi\eta\zeta$ nach wie vor die Gleichungen (2) (mit den in **6.** angegebenen Änderungen). Infolge von (21) genügt dann jeder Strahl, der in seiner alten Lage der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ genügt, auch in der neuen Lage der Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$. Beide Gleichungen beziehen sich aber nun auf dasselbe System $Oxyz = O\xi\eta\zeta$. Daher ergibt sich:[91])

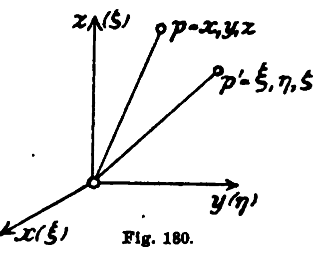


Fig. 180.

Der imaginäre Kugelkegel:

$$(22) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

bleibt bei jeder Drehung des (starren) Raumes um den Mittelpunkt des Strahlenbündels fest.

8. Der imaginäre Kugelkreis. Wie die Gleichung (22) bleiben auch *die Gleichungen des imaginären Kugelkreises* (§ 84, (10')):

$$(23) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0, \; t = 0$$

in jedem rechtwinkligen Koordinatensystem dieselben. Da somit die Ebene $z = 0$ in bezug auf ihn als beliebige Ebene des Raumes gelten kann und die Gleichungen:

$$(24) \qquad x^2 + y^2 = 0, \; z = 0, \; t = 0$$

nach § 12, (25) die Kreispunkte der xy-Ebene darstellen, so folgt:

Jede Ebene des Raumes wird von dem imaginären Kugelkreis in ihren Kreispunkten geschnitten.[60])

§ 92. Anwendungen der Invarianteneigenschaften auf besondere Flächen.

1. Rechtwinklige Halbmesser der Ellipsoide und Hyperboloide. Erhält die auf ein *rechtwinkliges* System $Oxyz$ bezogene Gleichung

des *Ellipsoids* oder *Hyperboloids*:

$$(1)\qquad g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

wie in § 72, (11) in einem beliebigen konzentrischen System $O\xi\eta\zeta$ die Form:

$$(2)\qquad g = \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + 2\varrho\eta\zeta + 2\sigma\zeta\xi + 2\tau\xi\eta - 1 = 0,$$

und ist das zweite System $O\xi\eta\zeta$ *ebenfalls rechtwinklig* ($S = 1$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$), so ist nach § 91, (16):

$$(3)\qquad \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Da aber λ, μ, ν nach (2) die (reellen oder imaginären) Längen der in die Achsen ξ, η, ζ fallenden Halbmesser der Fläche sind, so folgt (§ 22, 9):[23])

Die Summe der reziproken Quadrate dreier rechtwinkliger Halbmesser des Ellipsoids oder Hyperboloids ist konstant.

Bei dem *gleichseitigen* Hyperboloid (§ 64, (8)) ist die Summe der Koeffizienten der drei Quadrate ξ^2, η^2, ζ^2 in jedem *rechtwinkligen* System $O\xi\eta\zeta$ *gleich Null.*

2. Konjugierte Durchmesser der Ellipsoide und Hyperboloide. Erhält die Gleichung (1) in bezug auf ein schiefwinkliges System $O\xi\eta\zeta$ aus drei konjugierten Durchmessern nach § 72, (14) die Form:

$$(4)\qquad g = \frac{\xi^2}{\lambda^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} - 1 = 0,$$

so folgt aus § 91, (8) und (16):

$$(5)\quad S^2\frac{1}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{\lambda^2\mu^2\nu^2}, \qquad (6)\quad S^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1-\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{1-\beta^2}{\mu^2} + \frac{1-\gamma^2}{\nu^2},$$

$$(7)\qquad S^2\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right) = \frac{1}{\mu^2\nu^2} + \frac{1}{\nu^2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2\mu^2}.$$

Statt (5) hat man nach § 91, (6) auch:

$$(8)\qquad \lambda^2\mu^2\nu^2 \sin^2\xi\eta\zeta = a^2b^2c^2,$$

und (6) und (7) kann man mittels (5) auf die Form bringen (vgl. § 91, (11)):

$$(9)\quad \mu^2\nu^2\sin^2\eta\zeta + \nu^2\lambda^2\sin^2\zeta\xi + \lambda^2\mu^2\sin^2\xi\eta = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2,$$

$$(10)\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Man erhält also die bereits § 72, (23) abgeleiteten Gleichungen *als Ausdruck der Invarianteneigenschaften* § 91, (8); (16).[73])

3. Durchmesser und konjugierte Tangenten der Paraboloide. Nimmt die Scheitelgleichung des Paraboloids:

(11) $$g = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

in bezug auf ein schiefwinkliges System $\Omega\xi\eta\zeta$ wie in § 73, (8) die Form an:

(12) $$g = \frac{\eta^2}{\mu^2} + \frac{\zeta^2}{\nu^2} + 2\xi = 0,$$

so folgt aus § 91, (16):

(13) $$S^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1-\beta^2}{\mu^2} + \frac{1-\gamma^2}{\nu^2};$$ (14) $$S^2\frac{1}{b^2c^2} = \frac{1}{\mu^2\nu^2},$$

oder auch:

(15) $$\mu^2\nu^2 \sin^2 \xi\eta\zeta = b^2c^2,$$

(16) $$\mu^2 \sin^2 \xi\eta + \nu^2 \sin^2 \xi\zeta = b^2 + c^2,$$

wie § 73, (13); (12) gefunden.

4. Hauptachsentransformation eines einschaligen Hyperboloids. Soll die in bezug auf ein schiefwinkliges System $O\xi\eta\zeta$ gegebene Fläche:

(17) $$-\frac{\eta\zeta}{mn} - \frac{\zeta\xi}{nl} - \frac{\xi\eta}{lm} - 1 = 0$$

mit reellen Konstanten l, m, n auf ihre Hauptachsen $Oxyz$ transformiert werden, so daß (vgl. § 74, (14)):

(18) $$-\frac{\eta\zeta}{mn} - \frac{\zeta\xi}{nl} - \frac{\xi\eta}{lm} - 1 = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - 1,$$

so sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die reellen Wurzeln der kubischen Gleichung § 91, (19) mit:

$$a'_{11} = a'_{22} = a'_{33} = 0, \quad a'_{23} = -\frac{1}{2mn}, \quad a'_{31} = -\frac{1}{2nl}, \quad a'_{12} = -\frac{1}{2lm},$$

und ist nach § 91, (16); (8):

(19) $$\begin{cases} \dfrac{\alpha - \beta\gamma}{mn} + \dfrac{\beta - \gamma\alpha}{nl} + \dfrac{\gamma - \alpha\beta}{lm} = S^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ -\dfrac{1}{4l^2m^2n^2}(l^2 + m^2 + n^2) + \dfrac{1}{2l^2m^2n^2}(\alpha mn + \beta nl + \gamma lm) \\ \qquad = S^2(\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2), \\ -\dfrac{1}{4l^2m^2n^2} = S^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{cases}$$

Danach sind von den drei Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entweder eine oder alle negativ. Das letztere ist aber nicht möglich, da sonst die Fläche ein imaginäres Ellipsoid (§ 55, 1) wäre, während sie doch nach § 74, 5 reelle Gerade enthält. Es kann also etwa:

$$(20) \qquad \lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{c^2}$$

genommen werden, womit wie § 74, (14):

$$(21) \qquad -\frac{1}{lmn}\{l\eta\zeta + m\zeta\xi + n\xi\eta + lmn\} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1.$$

Die in schiefwinkligen Koordinaten ξ, η, ζ gegebene Fläche (17) *ist stets ein einschaliges Hyperboloid.*

5. Rauminhalt des durch drei Erzeugende bestimmten Parallelepipedons. Ist andererseits das einschalige Hyperboloid durch seine Hauptachsengleichung:

$$(22) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegeben, so besteht nach § 74, (14) die Gleichung (21), *wenn die Achsen ξ, η, ζ irgend drei gleichnamigen Erzeugenden f, g, h parallel genommen werden.* Dabei sind $2l$, $2m$, $2n$ die Kantenlängen des nach § 74, 5 durch f, g, h bestimmten Parallelepipedons. Von den alsdann geltenden Invariantenbeziehungen (19) gibt zunächst die dritte in der Bezeichnung (20):

$$(23) \qquad 4l^2m^2n^2S^2 = a^2b^2c^2$$

oder:

$$(24) \qquad 8lmn \sin \xi\eta\zeta = 4abc.$$

Also (I § 39, (9)):

Der Rauminhalt des von irgend drei gleichnamigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids bestimmten Parallelepipedons ist von der Auswahl dieser Erzeugenden unabhängig.[17)]

Die beiden ersten Gleichungen (19) geben in der Bezeichnung (20) unter Benutzung von (23):

$$(25) \qquad (l^2 + m^2 + n^2) - 2(\alpha mn + \beta nl + \gamma lm) = a^2 + b^2 - c^2;$$

$$(26) \quad 4lmn\{(\alpha - \beta\gamma)l + (\beta - \gamma\alpha)m + (\gamma - \alpha\beta)n\} = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

6. Das gleichseitige Hyperboloid. Das Hyperboloid (17) ist nach § 74, 7 durch drei den Achsen ξ, η, ζ parallele Gerade f, g, h gegeben, die ein Parallelepipedon mit den Ecken $\xi = \pm l$, $\eta = \pm m$, $\zeta = \pm n$ bestimmen. Sind nun die drei Geraden f, g, h je zueinander senkrecht, so ist auch das Achsensystem $O\xi\eta\zeta$ rechtwinklig und $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $S = 1$, so daß die Invariantengleichungen (25) und (26) geben:

$$(27) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0,$$

aus denen mit Rücksicht auf § 64, (3); (8) hervorgeht:

Eine Gerade, die an drei zueinander senkrechten windschiefen Geraden gleitet, beschreibt ein gleichseitiges einschaliges Hyperboloid; die Ecken des durch die drei Geraden bestimmten Parallelepipedons liegen auf der Kugelfläche der senkrechten Erzeugenden.

7. **Das gleichseitige Rotationshyperboloid.** Sind die gegebenen Geraden f, g, h Kanten eines Würfels, also, neben $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $S = 1$, $l = m = n$, so ist für die Wurzeln der kubischen Gleichung § 91, (19) nach (19):

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = -\frac{3}{4l^4}, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{1}{4l^6}.$$

Die Wurzeln sind daher:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2l^2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{l^2},$$

und die Gleichung (21) gibt mit Rücksicht auf (20):

$$\frac{x^2 + y^2}{2l^2} - \frac{z^2}{l^2} = 1.$$

Eine Gerade, die an drei windschiefen Kanten eines Würfels gleitet, beschreibt ein gleichseitiges einschaliges Rotationshyperboloid (§ 64, (9) mit $a^2 = 2l^2$).

8. **Invariantengleichungen des hyperbolischen Paraboloids.** Besteht für ein hyperbolisches Paraboloid beim Übergang von einem rechtwinkligen System $Oxyz$ zu einem schiefwinkligen $\Omega\xi\eta\zeta$ die Gleichung § 74, (32):

$$(28) \qquad \frac{4\eta\zeta}{mn} - 2\xi = \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 2x,$$

so ist nach § 91, (16), wo jetzt alle a'_{kl} außer $a'_{23} = 2 : mn$ verschwinden:

$$-\frac{4}{m^2n^2} = -S^2\frac{1}{b^2c^2}; \quad \frac{4}{mn}(\beta\gamma - \alpha) = S^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Daraus erhält man, wenn man die zweite Gleichung durch die erste vereinfacht:

$$(29) \qquad m^2n^2S^2 = 4b^2c^2, \qquad (30) \qquad mn(\alpha - \beta\gamma) = b^2 - c^2.$$

Hierbei waren nach § 74, 8 die η- und ζ-Achse *irgend zwei ungleichnamige Erzeugende,* und die Gleichung (29) besagt, daß *der Rauminhalt des in § 74, 9 eingeführten Parallelepipedons von der Wahl dieser Erzeugenden unabhängig ist.*[170])

Sind die η- und ζ-Achse die beiden *Scheitelerzeugenden,* nach § 65, (17) *die einzigen zur x-Achse senkrechten Erzeugenden,* so werden die Kosinus § 91, (11), da in der Bezeichnung von § 62, (3) $\alpha_1 = 1$,

$\beta_1 = 0,\ \gamma_1 = 0;\ \alpha_2 = 0,\ \beta_2 = \beta,\ \gamma_2 = -\gamma;\ \alpha_3 = 0,\ \beta_3 = \beta,\ \gamma_3 = \gamma$ ist:

$$(31) \qquad \alpha = \cos^2\omega - \sin^2\omega, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

und die Gleichung (30) gibt übereinstimmend mit § 62, (4); (6):

$$(32) \qquad mn = b^2 + c^2.$$

§ 93. Arten der unendlich fernen Kegelschnitte und der Kegel.

1. Arten der unendlich fernen Kurve der Fläche zweiter Ordnung. Die Fläche § 90, (10) schneidet nach § 66, (23) die unendlich ferne Ebene $t = 0$ in der Kurve:

$$(1) \quad h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0, \quad t = 0,$$

welche bei der homogen gemachten Darstellung § 90, (12) die Gleichung erhält:

$$(2) \qquad \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 = 0, \quad \tau = 0.$$

Mit Rücksicht auf § 71, (10) ergibt sich dann aus § 89, (42); (43) nach dem Vorzeichen und dem Verschwinden der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

Die unendlich ferne Kurve der Fläche zweiter Ordnung § 90, (10) *hat folgende Formen*[9]*):*

$$(3)\ A_{44} \neq 0 \begin{cases} 1.\ A_{44}A''_{44} > 0,\quad A'_{44} > 0\text{: Imag. eigentl. Kegelschnitt;} \\ 2.\ A_{44}A''_{44},\ A'_{44} \text{ nicht beide} > 0\text{: Reell. eig. Kegelschnitt;} \end{cases}$$

$$A_{44} = 0,\ A'_{44} \neq 0 \begin{cases} 3.\ A'_{44} > 0\text{: Imag. getrennt. Linienpaar;} \\ 4.\ A'_{44} < 0\text{: Reell. getrennt. Linienpaar;} \end{cases}$$

$$A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} \neq 0\text{: 5. Doppellinie;}$$

$$A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} = 0\text{: 6. Unbestimmt.}$$

Es sind die Spezies, die nach § 50, (38) ein Kegelschnitt überhaupt haben kann.

2. Hauptachsengleichung der Kegel zweiter Ordnung und Klasse im Bündel. Die Hauptachsentransformation der *Fläche zweiter Ordnung* § 90, 7 erledigt zugleich aber auch (§ 21, 15) diejenige des *Kegels zweiter Ordnung* § 80, (1). Man hat nur in § 90, (10) $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$ und in § 90, (11) $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ zu nehmen, wodurch die Koeffizienten $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{23}, a'_{31}, a'_{12}$ in § 66, (19) nicht beeinflußt werden, und dann unter x, y, z Strahlenkoordinaten im Bündel zu denken (I § 49, 6).

Sie erledigt ferner auch die Hauptachsentransformation des *Kegels zweiter Klasse* § 80, (1'), da im Bündel die Transformationsformeln für die Ebenenkoordinaten u, v, w dieselben sind wie für die Strahlenkoordinaten x, y, z (I § 50, (6); (7)). Es folgt also:

Die auf ein rechtwinkliges System $Oxyz$ im Bündel bezogene Gleichung des Kegels zweiter Ordnung oder zweiter Klasse:

(4) $h(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \cdots + 2a_{12}xy = 0$	(4′) $H(u, v, w) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + \cdots + 2b_{12}uv = 0$

in laufenden Strahlen-, bezüglich Ebenenkoordinaten kann durch Transformation auf ein rechtwinkliges neues System $Ox'y'z'$ mittels der Formeln:

(5) $\begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{cases}$	(5′) $\begin{cases} u = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w', \\ v = \beta_1 u' + \beta_2 v' + \beta_3 w', \\ w = \gamma_1 u' + \gamma_2 v' + \gamma_3 w' \end{cases}$

stets auf die Form gebracht werden:

(6) $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0.$	(6′) $\mu_1 u'^2 + \mu_2 v'^2 + \mu_3 w'^2 = 0.$

Dabei sind dann $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und μ_1, μ_2, μ_3 die Wurzeln der Gleichungen:

(7) $\lambda^3 - A''\lambda^2 + A'\lambda - A = 0,$	(7′) $\mu^3 - B''\mu^2 + B'\mu - B = 0,$

da die *Unter*determinante A_{44} der Fläche in § 89, (7) für den Kegel nach § 80, (9) die *volle* Determinante ist und entsprechend A'_{44}, A''_{44} beim Kegel nach § 80, (18) mit A', A'' zu bezeichnen sind.

3. Klassifikation der Kegel zweiter Ordnung und Klasse im Bündel. Die Bedeutung der Gleichung (6) ist nun nach § 71, (1); (32) bekannt, da sie ganz dieselbe bleibt, mögen x', y', z' Strahlenkoordinaten im Bündel oder Punktkoordinaten im Raume sein (I § 72, (16); § 71, (8)). Die Bedeutung der Gleichung (6′) ist nach § 71, (8) bekannt (I § 71, (8′); (19′)), da diese in Ebenenkoordinaten u', v', w' des Bündels dasselbe darstellt wie unter Hinzufügung der Bedingung $s' = 0$ in Ebenenkoordinaten u', v', w', s' im Raume. Somit ergibt sich zur weiteren Gliederung der bereits § 80, 10 erhaltenen Einteilung nach dem Rang folgende *Übersicht aller in der Gleichung* (4) *enthaltenen Kegel zweiter Ordnung im Bündel:*

(8) $A \neq 0 \begin{cases} 1.\ AA'' > 0,\ A' > 0\text{: Imag. eigentl. Kegel;} \\ 2.\ AA'',\ A' \text{ nicht beide} > 0\text{: Elliptischer Kegel;} \end{cases}$

$A = 0,\ A' \neq 0 \begin{cases} 3.\ A' > 0\text{: Imag. getrennt. Ebenenpaar;} \\ 4.\ A' < 0\text{: Reell. getrennt. Ebenenpaar;} \end{cases}$

$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$: 5. Doppelebene.

Für den Kegel zweiter *Klasse* (4′) tritt nur B an Stelle von A und *Strahlenpaar, Doppelstrahl* an Stelle von Ebenenpaar, Doppelebene.

4. Der gleichseitige Kegel. Wenn zwischen den Koeffizienten der Gleichung eines Kegels (4) die Beziehung besteht:

$$A'' = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0, \tag{9}$$

so ist diese nach § 91, (16) gegen eine Drehung des rechtwinkligen Achsensystems invariant ($\alpha = \beta = \gamma = 0,\ S = 1$).[164])

Führt man nun ein neues rechtwinkliges System $Ox'y'z'$ ein, dessen x'-Achse ($y' = 0,\ z' = 0$) selbst dem Kegel angehört, so muß in der neuen Gleichung:

$$a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{23}y'z' + 2a'_{31}z'x' + 2a'_{12}x'y' = 0 \tag{10}$$

der Koeffizient a'_{11} von x'^2 verschwinden, und muß wegen der Invarianz der Bedingung (9):

$$a'_{22} + a'_{33} = 0 \tag{11}$$

sein. Die $y'z'$-Ebene $x' = 0$ schneidet alsdann den Kegel in dem Linienpaar:

$$a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{23}y'z' = 0, \tag{12}$$

welches nach (11) rechtwinklig ist (§ 21, **15**; (40)).

Unter der Bedingung (9) *hat der Kegel zweiter Ordnung* (4) *die Eigenschaft, daß er von jeder Bündelebene, die zu einer Erzeugenden senkrecht ist, in zwei untereinander senkrechten Erzeugenden geschnitten wird.*

Jede Erzeugende bildet daher mit zwei anderen ein rechtwinkliges Achsensystem.

Er ist ein *gleichseitiger Kegel* (§ 64, **3**; **4**).

5. Der dual gleichseitige Kegel. Dieselbe Betrachtung kann auf den Kegel zweiter Klasse (4') angewendet werden, wo bei der Transformation (5') ebenfalls die Bedingung[164]):

$$B'' = b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0 \tag{13}$$

invariant bleibt. Ist dann die $y'z'$-Ebene $v' = 0,\ w' = 0$ selbst Tangentialebene, so wird die Bedingung (13) in dem neuen System:

$$b'_{22} + b'_{33} = 0, \tag{14}$$

und durch die x'-Achse $u' = 0$ geht das Tangentialebenenpaar:

$$b'_{22}v'^2 + b'_{33}w'^2 + 2b'_{23}v'w' = 0, \tag{15}$$

welches nach (14) rechtwinklig ist (§ 21, **15** und I § 49, **13**).

Unter der Bedingung (13) *hat der Kegel zweiter Klasse* (4') *die Eigenschaft, daß durch jeden Bündelstrahl, der zu einer Tangentialebene senkrecht ist, zwei zueinander senkrechte Tangentialebenen gehen.*

Jede Tangentialebene bildet daher mit zwei anderen ein rechtwinkliges Ebenensystem.

Der Kegel ist der *dual gleichseitige* (§ 71, **10**).

II. Kapitel.

Zurückführung der allgemeinen Gleichung auf kanonische Formen.

§ 94. Einteilung der Flächen zweiter Ordnung nach dem Mittelpunkt.

1. Allgemeiner Begriff des Mittelpunktes. Für die auf ein rechtwinkliges (oder schiefwinkliges) Koordinatensystem bezogene Fläche zweiter Ordnung:

$$(1)\quad f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0$$

soll im Anschluß an § 68, (6) jeder Punkt, dessen homogene Koordinaten den drei Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} f_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = 0, \\ f_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = 0, \\ f_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t = 0 \end{cases}$$

genügen, ein *Mittelpunkt heißen.*

Ein Mittelpunkt in diesem (weiteren) Sinne ist entweder *endlich* ($t = 1$), und dann auch ein Mittelpunkt in dem (engeren) Sinne § 68, (6), oder *unendlich fern* ($t = 0$). In beiden Fällen ist *seine Polarebene* nach § 68, (14) *die unendlich ferne Ebene,* sofern er überhaupt eine *bestimmte* Polarebene hat ($f_4 \neq 0$).

2. Mittelpunkt und Doppelpunkt. Da die Gleichungen (2) einen Teil der Gleichungen § 67, (32) des Doppelpunktes bilden, so folgt (§ 23, 2):

I. *Jeder endliche oder unendlich ferne Doppelpunkt ist zugleich ein (auf der Fläche selbst liegender) Mittelpunkt.*

Mit Rücksicht auf § 66, (6) folgt aus den vier Gleichungen:

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0; \quad f = 0$$

stets:

$$f_4 t = 0.$$

II. *Ein endlicher Mittelpunkt* ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $t = 1$), *der auf der Fläche liegt, ist stets ein Doppelpunkt* ($f_4 = 0$); und ebenfalls aus § 66, (6):

III. *Ein unendlich ferner Mittelpunkt* ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, $t = 0$) *liegt stets auf der Fläche* ($f = 0$), *auch wenn er kein Doppelpunkt ist.* Er liegt eben mit seiner Polarebene vereinigt (§ 68, 9, 1).

3. Die Anzahl der Mittelpunkte. Die Gleichungen (2) stellen *drei Ebenen*, die Polarebenen der unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen (§ 68, (14); I § 47, (20)), dar, deren gemeinsame Punkte Mittelpunkte sind. Es ist daher zu unterscheiden, ob die drei Ebenen *einen Punkt* oder *eine Gerade* gemein haben oder alle drei *zusammenfallen* (I § 51, 3).[92])

Wenn die Unterdeterminanten dritten Grades der Koeffizienten von (2):

(3) $$A_{14}, A_{24}, A_{34}, A_{44} \text{ nicht alle } 0$$

sind, hat demnach die Fläche *einen einzigen bestimmten Mittelpunkt mit den Koordinaten* (I § 51, (11)):

(4) $$x_0 : y_0 : z_0 : t_0 = A_{14} : A_{24} : A_{34} : A_{44}.$$

Wenn ferner:

(5) $$A_{14} = 0, \quad A_{24} = 0, \quad A_{34} = 0, \quad A_{44} = 0,$$

aber die Unterdeterminanten zweiten Grades aus zwei Zeilen (2):

(6) $$\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \alpha_{k3}, \alpha_{k4}, \alpha_{k5}, \alpha_{k6}, \quad k = 1, 2, 3, \text{ nicht alle } 0$$

sind, hat die Fläche *eine Mittelpunktsachse mit den Achsenkoordinaten* (I § 51, 4):

(7) $$q_{23}^0 : q_{31}^0 : q_{12}^0 : q_{14}^0 : q_{24}^0 : q_{34}^0 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} : \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Mit (5) ist stets auch die Determinante:

(8) $$A = 0.$$

Wenn sodann:

(9) $$\alpha_{k1} = 0, \quad \alpha_{k2} = 0, \quad \alpha_{k3} = 0, \quad \alpha_{k4} = 0, \quad \alpha_{k5} = 0, \quad \alpha_{k6} = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

jedoch die Koeffizienten von (2) selbst:

(10) $$a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, a_{k4}, \quad k = 1, 2, 3, \text{ nicht alle } 0$$

sind, hat die Fläche *eine Mittelpunktsebene mit den Koordinaten:*

(11) $$u_1^0 : u_2^0 : u_3^0 : u_4^0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3} : a_{k4}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Mit (9) ist neben (8) stets auch $A_{11} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{33} = 0$ und damit (§ 79, (5)):

(12) $$A = 0, \quad A' = 0.$$

Wenn endlich (§ 79, (7)):

(13) $$a_{k1} = 0, \quad a_{k2} = 0, \quad a_{k3} = 0, \quad a_{k4} = 0, \quad k = 1, 2, 3; \quad A''' = a_{44} \neq 0,$$

genügt jeder Punkt des Raumes den Gleichungen (2), und ist *der Mittelpunkt unbestimmt.* Mit (13) ist stets auch $\alpha_{kk} = 0$, $k = 1, 2 \ldots 6$, also (§ 79, (6)):

(14) $$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0.$$

4. Unterscheidung eines endlichen und unendlich fernen Mittelpunktes. Der Mittelpunkt (4) ist ein *bestimmter endlicher Mittelpunkt*, wenn:

(15) $$A_{44} \neq 0.$$

Er hat die *gemeinen Koordinaten:*

(16) $$x_0 = \frac{A_{14}}{A_{44}}, \quad y_0 = \frac{A_{24}}{A_{44}}, \quad z_0 = \frac{A_{34}}{A_{44}},$$

zugleich die Auflösungen der Gleichungen § 68, (6).

Er ist dagegen *unendlich fern,* wenn:

(17) $$A_{44} = 0, \; A_{14}, A_{24}, A_{34} \text{ nicht alle drei } 0,$$

und hat dann nach (4) die Richtungskosinus (I § 47, (14)):

(18) $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A_{14} : A_{24} : A_{34}.$$

Die unmittelbare Auflösung der mit $t = 0$ reduzierten Gleichungen (2) ergibt aber auch:

(19) $$x_0 : y_0 : z_0 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Die Bedingungen (3) sind in (15) und (17) schon mit enthalten.

5. Unterscheidung einer endlichen und unendlich fernen Mittelpunktsachse. Die Mittelpunktsachse (7) ist *endlich* (I § 49, (3)), wenn die Unterdeterminanten zweiten Grades von A_{44}:

(20) $$\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \alpha_{12} \text{ nicht alle } 0.$$

Sie hat die Richtungskosinus (I § 48, (19)):

(21) $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Sie ist dagegen *unendlich fern,* wenn:

(22) $$\begin{cases} \alpha_{11} = 0, \; \alpha_{22} = 0, \; \alpha_{33} = 0, \; \alpha_{23} = 0, \; \alpha_{31} = 0, \; \alpha_{12} = 0; \\ \alpha_{k4}, \alpha_{k5}, \alpha_{k6}, \; k = 1, 2, 3, \text{ nicht alle } 0. \end{cases}$$

Die durch sie gehenden Ebenen, darunter die Ebenen (2), haben dann nach (7) die *Stellungskosinus* (I § 49, 4):

(23) $$u_0 : v_0 : w_0 = \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Die Gleichungen (2) geben aber, mit $t = 0$ reduziert, auch direkt:

(24) $$u_0 : v_0 : w_0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Sowohl in (20) wie in (22) sind die Bedingungen (6) schon aufgenommen.

6. Unterscheidung einer endlichen und unendlich fernen Mittelpunktsebene. Die Mittelpunktsebene (11) ist *endlich,* wenn die Elemente von A_{44}:

(25) $$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12} \text{ nicht alle } 0.$$

Sie hat dann die *Stellungskosinus*:

(26) $$u_0 : v_0 : w_0 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Sie ist dagegen die *unendlich ferne Ebene*, wenn:

(27) $$\begin{cases} a_{11} = 0, \; a_{22} = 0, \; a_{33} = 0, \; a_{23} = 0, \; a_{31} = 0, \; a_{12} = 0; \\ a_{14}, a_{24}, a_{34} \text{ nicht alle } 0. \end{cases}$$

Sowohl in (25) als in (27) sind die Bedingungen (10) aufgenommen.

7. Umformung der Bedingungen eines unendlich fernen Mittelpunktes. Nach § 79, (8) ist *unter der Voraussetzung* $A_{44} = 0$:

(28) $$-A_{14}^2 = A\alpha_{11}, \quad -A_{24}^2 = A\alpha_{22}, \quad -A_{34}^2 = A\alpha_{33},$$

und daher mit der § 89, (5) eingeführten Abkürzung[80]):

(29) $$A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 = -AA_{44}'.$$

Bei reellen Koeffizienten a_{kl} sind daher *die Bedingungen* (17)* *eines unendlich fernen Mittelpunktes* auch:

(30) $$A_{44} = 0, \quad AA_{44}' \neq 0.$$

8. Umformung der Bedingungen für eine Mittelpunktsachse. *Unter der Voraussetzung:*

(31) $$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{12} = 0$$

oder, was nach § 19, (8) dasselbe ist, da die dort mit A, A', A_{kl} bezeichneten Größen mit den hier $A_{44}, A_{44}', \alpha_{kl}$ genannten übereinkommen:

(32) $$A_{44} = 0, \quad A_{44}' = 0,$$

wird nach § 81, (3); (4):

(33) $$\begin{cases} A_{11}a_{22} = -\alpha_{15}^2, & A_{22}a_{33} = -\alpha_{26}^2, & A_{33}a_{11} = -\alpha_{34}^2, \\ A_{11}a_{33} = -\alpha_{16}^2, & A_{22}a_{11} = -\alpha_{24}^2, & A_{33}a_{22} = -\alpha_{35}^2, \end{cases}$$

(34) $$A_{23}a_{23} = -\alpha_{25}\alpha_{36}, \quad A_{31}a_{31} = -\alpha_{36}\alpha_{14}, \quad A_{12}a_{12} = -\alpha_{14}\alpha_{25}.$$

Danach ist mit Rücksicht auf § 81, (14):

$$A_{11}(a_{22} + a_{33}) + A_{22}(a_{33} + a_{11}) + A_{33}(a_{11} + a_{22}) - 2(A_{23}a_{23} + A_{31}a_{31} + A_{12}a_{12}) = -(\alpha_{14}^2 + \alpha_{15}^2 + \alpha_{16}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{25}^2 + \alpha_{26}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{35}^2 + \alpha_{36}^2).$$

Da aber mit (32) nach (29) auch $A_{14} = 0$, $A_{24} = 0$, $A_{34} = 0$ und daher $A = 0$ ist, so folgt aus § 81, (8):

$$a_{11}A_{11} + a_{22}A_{22} + a_{33}A_{33} + 2(a_{23}A_{23} + a_{31}A_{31} + a_{12}A_{12}) = 0$$

und daher mit der Bezeichnung § 79, (5), da $A_{44} = 0$ ist, und § 89, (5):

(35) $$\alpha_{14}^2 + \alpha_{15}^2 + \alpha_{16}^2 + \alpha_{24}^2 + \alpha_{25}^2 + \alpha_{26}^2 + \alpha_{34}^2 + \alpha_{35}^2 + \alpha_{36}^2 = -A'A_{44}''.$$

Die *Bedingungen* (5); (8) *einer Mittelpunktsachse* überhaupt sind nun nach (29) ersetzbar durch:

(36) $$A_{44} = 0, \quad AA_{44} = 0;$$ (37) $$A = 0.$$

Die Bedingungen (20) der *endlichen* Mittelpunktsachse sind dann nach § 19, (9) außerdem:

(38) $$A'_{44} \neq 0,$$

und die (22) der *unendlich fernen* Mittelpunktsachse nach (32) und (35):

(39) $$A'_{44} = 0, \quad A'A''_{44} \neq 0.$$

9. Umformung der Bedingungen der Mittelpunktsebene. *Unter der Voraussetzung:*

(40) $$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{12} = 0$$

oder, was nach § 19, (24) dasselbe ist:

(41) $$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0$$

wird (I Anm. 1, III, (4)):

(42) $$\alpha_{44} = -a_{14}^2, \quad \alpha_{55} = -a_{24}^2, \quad \alpha_{66} = -a_{34}^2$$

und daher mit der Bezeichnung § 79, (6), da α_{11}, α_{22}, α_{33} verschwinden:

(43) $$a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 = -A''.$$

Die Bedingungen (9); (12) einer *Mittelpunktsebene* überhaupt sind nun nach (32) und (35) ersetzbar durch:

(44) $A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A'A''_{44} = 0$; (45) $A = 0,\ A' = 0.$

Die Bedingungen (25) der *endlichen* Mittelpunktsebene sind dann nach § 19, (25) außerdem:

(45) $$A''_{44} \neq 0,$$

und die (27) der *unendlich fernen* Mittelpunktsebene nach (41) und (43):

(46) $$A''_{44} = 0, \quad A'' \neq 0.$$

Die Bedingungen (13); (14) eines *unbestimmten Mittelpunktes* sind nach (41) und (43) gleichbedeutend mit:

(47) $$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0;$$

(48) $$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \quad A''' = a_{44} \neq 0.$$

10. Gesamtübersicht. *Die Fläche zweiter Ordnung* (1) *hat unter den Bedingungen* (§ 23, 8):

(49) $A_{44} \neq 0$: einen endlichen Mittelpunkt;

$A_{44} = 0,\ AA'_{44} \neq 0$: einen unendlich fernen Mittelpunkt;

$A_{44} = 0,\ A = 0,\ A'_{44} \neq 0$: eine endliche Mittelpunktsachse;

$A_{44} = 0,\ A = 0,\ A'_{44} = 0,\ A'A''_{44} \neq 0$: eine unendlich ferne Mittelpunktsachse;

$A_{44} = 0,\ A = 0,\ A'_{44} = 0,\ A' = 0,\ A''_{44} \neq 0$: eine endliche Mittelpunktsebene;

$A_{44} = 0,\quad A = 0,\quad A'_{44} = 0,\quad A' = 0,\quad A''_{44} = 0,\quad A'' \neq 0$: eine unendlich ferne Mittelpunktsebene;

$A_{44} = 0,\ A = 0,\ A'_{44} = 0,\ A' = 0,\ A''_{44} = 0,\ A'' = 0,\ A''' = a_{44} \neq 0$: unbestimmten Mittelpunkt.

§ 95. Mittelpunktsgleichung der Flächen zweiter Ordnung mit endlichen Mittelpunkten.

1. Begriff der Mittelpunktsgleichung. Wird die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung § 66, (1) auf ein neues rechtwinkliges (oder schiefwinkliges) Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$ transformiert, so verschwinden die Koeffizienten § 66, (20) der linearen Glieder der transformierten Gleichung § 66, (18), wenn:

$$(1)\qquad \begin{cases} g_1^0\alpha_1 + g_2^0\beta_1 + g_3^0\gamma_1 = 0, \\ g_1^0\alpha_2 + g_2^0\beta_2 + g_3^0\gamma_2 = 0, \\ g_1^0\alpha_3 + g_2^0\beta_3 + g_3^0\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Da aber die Determinante der neun Richtungskosinus der Achsen ξ, η, ζ nicht verschwindet, so ist für das Bestehen der Gleichungen (1) notwendig und hinreichend, daß:

$$(2)\qquad g_1^0 = 0, \quad g_2^0 = 0, \quad g_3^0 = 0,$$

also nach § 68, (5) der neue Anfangspunkt $\Omega = x_0, y_0, z_0$ ein (endlicher) Mittelpunkt ist.

Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung erhält daher in einem recht- oder schiefwinkligen Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$ immer dann und nur dann die Form (§ 24, (4)):

$$(3)\ g(x,y,z) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\zeta^2 + 2a'_{23}\eta\zeta + 2a'_{31}\zeta\xi + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{44} = 0,$$

wenn der Anfangspunkt Ω, ohne Rücksicht auf die Richtung der Achsen ξ, η, ζ, ein (endlicher) Mittelpunkt der Fläche ist. Sie heißt dann die *Mittelpunktsgleichung* der Fläche.[93])

2. Das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung. Der Wert § 66, (21) des konstanten Gliedes a'_{44} der Mittelpunktsgleichung wird mit Rücksicht auf § 66, (9) infolge von (2):

$$(4)\ a'_{44} = g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0 = g_4^0 = a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44},$$

wo für x_0, y_0, z_0 der den Gleichungen (2) genügende Mittelpunkt (oder *ein* solcher) einzusetzen ist. Man kann daher, um a'_{44} zu bestimmen, auch x_0, y_0, z_0 eliminieren aus den vier Gleichungen (§ 24, (6)):

$$(5)\quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = 0, \\ a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} - a'_{44} = 0. \end{cases}$$

3. Das konstante Glied im Falle eines einzigen Mittelpunktes. Da die vier Gleichungen (5) in $x_0, y_0, z_0, 1$ linear und homogen sind, so folgt aus ihnen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - a'_{44} \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

$$(6)\quad A - A_{44}a'_{44} = 0.$$

Im Falle eines bestimmten endlichen Mittelpunktes (§ 94, (15)) *ist somit:*[95])

$$(7)\quad a'_{44} = \frac{A}{A_{44}} \quad (A_{44} \neq 0).$$

4. Das konstante Glied im Falle einer Mittelpunktsachse. Wenn dagegen eine endliche Mittelpunktsachse vorliegt, sind nach § 94, (49) die Koeffizienten A und A_{44} in (6) Null. Jedoch gibt dann die Elimination von $y_0, z_0, 1$ aus den drei letzten Gleichungen (5):

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{21}x_0 + a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31}x_0 + a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{41}x_0 + a_{44} - a'_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Bei der Entwicklung dieser Determinante verschwindet nach § 94, (5) der Koeffizient $-A_{14}$ von x_0 und bleibt nur:

$$(8)\quad A_{11} - \alpha_{11}a'_{44} = 0.$$

Läßt man ebenso die zweite oder dritte Gleichung (5) fort, so folgt:

$$(8)\quad A_{22} - \alpha_{22}a'_{44} = 0, \quad A_{33} - \alpha_{33}a'_{44} = 0$$

und durch Addition der drei Gleichungen (8) nach § 79, (5), mit $A_{44} = 0$, und § 89, (5):

$$(9)\quad A' - A'_{44}a'_{44} = 0.$$

Im Falle einer endlichen Mittelpunktsachse (§ 94, (49)) *ist somit unabhängig von der Wahl von Ω auf der Mittelpunktsachse:*

$$(10)\quad a'_{44} = \frac{A'}{A'_{44}} \quad (A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} \neq 0).$$

5. Das konstante Glied im Falle einer Mittelpunktsebene. Wenn dagegen eine endliche Mittelpunktsebene vorliegt, sind nach

§ 94, (49) die Koeffizienten A' und A'_{44} in (9) Null. Jedoch gibt dann die Elimination von x_0, 1 aus der ersten und letzten Gleichung (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} \\ a_{41} & a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} - a'_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Bei der Entwicklung der Determinante verschwinden nach § 94, (9) die Koeffizienten α_{43} von y_0 und $-\alpha_{42}$ von z_0 und bleibt nur:

$$(11) \qquad \alpha_{44} - a_{11}a'_{44} = 0.$$

Ebenso folgt aus der zweiten und vierten oder dritten und vierten Gleichung (5):

$$(11) \qquad \alpha_{55} - a_{22}a'_{44} = 0, \quad \alpha_{66} - a_{33}a'_{44} = 0$$

und durch Addition der drei Gleichungen (11) nach § 79, (6), mit $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ nach § 94, (9), und § 89, (5):

$$(12) \qquad A'' - A''_{44}a'_{44} = 0.$$

Im Falle einer endlichen Mittelpunktsebene (§ 94, (49)) *ist somit unabhängig von der Wahl von Ω auf der Mittelpunktsebene:*

$$(13)\; a'_{44} = \frac{A''}{A''_{44}} \quad (A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A' = 0, \quad A''_{44} \neq 0).$$

Bei *unbestimmtem Mittelpunkt* geben die Gleichungen (5) nach § 94, (13):

$$(14) \qquad a'_{44} = \alpha_{44} \quad (A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A'' = 0, \quad A''' = \alpha_{44} \neq 0).$$

§ 96. Hauptachsengleichung der Flächen mit endlichem Mittelpunkt.

1. Begriff der Hauptachsen. Haben die *Achsen* ξ, η, ζ des Koordinatensystems $\Omega\xi\eta\zeta$ *die Hauptachsenrichtungen*, so erhält die Gleichung § 90, (10) der Fläche zweiter Ordnung nach § 90, (12) die Form:

$$g(x, y, z) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0,$$

unabhängig von der Wahl des Anfangspunktes Ω, von der nur die Werte der Koeffizienten a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, a'_{44} abhängig bleiben.

Legt man andererseits *den Anfangspunkt* Ω in einen (endlichen) *Mittelpunkt der Fläche*, so erhält die Gleichung nach § 95, (3) die Form:

$$g(x, y, z) = a_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\zeta^2 + 2a'_{23}\eta\zeta + 2a'_{31}\zeta\xi + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{44} = 0,$$

unabhängig von der Wahl der Achsenrichtungen ξ, η, ζ, von der nur die Werte der Koeffizienten a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{23}, a'_{31}, a'_{12} abhängig bleiben.

Legt man daher gleichzeitig die Achsen ξ, η, ζ nach den Hauptachsenrichtungen und den Anfangspunkt Ω in einen endlichen Mittelpunkt, so muß die Gleichung der Fläche die Form erhalten:

$$(1) \qquad g(x, y, z) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + a'_{44} = 0.$$

Die alsdann nach *Lage* und *Richtung* gewählten Achsen heißen *die drei Hauptachsen der Fläche* und die Gleichung (1) die *Hauptachsengleichung.*

Nach § 90, 7 und § 95, **3—5** sind jedoch sowohl in betreff der Werte von λ_1, λ_2, λ_3 als auch des Wertes von a'_{44} weitere Unterscheidungen zu machen.

2. Hauptachsengleichung der Flächen mit einem Mittelpunkt. Die Ungleichung:

$$(2) \qquad A_{44} \neq 0$$

ist nach § 90, (12) und § 94, (49) die *gemeinsame* Voraussetzung dafür, daß keine der drei Größen λ_1, λ_2, λ_3 verschwindet, und dafür, daß ein bestimmter endlicher Mittelpunkt vorliegt und das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung den Wert § 95, (7) hat.

Unter der Voraussetzung (2) *kann die Gleichung* § 90, (10) *der Fläche auf die Form:*

$$(3) \qquad g(x, y, z) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$$

gebracht werden, wobei keiner der drei Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3 verschwindet.

Für das rechtwinklige Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$, auf das sich die Gleichung (3) bezieht, ist Ω *der bestimmte endliche Mittelpunkt* § 94, (16), und sind ξ, η, ζ *die drei Hauptachsen der Fläche.*

Die drei Hauptachsen sind *eindeutig bestimmt* (§ 90, (13)), wenn λ_1, λ_2, λ_3, die Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ (§ 88, (17)), alle drei verschieden sind; sie sind *einfach unbestimmt* (§ 90, (14)), wenn, unter den Bedingungen § 89, 7, zwei Wurzeln gleich, sie sind *dreifach unbestimmt* (§ 90, (17)), wenn, unter den Bedingungen § 89, **6**, alle drei Wurzeln gleich sind.

3. Hauptachsengleichung der Flächen mit einer Mittelpunktsachse. Die Voraussetzung:

$$(4) \qquad A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} \neq 0$$

hat nach § 90, (18) zur Folge, daß eine der drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3, etwa λ_1 verschwindet, die beiden andern aber nicht verschwinden, und hat nach § 94, (49) zur Folge, daß eine endliche Mittelpunkts-

achse vorliegt und das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung den Wert § 95, (10) hat.

Unter der Voraussetzung (4) *kann die Gleichung* § 90, (10) *der Fläche auf die Form:*

$$(5)\qquad g(x, y, z) = \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A'}{A'_{44}} = 0$$

gebracht werden, wobei keiner der beiden Koeffizienten λ_2 und λ_3 verschwindet.

Für das rechtwinklige Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$, auf das sich die Gleichung (5) bezieht, ist Ω *einfach unbestimmt, ein beliebiger Punkt der Mittelpunktsachse* § 94, (7), und sind ξ, η, ζ *die drei Hauptachsen der Fläche.*

Die drei Hauptachsen sind für $\lambda_2 \neq \lambda_3$ *eindeutig bestimmt*, für $\lambda_2 = \lambda_3$ aber *einfach unbestimmt.* In beiden Fällen *kommt* aber *die Hauptachse* ξ, deren Richtungskosinus nach § 90, (13) mit $\lambda_1 = 0$:

$$(6)\qquad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \Delta_{k1}(0) : \Delta_{k2}(0) : \Delta_{k3}(0) = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3}$$

sind (§ 89, (1)), nach § 94, (21) *in die Mittelpunktsachse zu liegen.*

4. Hauptachsengleichung der Flächen mit einer Mittelpunktsebene. Die Voraussetzung:

$$(7)\qquad A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A' = 0, \quad A''_{44} \neq 0$$

hat nach § 90, (19) zur Folge, daß zwei Wurzeln, etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ verschwinden, die dritte $\lambda_3 \neq 0$ ist, und hat nach § 94, (49) zur Folge, daß eine endliche Mittelpunktsebene vorliegt und das konstante Glied der Mittelpunktsgleichung den Wert § 95, (13) hat.

Unter der Voraussetzung (7) *kann die Gleichung* § 90, (10) *der Fläche auf die Form:*

$$(8)\qquad g(x, y, z) = \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0$$

gebracht werden, wo λ_3 nicht verschwindet.

Für das rechtwinklige Achsensystem $\Omega\xi\eta\zeta$, auf das sich die Gleichung (8) bezieht, ist Ω *zweifach unbestimmt, ein beliebiger Punkt der Mittelpunktsebene* § 94, (11), und sind ξ, η, ζ *die drei Hauptachsen der Fläche.*

Die drei Hauptachsen sind *einfach unbestimmt. Die Hauptachsen ξ und η*, deren Richtungskosinus nach § 90, (15) mit $\lambda_2 = 0$ und ξ, η für η, ζ den Bedingungen:

$$(9)\quad a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\beta_1 + a_{k3}\gamma_1 = 0,\ \ a_{k1}\alpha_2 + a_{k2}\beta_2 + a_{k3}\gamma_2 = 0,\ \ k = 1, 2, 3,$$

genügen, *liegen* nach § 94, (26) *in der Mittelpunktsebene.*

Unter den Voraussetzungen § 94, (49) eines *unbestimmten Mittelpunktes:*

(10) $A_{44} = 0, \; A = 0, \; A'_{44} = 0, \; A' = 0, \; A''_{44} = 0, \; A'' = 0, \; a_{44} \neq 0$

ist die Gleichung der Fläche in homogenen Koordinaten *in jedem System* $Oxyz$ oder $\Omega\xi\eta\zeta$:

(11) $$f(x, y, z, t) = a_{44}t^2 = a_{44}\tau^2 = 0.$$

5. Bedeutungen der Hauptachsengleichungen. In den nun erhaltenen Gleichungen (3), (5) und (8) können die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, soweit sie vorkommen, unter den bezüglichen Voraussetzungen nicht mehr verschwinden, wohl aber das konstante Glied. In jedem Falle ist die Bedeutung der Gleichung aus ihrer Form bereits zu ersehen.

Die Gleichung (3) stellt für:

(12) $$A \neq 0$$

(§ 78, (2)) eine *eigentliche Mittelpunktsfläche,* und zwar nach § 70, (1) ein (reelles oder imaginäres) *Ellipsoid* oder (ein- oder zweischaliges) *Hyperboloid dar,* für:

(13) $$A = 0$$

aber nach § 71, (1) einen *eigentlichen Kegel.* In diesem Falle muß neben (13):

(13') $$A' \neq 0$$

sein, da sonst nach § 79, (11) gegen die Voraussetzung (2) auch $A_{44} = 0$ wäre. Der Mittelpunkt $\xi = 0, \; \eta = 0, \; \zeta = 0$ des Kegels ist nach § 94, 2, II zugleich Doppelpunkt.

Die Gleichung (5) mit den Bedingungen (4) stellt für:

(14) $$A' \neq 0$$

eine Zylinderfläche, nach § 53, (29) einen (reellen oder imaginären) *elliptischen* oder *hyperbolischen Zylinder* dar. Der unendlich ferne Punkt $\eta = 0, \; \zeta = 0, \; \tau = 0$ der Mittelpunktsachse $\eta = 0, \; \zeta = 0$ ist zugleich der Doppelpunkt der Fläche (die unendlich ferne Spitze des Kegels[188]) nach § 79, (4) mit $A_{44} = 0$. Für:

(15) $$A' = 0$$

wird die Fläche (5) nach § 71, (32) ein (reelles oder imaginäres) *Ebenenpaar.* In diesem Falle muß neben (4) und (15):

(15') $$A'' \neq 0$$

sein, da sonst nach § 81, (18) alle α_{kl} und damit gegen die Voraussetzung (4) auch A'_{44} verschwinden müßten (§ 89, (5)). Die Mittelpunktsachse $\eta = 0, \; \zeta = 0$ ist nach § 94, 2, II zugleich Doppellinie der Fläche.

Die Gleichung (8) mit den Bedingungen (7) stellt für:

(16') $$A'' \neq 0$$

ein Ebenenpaar, und zwar ein *Paar von (reellen oder imaginären) Parallelebenen* dar (§ 81, (28)). Die unendlich ferne Gerade $\zeta = 0$, $\tau = 0$ der Mittelpunktsebene $\zeta = 0$ ist zugleich die Doppelgerade der Fläche. Für:

(17) $$A'' = 0$$

wird (8) eine *endliche Doppelebene*. In diesem Falle muß neben (17):

(17') $$A''' \neq 0$$

sein, da sonst nach § 81, (25) alle $a_{kl} = 0$ und damit gegen die Voraussetzung (7) auch $A''_{44} = 0$ wäre (§ 89, (5)).

Die Gleichung (11) stellt die *unendlich ferne Doppelebene dar.*

6. Übersicht der Hauptachsengleichungen. Nach dem Range (§ 81, (28)) geordnet, zerfallen die Flächen mit *endlichen Mittelpunkten* in die folgenden Formen (§ 24, 9):

$A \neq 0$; $A_{44} \neq 0 : \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$: Ellipsoide und Hyperboloide;

$A = 0$, $A' \neq 0$; $A_{44} \neq 0 : \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0$: Elliptische Kegel;
$A = 0$, $A' \neq 0$; $A_{44} = 0$, $A'_{44} \neq 0 : \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A'}{A'_{44}} = 0$: Ellipt. und hyperbol. Zylinder;

$A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$; $A_{44} = 0$, $A'_{44} \neq 0 : \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0$: Ebenenpaare mit endl. Achse;
$A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$; $A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} \neq 0 : \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0$: Parallelebenenpaare;

$A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$; $A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} \neq 0 : \lambda_3 \zeta^2 = 0$: Endliche Doppelebene;
$A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$; $A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} = 0 : a_{44} \tau^2 = 0$: Unendlich ferne Doppelebene.

§ 97. Flächen mit einem unendlich fernen Mittelpunkt.

1. Einführung der Hauptachsenrichtungen. Die *gemeinsame* Bedingung der Flächen ohne endlichen Mittelpunkt ist nach § 94, (45):

(1) $$A_{44} = 0.$$

Dieselbe Bedingung hat aber nach § 89, (37) das Verschwinden des einen Hauptachsenkoeffizienten zur Folge. Führt man daher ein

Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$ ein, dessen Achsen ξ, η, ζ bei *verfügbar bleibendem Anfangspunkt* $\Omega = x_0, y_0, z_0$ die *Hauptachsenrichtungen* haben, so wird die Gleichung der Fläche nach § 90, (18):

(2) $$g(x, y, z) = \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0.$$

Je nachdem alsdann (§ 94, (49)) mit:

(3) $$A_{44} = 0, \quad AA'_{44} \neq 0$$

ein *einziger unendlich ferner Mittelpunkt* oder mit:

(4) $$A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A'A''_{44} \neq 0$$

eine *unendlich ferne Mittelpunktsachse* oder mit:

(5) $$A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0; \quad A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' \neq 0$$

eine *unendlich ferne Mittelpunktsebene* vorhanden ist, ist in (2) bezüglich (§ 89, (37)):

(6) $$\lambda_2\lambda_3 = A'_{44} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = A''_{44} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = 0.$$

2. Beziehung der Hauptachsenrichtungen zu dem unendlich fernen Mittelpunkt. Die Fläche hat einen bestimmten unendlich fernen Mittelpunkt unter den Bedingungen (§ 94, (29)):

(7) $$A_{44} = 0, \quad A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 = -AA'_{44} \neq 0.$$

Er liegt in der Richtung (§ 94, (18); (19)):

(8) $$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A_{14} : A_{24} : A_{34} = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3},$$

$k = 1, 2$ oder 3, und gehört nach § 94, 2, III der Fläche selbst an. Die Hauptachse ξ hat aber nach § 90, (13) mit $\lambda_1 = 0$ die Richtungskosinus:

$$\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \Delta_{k1}(0) : \Delta_{k2}(0) : \Delta_{k3}(0) = \alpha_{k1} : \alpha_{k2} : \alpha_{k3} \quad (\S\ 89, (1)).$$

Die Hauptachsenrichtung ξ *ist dieselbe wie die Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt.*

Wir verfügen über ihre Pfeilspitze, indem wir mit Rücksicht auf (7) in:

(9) $$\tau\alpha_1 = A_{14}, \quad \tau\beta_1 = A_{24}, \quad \tau\gamma_1 = A_{34}; \quad \tau = \sqrt{-AA'_{44}}$$

die positive Wurzel nehmen.

Die beiden anderen Hauptachsen $\eta = \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\zeta = \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ bestimmen sich aus § 90, (13) oder (15), je nachdem $\lambda_2 \neq \lambda_3$ oder $\lambda_2 = \lambda_3$.

3. Verschwinden der linearen Glieder. Die drei Koeffizienten:

(10) $$\begin{cases} a'_{14} = g_1^0\alpha_1 + g_2^0\beta_1 + g_3^0\gamma_1, \\ a'_{24} = g_1^0\alpha_2 + g_2^0\beta_2 + g_3^0\gamma_2, \\ a'_{34} = g_1^0\alpha_3 + g_2^0\beta_3 + g_3^0\gamma_3 \end{cases}$$

können mangels eines endlichen Mittelpunktes nach § 95, 1 ***niemals alle drei gleichzeitig verschwinden.*** Wohl aber kann über den Punkt $\Omega = x_0, y_0, z_0$ derart verfügt werden, daß *zwei* dieser Koeffizienten, a'_{24} und a'_{34}, und außerdem a'_{44} verschwinden, also:

$$(11)\begin{cases} a'_{24} = g_1{}^0\alpha_2 + g_2{}^0\beta_2 + g_3{}^0\gamma_2 = 0, \\ a'_{34} = g_1{}^0\alpha_3 + g_2{}^0\beta_3 + g_3{}^0\gamma_3 = 0, \end{cases} \qquad (12) \qquad a'_{44} = g^0 = 0.$$

4. Der Scheitelpunkt der Fläche. Den Gleichungen (12) und (11) zufolge ist Ω ein *Punkt der Fläche selbst, dessen Flächennormale* (§ 67, (19)) auf den Hauptachsen η und ζ senkrecht steht, also *die Richtung der Hauptachse* ξ *hat.* Wir nennen ihn den *Scheitelpunkt der Fläche* und beweisen im folgenden, daß unter den Voraussetzungen (7) ein *einziger endlicher* Scheitelpunkt vorhanden ist.

Die Gleichungen (11) sind vollkommen gleichbedeutend mit der Proportion (I § 37, (12)):

$$(13) \qquad g_1{}^0 : g_2{}^0 : g_3{}^0 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1,$$

die, mit einem Proportionalitätsfaktor ϱ geschrieben, lautet (§ 25, (13)):

$$(14) \qquad g_1{}^0 + \varrho\alpha_1 = 0, \quad g_2{}^0 + \varrho\beta_1 = 0, \quad g_3{}^0 + \varrho\gamma_1 = 0.$$

Der Scheitelpunkt ist also, unter Elimination von ϱ, *durch die vier Gleichungen* (12) *und* (14) *bestimmt.*

Aus (14) folgt alsdann, da $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ ist, für den nicht verschwindenden Koeffizienten a'_{14} in (10):

$$(15) \qquad a'_{14} = -\varrho.$$

5. Die Gleichungen der Hauptachse. Die Gleichungen (14) lauten ausführlich:

$$(16) \qquad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho\alpha_1 = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho\beta_1 = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Da nun für die Determinante A infolge von (1) die Gleichungen gelten (I Anm. 1, III, (17)):

$$(17) \quad \begin{cases} a_{11}A_{14} + a_{21}A_{24} + a_{31}A_{34} = 0, \quad a_{12}A_{14} + a_{22}A_{24} + a_{32}A_{34} = 0, \\ a_{13}A_{14} + a_{23}A_{24} + a_{33}A_{34} = 0, \quad a_{14}A_{14} + a_{24}A_{24} + a_{34}A_{34} = A, \end{cases}$$

so folgt durch Multiplikation der Gleichungen (16) mit A_{14}, A_{24}, A_{34} und Addition:

$$A + \varrho(\alpha_1 A_{14} + \beta_1 A_{24} + \gamma_1 A_{34}) = 0$$

oder, da nach (9):

$$\alpha_1 A_{14} + \beta_1 A_{24} + \gamma_1 A_{34} = \tau(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) = \tau$$

ist:

$$A + \varrho\tau = 0$$

oder:

$$\rho = -\frac{A}{\tau} = -\frac{A}{\sqrt{-AA'_{44}}} = \frac{\sqrt{-AA'_{44}}}{A'_{44}}. \tag{18}$$

Die Produkte $\rho\alpha_1$, $\rho\beta_1$, $\rho\gamma_1$ werden nach (9) und (18):

$$\rho\alpha_1 = -\frac{AA_{14}}{\tau^2} = \frac{A_{14}}{A'_{44}}, \quad \rho\beta_1 = \frac{A_{24}}{A'_{44}}, \quad \rho\gamma_1 = \frac{A_{34}}{A'_{44}}. \tag{19}$$

Setzt man diese Werte in (16) ein, so ergibt sich mit Unterdrückung des Index 0, daß der Scheitelpunkt den Gleichungen genügen muß:

$$(20) \quad \begin{cases} X_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} + \frac{A_{14}}{A'_{44}} = 0, \\ X_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} + \frac{A_{24}}{A'_{44}} = 0, \\ X_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} + \frac{A_{34}}{A'_{44}} = 0. \end{cases}$$

Diese stellen aber, da nach (17) und (7) identisch (I § 51, (7)):

$$A_{14}X_1 + A_{24}X_2 + A_{34}X_3 = 0, \tag{20'}$$

und A_{14}, A_{24}, A_{34} nicht sämtlich verschwinden, drei durch eine *Gerade* gehende Ebenen dar.

Diese Gerade hat, da ihre Richtungskosinus (I § 48, (19)) sich wie $\alpha_{k1}:\alpha_{k2}:\alpha_{k3}$ verhalten ($k = 1, 2$ oder 3), nach (8) die Hauptachsenrichtung $\mathfrak{x}$.

Wir nennen diese in der Hauptachsenrichtung $\mathfrak{x}$ durch den Scheitelpunkt gehende Gerade die Hauptachse der Fläche.

Sie ist durch die drei Gleichungen (20) dargestellt.

6. Lineare Gleichungen für den Scheitelpunkt. Da die Hauptachse nach 2 durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Fläche geht, ist der Scheitelpunkt ihr anderer Schnittpunkt mit der Fläche. Dementsprechend wird die Gleichung (12) infolge von (14) linear:

$$g^0 = g_1{}^0 x_0 + g_2{}^0 y_0 + g_3{}^0 z_0 + g_4{}^0 = -\rho(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0) + g_4{}^0 = 0,$$

wo die Werte (19) einzusetzen sind.

Der Scheitelpunkt ist daher aus den vier linearen Gleichungen zu bestimmen:

$$(21) \quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \frac{A_{14}}{A'_{44}} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \frac{A_{24}}{A'_{44}} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \frac{A_{34}}{A'_{44}} = 0, \\ \left(a_{41} - \frac{A_{14}}{A'_{44}}\right)x_0 + \left(a_{42} - \frac{A_{24}}{A'_{44}}\right)y_0 + \left(a_{43} - \frac{A_{34}}{A'_{44}}\right)z_0 + a_{44} = 0, \end{cases}$$

von denen die drei ersten nur für zwei zählen.

Die Determinante der Koeffizienten von x_0, y_0, z_0 in den drei letzten Gleichungen (21) ist:

$$(22)\quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} - \frac{1}{A'_{44}} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} \end{vmatrix} = -A_{14} - \frac{1}{A'_{44}}(A_{14}\alpha_{11} + A_{24}\alpha_{21} + A_{34}\alpha_{31}).$$

Nun ist aber, da $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ Unterdeterminanten der Elemente erster Kolonne von A_{44} und dritter Kolonne von $-A_{41}$ sind, mit Rücksicht auf (1):

$$(23)\quad \begin{cases} a_{11}\alpha_{11} + a_{21}\alpha_{21} + a_{31}\alpha_{31} = 0, & a_{12}\alpha_{11} + a_{22}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{31} = 0, \\ a_{13}\alpha_{11} + a_{23}\alpha_{21} + a_{33}\alpha_{31} = 0, & a_{14}\alpha_{11} + a_{24}\alpha_{21} + a_{34}\alpha_{31} = -A_{41}. \end{cases}$$

Multipliziert man daher die drei Gleichungen (20) in Rücksicht auf (8) mit $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$ und addiert, so folgt wegen (20'):

$$(24)\quad -A_{14} + \frac{1}{A'_{44}}(A_{14}\alpha_{11} + A_{24}\alpha_{21} + A_{34}\alpha_{31}) = 0$$

und damit aus (22):

$$(25)\quad D_1 = -2A_{14}.$$

Läßt man entsprechend in (21) die zweite oder dritte Zeile fort, so erhält man die Determinanten $D_2 = -2A_{24}$ oder $D_3 = -2A_{34}$. Da diese aber nach (7) nicht alle drei verschwinden, so *müssen die Gleichungen* (21) *stets einen einzigen endlichen Scheitelpunkt bestimmen.*

7. Die Koordinaten des Scheitelpunktes. Um die Gleichungen (21) gleichmäßig zu benutzen, betrachten wir sie als vier in den Größen $x_0, y_0, z_0, 1, \frac{1}{A'_{44}}$ homogene lineare Gleichungen. Dann folgt aus ihnen:

$$(26)\quad x_0 : y_0 : z_0 : 1 : \frac{1}{A'_{44}} = X : Y : Z : S : R,$$

wo X, Y, Z, S, R die Unterdeterminanten vierten Grades der Matrix (einschließlich abwechselnder Vorzeichen, I Anm. 2, III, (13))

$$(27)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & A_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & A_{34} \\ a_{41} - \frac{A_{41}}{A'_{44}} & a_{42} - \frac{A_{42}}{A'_{44}} & a_{43} - \frac{A_{43}}{A'_{44}} & a_{44} & 0 \end{vmatrix}$$

bedeuten. Insbesondere ist:

$$R = A - \frac{1}{A'_{44}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= A - \frac{1}{A'_{44}}(A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2)$$

und nach (7):

$$R = 2A. \tag{28}$$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind daher nach (26):

$$x_0 = \frac{X}{2AA'_{44}}, \quad y_0 = \frac{Y}{2AA'_{44}}, \quad z_0 = \frac{Z}{2AA'_{44}}, \tag{29}$$

wo X, $-Y$, Z die Determinanten vierten Grades sind, die aus (27) durch Streichung der 1., 2., 3. Kolonne entstehen, und nach (7) stets $AA'_{44} \neq 0$ ist (§ 25, (26)).[94])

8. Die Hauptachsen-Scheitelgleichung. Die Gleichung (2) wird nun nach (11), (12), (15) und (18):

$$g(x, y, z) = \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 - 2\frac{\sqrt{-AA'_{44}}}{A'_{44}}\xi = 0. \tag{30}$$

Unter den Voraussetzungen (7) *erhält die Gleichung* § 90, (10) *in bezug auf ein neues System* $\Omega\xi\eta\zeta$, *dessen Anfangspunkt* Ω *der Scheitel* (29) *der Fläche ist, und dessen Achsen* ξ, η, ζ *die Hauptachsenrichtungen haben, die Form* (30).

Die Pfeilspitze der Hauptachse ξ ist dabei durch die Formeln (9) bestimmt. Die Quadratwurzel aus $-AA'_{44}$ ist nach (7) reell, ihr Vorzeichen in (30) dasselbe wie in (9). Die Koeffizienten λ_2 und λ_3 sind die beiden nicht verschwindenden Wurzeln der kubischen Gleichung § 88, (17).

Das System $\Omega\xi\eta\zeta$ ist für $\lambda_2 \neq \lambda_3$ eindeutig bestimmt, dagegen für $\lambda_2 = \lambda_3$ um die ξ-Achse drehbar.

§ 98. Flächen mit einer unendlich fernen Mittelpunktsachse.

1. Unendlich ferne Mittelpunktsachse und Hauptachsenrichtungen. Die Fläche zweiter Ordnung § 94, (1) hat eine *unendlich ferne Mittelpunktsachse,* wenn nach § 94, (5); (22):

$$\begin{cases} A_{14} = 0, \quad A_{24} = 0, \quad A_{34} = 0, \quad A_{44} = 0, \\ \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{31} = 0 \quad \alpha_{12} = 0, \\ \alpha_{k4}, \quad \alpha_{k5}, \quad \alpha_{k6}, \quad k = 1, 2, 3, \text{ nicht alle } 0 \end{cases} \tag{1}$$

oder nach § 94, (36); (39):

$$A_{44} = 0, \quad A = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A'A''_{44} \neq 0. \tag{2}$$

Diese Achse ist durch die Stellung der durch sie gehenden, einander parallelen Ebenen bezeichnet, deren gemeinsames Perpendikel nach § 94, (23); (24) die Richtungskosinus hat:

(3) $$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \alpha_{k4} : \alpha_{k5} : \alpha_{k6}$$
oder:
(4) $$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = a_{k1} : a_{k2} : a_{k3}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Die Mittelpunktsachse *gehört* nach § 94, 2, III *der Fläche selbst an.*

Führt man nun ein Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$ ein, dessen Achsen, bei *verfügbar bleibendem Anfangspunkt* $\Omega = x_0, y_0, z_0$, die *Hauptachsenrichtungen* der Fläche haben, so nimmt die Gleichung der Fläche nach § 90, (19) die Form an:

(5) $$g(x, y, z) = \lambda_3\zeta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\zeta + a'_{44} = 0,$$

wo $a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, a'_{44}$ die Werte § 97, (10); § 66, (21) haben. Die Richtungskosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ der Achsen ξ und η genügen den Gleichungen (§ 90, (15) mit $\lambda_2 = 0$):

(6) $$a_{k1}\alpha_1 + a_{k2}\beta_1 + a_{k3}\gamma_1 = 0,$$ (7) $$a_{k1}\alpha_2 + a_{k2}\beta_2 + a_{k3}\gamma_2 = 0,$$
(8) $$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

die nur die Stellung der *Ebene* $\Omega\xi\eta$ bestimmen, während das *Achsensystem* $\Omega\xi\eta$ in dieser drehbar bleibt. Aus (6), (7) und (4) ergibt sich aber:

Die Ebene $\Omega\xi\eta$ der Hauptachsenrichtungen ξ und η geht durch die unendlich ferne Mittelpunktsachse (hat die Stellung (4)).

Die dritte Hauptachse ζ entspricht nach § 90, (14) den Gleichungen:

(9) $$\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3 = \Delta_{k1}(\lambda_3) : \Delta_{k2}(\lambda_3) : \Delta_{k3}(\lambda_3).$$

Da sie aber nach § 90, 7 zu $\Omega\xi\eta$ senkrecht ist, muß sie mit der bereits gleichbezeichneten Richtung (4) zusammenfallen. In der Tat ist im Falle (1) $\lambda_3 = A''_{44}$, $\Delta_{kl}(\lambda_3) = A''_{44}a_{kl}$.

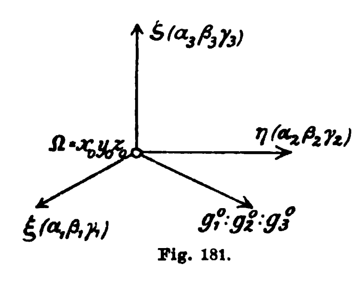


Fig. 181.

2. Begriff der Scheitelachse. Wir bezeichnen als Scheitelpunkt einen solchen endlichen Punkt x_0, y_0, z_0 der Fläche, in dem die Flächennormale zu der Hauptachsenrichtung ζ senkrecht steht oder, wenn wir x_0, y_0, z_0 als Anfangspunkt Ω nehmen, in die Ebene $\Omega\xi\eta$ fällt (Fig. 181). Die Bedingungen für einen solchen Punkt sind neben:

(10) $$g^0 = 0$$
entweder (§ 67, (19)):
(11) $$g_1{}^0\alpha_3 + g_2{}^0\beta_3 + g_3{}^0\gamma_3 = 0$$
oder (I § 47, (17)):

$$(12)\quad \begin{cases} g_1{}^0 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = \varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2, \\ g_2{}^0 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = \varrho_1\beta_1 + \varrho_2\beta_2, \\ g_3{}^0 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = \varrho_1\gamma_1 + \varrho_2\gamma_2, \end{cases}$$

wo ϱ_1, ϱ_2 zwei Proportionalitätsfaktoren bedeuten.

Wir beweisen zunächst, daß die Punkte x_0, y_0, z_0, die den Gleichungen (10) und (11) oder (10) und (12) genügen, eine bestimmte auf der Fläche liegende Gerade erfüllen, die wir die *Scheitelachse der Fläche* nennen.

3. Bestimmung der Größen $\varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2,\ \varrho_1\beta_1 + \varrho_2\beta_2,\ \varrho_1\gamma_1 + \varrho_2\gamma_2$. Durch Multiplikation der Gleichungen (12) mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ oder $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und Addition folgt nach (6), (7) und (8):

$$(13)\quad \begin{cases} a_{14}\alpha_1 + a_{24}\beta_1 + a_{34}\gamma_1 = \varrho_1, \\ a_{14}\alpha_2 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\gamma_2 = \varrho_2. \end{cases}$$

Durch Elimination von α_1, β_1 oder γ_1 bezüglich aus der ersten ($k = 1$), zweiten ($k = 2$) oder dritten ($k = 3$) Gleichung (6) und der ersten Gleichung (13) erhält man:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 \\ a_{41} & a_{42}\beta_1 + a_{43}\gamma_1 - \varrho_1 \end{vmatrix} = \alpha_{34}\beta_1 - \alpha_{24}\gamma_1 - a_{11}\varrho_1 = 0, \ldots, \ldots$$

oder:

$$\alpha_{34}\beta_1 - \alpha_{24}\gamma_1 = a_{11}\varrho_1,\quad \alpha_{15}\gamma_1 - \alpha_{35}\alpha_1 = a_{22}\varrho_1,\quad \alpha_{26}\alpha_1 - \alpha_{16}\beta_1 = a_{33}\varrho_1$$

und durch Addition:

$$(14)\quad A_{44}''\varrho_1 = (\alpha_{26} - \alpha_{35})\alpha_1 + (\alpha_{34} - \alpha_{16})\beta_1 + (\alpha_{15} - \alpha_{24})\gamma_1,$$

und ebenso:

$$(14)\quad A_{44}''\varrho_2 = (\alpha_{26} - \alpha_{35})\alpha_2 + (\alpha_{34} - \alpha_{16})\beta_2 + (\alpha_{15} - \alpha_{24})\gamma_2.$$

Nach (3) ist aber:

$$\alpha_{15}\gamma_3 - \alpha_{16}\beta_3 = 0,\quad \alpha_{26}\alpha_3 - \alpha_{24}\gamma_3 = 0,\quad \alpha_{34}\beta_3 - \alpha_{35}\alpha_3 = 0$$

und durch Addition:

$$(15)\quad O = (\alpha_{26} - \alpha_{35})\alpha_3 + (\alpha_{34} - \alpha_{16})\beta_3 + (\alpha_{15} - \alpha_{24})\gamma_3.$$

Durch Multiplikation der drei Gleichungen (14), (15) mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3$ oder $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und Addition ergibt sich aber nach § 88, (7); (8):

$$(16)\quad \begin{cases} A_{44}''(\alpha_1\varrho_1 + \alpha_2\varrho_2) = \alpha_{26} - \alpha_{35}, \\ A_{44}''(\beta_1\varrho_1 + \beta_2\varrho_2) = \alpha_{34} - \alpha_{16}, \\ A_{44}''(\gamma_1\varrho_1 + \gamma_2\varrho_2) = \alpha_{15} - \alpha_{24}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (12) *sind damit bestimmt.*

4. Bestimmung der Größe $\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2$. Infolge der zweiten Zeile (1) ist:

$$A_{11} = a_{24}\alpha_{16} - a_{34}\alpha_{15},\quad A_{22} = a_{34}\alpha_{24} - a_{14}\alpha_{26},\quad A_{33} = a_{14}\alpha_{35} - a_{24}\alpha_{34}$$

und damit, da $A_{44} = 0$ ist, nach § 79, (5):

$$(17)\qquad -A' = a_{14}(\alpha_{26} - \alpha_{35}) + a_{24}(\alpha_{34} - \alpha_{16}) + a_{34}(\alpha_{15} - \alpha_{24}).$$

Nun folgt durch Multiplikation der Gleichungen (13) mit ϱ_1 und ϱ_2 und Addition:

$$a_{14}(\alpha_1\varrho_1 + \alpha_2\varrho_2) + a_{24}(\beta_1\varrho_1 + \beta_2\varrho_2) + a_{34}(\gamma_1\varrho_1 + \gamma_2\varrho_2) = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$$

und hieraus durch Multiplikation mit A_{44}'' nach (16) und (17):

$$-A' = A_{44}''(\varrho_1^2 + \varrho_2^2).$$

Die Quadratsumme der Multiplikatoren ϱ_1, ϱ_2 *hat daher den Wert:*

$$(18)\qquad \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = -\frac{A'}{A_{44}''}.$$

5. Die Gleichungen der Hauptebene. Da die rechten Seiten von (12) die Werte (16) haben, so genügt ein Scheitelpunkt den drei Gleichungen:

$$(19)\qquad \begin{cases} X_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}\dfrac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''} = 0, \\ X_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}\dfrac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''} = 0, \\ X_3 = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}\dfrac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''} = 0. \end{cases}$$

Es sind die Gleichungen von *drei Ebenen*, die jedoch alle drei zusammenfallen, weil nach (6); (7); (13) und (14) identisch:

$$\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 = 0,$$
$$\alpha_2 X_1 + \beta_2 X_2 + \gamma_2 X_3 = 0.$$

Die somit einzige *Ebene* (19) *gehört* aber nach (4) *zu den durch die unendlich ferne Mittelpunktsachse gehenden Ebenen.* Wir nennen sie *die Hauptebene* der Fläche.

6. Die Gleichungen der Scheitelachse. Die Scheitelpunkte der Fläche sind nunmehr diejenigen Punkte, die die Hauptebene (19) außer der unendlich fernen Mittelpunktsachse noch mit der Fläche (10) gemein hat. Die Gleichung (10) aber wird mittels (12):

$$g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0$$
$$= (\varrho_1\alpha_1 + \varrho_2\alpha_2)x_0 + (\varrho_1\beta_1 + \varrho_2\beta_2)y_0 + (\varrho_1\gamma_1 + \varrho_2\gamma_2)z_0 + g_4^0 = 0$$

oder mit Rücksicht auf (16) mit Weglassung des Index 0:

$$(20)\left(a_{41} + \frac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A_{44}''}\right)x + \left(a_{42} + \frac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A_{44}''}\right)y + \left(a_{43} + \frac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A_{44}''}\right)z + a_{44} = 0.$$

Für die Scheitelpunkte gelten daher die Gleichungen (19) und (20) zweier Ebenen. Sie bilden also eine *Scheitelachse, die durch die Gleichungen* (19) *und* (20) *dargestellt ist.*[94])

7. Nachweis einer bestimmten endlichen Scheitelachse. Damit die Scheitelachse endlich und bestimmt sei, dürfen die Ebenen (19) und (20) nicht parallel oder zusammenfallend sein, also die Unterdeterminanten der Koeffizienten von x, y, z in einer Gleichung (19) und in (20) nicht alle 0 sein. Nun ist:

$$\begin{aligned} \alpha_{26} - \alpha_{35} &= a_{14}a_{33} - a_{31}a_{34} + a_{14}a_{22} - a_{12}a_{24} \\ &= a_{14}A''_{44} - (a_{11}a_{14} + a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34}), \\ \alpha_{34} - \alpha_{16} &= a_{24}A''_{44} - (a_{21}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{23}a_{34}), \\ \alpha_{15} - \alpha_{24} &= a_{34}A''_{44} - (a_{31}a_{14} + a_{32}a_{24} + a_{33}a_{34}). \end{aligned}$$

Danach wird die Unterdeterminante der Koeffizienten von y und z in der ersten Gleichung (19) und in (20) mit Rücksicht auf die zweite Zeile (1):

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ 2a_{24} - \frac{a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{23}a_{34}}{A''_{44}} & 2a_{34} - \frac{a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34}}{A''_{44}} \end{vmatrix}$$
$$= 2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = 2\alpha_{14},$$

und ebenso der Koeffizienten von z und x, x und y: $2\alpha_{24}$, $2\alpha_{34}$. Bei Benutzung der zweiten oder dritten Gleichung (19) würde man $2\alpha_{15}$, $2\alpha_{25}$, $2\alpha_{35}$ oder $2\alpha_{16}$, $2\alpha_{26}$, $2\alpha_{36}$ erhalten. Es folgt daher zugleich (I § 48, (19)):

Die Richtungskosinus (die drei ersten Achsenkoordinaten) der Scheitelachse (19), (20) *sind:*

$$(21) \qquad q_{23} : q_{31} : q_{12} = \alpha_{14} : \alpha_{24} : \alpha_{34} = \alpha_{15} : \alpha_{25} : \alpha_{35} = \alpha_{16} : \alpha_{26} : \alpha_{36}.$$

Die *Scheitelachse* ist daher nach der dritten Zeile (1) *endlich und bestimmt.*

8. Die Hauptachsengleichung der Fläche. Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt x_0, y_0, z_0 der Scheitelachse als Anfangspunkt Ω, so wird in (5) nach (10), (11) und (12):

$$\begin{aligned} a'_{14} &= g_1^0\alpha_1 + g_2^0\beta_1 + g_3^0\gamma_1 = \varrho_1, \\ a'_{24} &= g_1^0\alpha_2 + g_2^0\beta_2 + g_3^0\gamma_2 = \varrho_2, \\ a'_{34} &= g_1^0\alpha_3 + g_2^0\beta_3 + g_3^0\gamma_3 = 0; \qquad a'_{44} = g^0 = 0. \end{aligned}$$

In bezug auf ein Koordinatensystem $\Omega\xi\eta\zeta$, dessen Anfangspunkt Ω ein beliebiger (endlicher) Punkt der Scheitelachse ist und dessen Achsen die Hauptachsenrichtungen der Fläche haben, hat deren Gleichung die Form:

$$(22) \qquad \lambda_3\zeta^2 + 2\varrho_1\xi + 2\varrho_2\eta = 0,$$

wo nach (18) und § 97, (6):

$$(23) \qquad \lambda_3 = A''_{44}, \quad \varrho_1^2 + \varrho_2^2 = -\frac{A'}{A''_{44}}.$$

Von den beiden Achsen ξ und η ist dabei nur die Ebene $\Omega\xi\eta$, die Hauptebene der Fläche, bestimmt.

9. Einführung der Scheitelachse. Da nun in der Hauptebene die Scheitelachse liegt, kann man diese als ξ-Achse nehmen, so daß $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$ die Werte (21) erhalten. Es ist aber (s. nachher bei (29)):

$$(24) \qquad a_{14}\alpha_{1k} + a_{24}\alpha_{2k} + a_{34}\alpha_{3k} = 0, \quad k = 4, 5, 6,$$

und damit nach (13):

$$(25) \qquad \varrho_1 = 0$$

und hiermit wieder nach (16):

$$(26) \qquad \alpha_2 = \frac{\alpha_{26} - \alpha_{35}}{A''_{44}\varrho_2}, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_{34} - \alpha_{16}}{A''_{44}\varrho_2}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_{15} - \alpha_{24}}{A''_{44}\varrho_2}.$$

Nimmt man daher nach (18) den Wert:

$$(27) \qquad \varrho_2 = \frac{\sqrt{-A'A''_{44}}}{A''_{44}},$$

der nach § 94, (35) reell ist, so ist durch die Wahl des positiven Wertes der Wurzel in (27) auch über die Pfeilspitze der Achse $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ in (26) verfügt, wo jene dasselbe Vorzeichen haben muß ($\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1$ nach § 94, (35); § 81, (10)). Hiernach ergibt sich (§ 97, (30)):

In bezug auf ein System $\Omega\xi\eta\zeta$, dessen Anfangspunkt Ω ein beliebiger Punkt der Scheitelachse, dessen ξ-Achse die Scheitelachse selbst und dessen $\xi\eta$-Ebene die Hauptebene der Fläche ist, lautet deren Gleichung:

$$(28) \qquad A''_{44}\xi^2 + 2\frac{\sqrt{-A'A''_{44}}}{A''_{44}}\eta = 0.$$

Die *Pfeilspitze* der η-Achse ist dabei durch die Formeln (26), (27) mit bestimmt.

10. Doppelpunkt der Fläche. Die Fläche hat, da nach (2) $A = 0$ und $A' \neq 0$ ist, nach § 79, (12) einen Doppelpunkt. Da nun wegen des Verschwindens von A_{14}, A_{24}, A_{34} die Determinantenentwicklungen (I Anm. 1, II, (6)):

$$(29) \qquad \begin{cases} a_{11}\alpha_{1k} + a_{12}\alpha_{2k} + a_{13}\alpha_{3k} = 0, \\ a_{21}\alpha_{1k} + a_{22}\alpha_{2k} + a_{23}\alpha_{3k} = 0, \\ a_{31}\alpha_{1k} + a_{32}\alpha_{2k} + a_{33}\alpha_{3k} = 0, \\ a_{41}\alpha_{1k} + a_{42}\alpha_{2k} + a_{43}\alpha_{3k} = 0 \end{cases}$$

für $k = 4, 5, 6$ gelten, so genügt der unendlich ferne Punkt der Scheitelachse $x : y : z : t = \alpha_{1k} : \alpha_{2k} : \alpha_{3k} : 0$ in (21) den Gleichungen des Doppelpunktes (§ 67, (32))[138].

Der unendlich ferne Punkt der Scheitelachse ist der Doppelpunkt der Fläche.

11. Flächen mit unendlich ferner Mittelpunktsebene. Hat die Fläche eine unendlich ferne Mittelpunktsebene, so kommt ihre Gleichung nach § 94, (27) auf:

(30) $$f(x, y, z, t) = (2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}t)t = 0$$

zurück, wo nach § 94, (43):

(31) $$a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2 = -A'' \neq 0.$$

Die Fläche besteht dann aus einer endlichen Ebene und der unendlich fernen Ebene. Wählt man die erstere als $\xi\eta$-Ebene des übrigens beliebigen Systems $\Omega\xi\eta\zeta$, setzt man also (I § 37, (17)):

(32) $$\zeta = \frac{a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + \frac{1}{2}a_{44}}{\sqrt{a_{14}^2 + a_{24}^2 + a_{34}^2}},$$

so geht die Gleichung der Fläche über in (§ 25, (31)):

(33) $$g(x, y, z) = 2\sqrt{-A''}\,\zeta = 0.$$

§ 99. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

1. Kanonische Gleichungen. Das *Gesamtergebnis* der vorstehenden Entwicklungen ist dies, daß die auf ein *rechtwinkliges Koordinatensystem Oxyz* bezogene Gleichung der Fläche zweiter Ordnung:

(1) $$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

durch Einführung eines neuen rechtwinkligen Systems $\Omega\xi\eta\zeta$ auf eine *kanonische Form* gebracht werden kann. Indem nämlich einerseits die neuen *Achsen* ξ, η, ζ die stets (eindeutig oder mehrdeutig) vorhandenen drei *Hauptachsenrichtungen* erhalten, verschwinden jedesmal die Produkte $\eta\zeta, \zeta\xi, \xi\eta$ aus der Gleichung der Fläche, bisweilen auch noch ein Teil der Quadrate ξ^2, η^2, ζ^2; indem andererseits der neue *Anfangspunkt* Ω in einen (endlichen) *Mittelpunkt* oder, falls solcher fehlt, in einen *Scheitelpunkt* verlegt wird, verschwinden die drei linearen Glieder oder ein Teil von ihnen mit dem konstanten Gliede.

Nach ihrem *eignen Range* (§ 81, (28)) und dem *Range ihrer unendlich fernen Kurve* (§ 93, (3)) *gehört jede Fläche* (1) *in ein Feld der folgenden Tabelle* und hat dann die dort angegebene *kanonische Gleichungsform* § 96, 6; § 97, (30); § 98, (28); (33). *Die Tabelle muß also alle Flächen zweiter Ordnung enthalten* (§ 26, (2)). Die bei § 97, (30) und § 98, (28) erledigten Vorzeichen der Quadratwurzeln kommen hierbei nicht weiter in Betracht.

(2)

Rang der Fläche: / Rang unendl. f. Kurve:	I. $A \neq 0$: Eigentl. Flächen 2. Ordnung.	II. $A = 0,\ A' \neq 0$: Kegel und Zylinder.	III. $A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$: Ebenenpaare.	IV. $A = 0,\ A' = 0,\ A'' = 0,\ A''' \neq 0$: Doppelebenen.
1. $A_{44} \neq 0$: Eigentl. Kurve 2. Ordnung.	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0$	$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0$	*	*
2. $A_{44} = 0,\ A'_{44} \neq 0$: Getr. Geradenpaar.	$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 - 2\sqrt{-\frac{A}{A'_{44}}}\,\xi = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + \frac{A'}{A'_{44}} = 0$	$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 = 0$	*
3. $A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} \neq 0$: Doppelgerade.	* *	$\lambda_3 \zeta^2 + 2\sqrt{-\frac{A'}{A''_{44}}}\,\eta = 0$	$\lambda_3 \zeta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0$	$\lambda_3 \zeta^2 = 0$
4. $A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} = 0$: Unbestimmt.	* *	* *	$2\sqrt{-A''}\,\zeta\tau = 0$	$\tau^2 = 0$

In den freibleibenden Feldern * und * * widersprechen sich nach § 79, (11), § 81, (18) und § 94, (29), (8); (40), (41) die Bedingungen der Kolonnen und die der Zeilen.

Die weitere Unterscheidung beruht auf den *Vorzeichen* der Koeffizienten.

2. Die Arten der Mittelpunktsflächen. Die in der Gleichung des Feldes I, 1:

$$(3)\qquad \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + \frac{A}{A_{44}} = 0,\quad A \neq 0,\quad A_{44} \neq 0,$$

zusammengefaßten Flächen sind die *Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung* (§ 96, (3)). Ihre Gleichung nimmt mit:

$$(4)\qquad \alpha = \frac{A}{A_{44}\lambda_1},\quad \beta = \frac{A}{A_{44}\lambda_2},\quad \gamma = \frac{A}{A_{44}\lambda_3}$$

die Form an:

$$(5)\qquad \frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + \frac{\zeta^2}{\gamma} + 1 = 0.$$

Dabei ist nach § 89, (37):

$$(4')\qquad \alpha\beta\gamma = \frac{A^3}{A_{44}^3\lambda_1\lambda_2\lambda_3} = A\left(\frac{A}{A_{44}^2}\right)^2.$$

Für die Vorzeichen von α, β, γ ergibt sich nun einerseits aus (4'):

wenn $A > 0$: $+ + +$ oder $- - +$,
wenn $A < 0$: $- + +$ oder $- - -$.

Andererseits aber sind die Koeffizienten α, β, γ, ebenso wie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nach § 89, (41) alle von einerlei Vorzeichen, wenn $A_{44}A_{44}''$ und A_{44}' beide positiv sind. Die Verbindung beider Angaben gibt für α, β, γ die Vorzeichen:

(6)

	$A > 0$	$A < 0$
$A_{44}A_{44}'' > 0,\ A_{44}' > 0$	$+ + +$	$- - -$
$A_{44}A_{44}''$ und A_{44}' nicht beide > 0	$- - +$	$- + +$

Mit Bestimmung der Vorzeichen von α, β, γ ist aber die Bedeutung der Gleichung (5) aus § 70, 1 bekannt:

Die Gattung der Mittelpunktsflächen umfaßt vier Arten, das imaginäre und reelle Ellipsoid, das ein- und zweischalige Hyperboloid.

Nach § 79, (9) ist unbedingt:

$$(7)\qquad A'A_{44} = A_{14}^2 + A_{24}^2 + A_{34}^2 + A_{44}^2 + AA_{44}'$$

und folgt daher, daß *unter der Voraussetzung* $A > 0$, $A_{44}' > 0$ stets A' *und* A_{44}, *also auch* $A'A_{44}''$ *und* $A_{44}A_{44}''$ *gleiches Vorzeichen haben.*

Man kann daher die Kolonne $A > 0$ der Tabelle (6) in folgender Weise in zwei Kolonnen auflösen, wobei wir zugleich die Größen α, β, γ je nach ihrem Vorzeichen als positive oder negative Quadrate bezeichnen:

(8)

		$A > 0$		$A < 0$
		$A' A''_{44} > 0$, $A'_{44} > 0$	$A' A''_{44}$, A'_{44} nicht beide > 0	
$A_{44} \neq 0$	$A_{44} A''_{44} > 0$, $A'_{44} > 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$	0	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$
	$A_{44} A''_{44}$, A'_{44} nicht beide > 0	0	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$

Hier bleiben die beiden Felder 0 frei, weil Kolonnen- und Zeilenbedingungen sich widersprechen.

Die Bedingungen: $A_{44} A''_{44} (A' A''_{44})$, A'_{44} *nicht beide* > 0 erfordern, daß *wenigstens eine der beiden Größen* < 0 *oder* $= 0$ *ist.*

3. Die Arten der Paraboloide. Die Gleichung des Feldes I, 2 der Tabelle (2):

$$\lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 - 2\sqrt{-\frac{A}{A'_{44}}}\,\xi = 0, \quad A \neq 0, \quad A_{44} = 0, \quad A'_{44} \neq 0, \tag{9}$$

in der nach § 89, (38):

$$\lambda_2 \lambda_3 = A'_{44}, \tag{10}$$

kann mit den Abkürzungen:

$$\beta = -\frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{A}{A'_{44}}}, \quad \gamma = -\frac{1}{\lambda_3}\sqrt{-\frac{A}{A'_{44}}} \tag{11}$$

in der Form:

$$\frac{\eta^2}{\beta} + \frac{\zeta^2}{\gamma} + 2\xi = 0 \tag{12}$$

geschrieben werden. Dann ist nach (10):

$$\beta\gamma = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_3}\left(-\frac{A}{A'_{44}}\right) = -\frac{A}{A'^2_{44}}. \tag{13}$$

Nun haben β und γ nach (11) gleiche oder verschiedene Vorzeichen, je nachdem λ_2 und λ_3 gleiche oder verschiedene haben. Man kann daher sowohl nach (10) als nach (13) über die Vorzeichen von β und γ entscheiden. *Sie sind gleich oder verschieden, je nachdem* $A'_{44} > 0$ *oder* < 0 *und auch, je nachdem* $A < 0$ *oder* $A > 0$. Die doppelte Form der Bedingung erklärt sich daraus, daß nach § 97, (7) A'_{44} *und* A *verschiedenes Vorzeichen* haben.

Indem wir die Art der Fläche (12) aus § 70, (24) entnehmen und wie in 2 β und γ als Quadrate bezeichnen, können wir *im Anschluß an die Kolonnenüberschriften von* (8) die folgende Tabelle aufstellen:

(14)

		$A>0$		$A<0$
		$A'A''_{44}>0,\ A'_{44}>0$	$A'A''_{44},\ A'_{44}$ nicht beide >0	
$A_{44}=0$	$A'_{44}>0$	0	0	$\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}+2\xi=0$
	$A'_{44}<0$	0	$\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}+2\xi=0$	0

In den Feldern 0 widersprechen sich Kolonnen- und Zeilenbedingungen teils unmittelbar, teils weil nach § 97, (7) $A'_{44}>0$ mit $A>0$ und $A'_{44}<0$ mit $A<0$ nicht verträglich ist.

4. Die Arten der Kegel. In der Gleichung des Feldes II, 1 der Tabelle (2):

(15) $$\lambda_1\xi^2+\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2=0;\quad A=0,\quad A'\neq 0,\quad A_{44}\neq 0,$$

sind nach § 89, (41) die drei Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3 von einerlei Vorzeichen oder nicht, je nachdem A'_{44} und $A_{44}A''_{44}$ beide positiv sind oder nicht. Die Fläche ist dementsprechend nach § 71, (1) ein *imaginärer* oder *elliptischer Kegel.*

Aus (7) ergibt sich nun für $A=0$, $A'\neq 0$, $A_{44}\neq 0$, daß A' *und* A_{44}, *also auch* $A'A''_{44}$ *und* $A_{44}A''_{44}$ *gleiches Vorzeichen haben.* Daher können wir, unter Anwendung einer doppelten Form der Bedingungen die Tabelle aufstellen:

(16)

		$A=0,\ A'\neq 0$	
		$A'A''_{44}>0,\ A'_{44}>0$	$A'A''_{44}, A'_{44}$ nicht beide >0
$A_{44}\neq 0$	$A_{44}A''_{44}>0,$ $A'_{44}>0$	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}+\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$	0
	$A_{44}A''_{44},\ A'_{44}$ nicht beide >0	0	$\frac{\xi^2}{\alpha^2}+\frac{\eta^2}{\beta^2}-\frac{\zeta^2}{\gamma^2}=0$

In den Feldern 0 widersprechen sich Kolonnen- und Zeilenbedingungen.

5. Die Arten der Zylinder. Die Gleichung des Feldes II, 2 der Tabelle (2):

(17) $$\lambda_2\eta^2+\lambda_3\zeta^2+\frac{A'}{A'_{44}}=0,\quad A=0,\quad A'\neq 0;\quad A_{44}=0,\quad A'_{44}\neq 0,$$

in der nach § 89, (37):

(18) $$\lambda_2+\lambda_3=A''_{44},\quad \lambda_2\lambda_3=A'_{44}$$

ist, kann mit:

(19) $$\beta = \frac{A'}{\lambda_3 A_{44}}, \quad \gamma = \frac{A'}{\lambda_3 A'_{44}}$$

in der Form:

(20) $$\frac{\eta^2}{\beta} + \frac{\zeta^2}{\gamma} + 1 = 0$$

geschrieben werden (§ 53, (29); (30)). Dann ist nach (18):

(21) $$\beta + \gamma = \frac{A' A''_{44}}{A'^2_{44}},$$ (22) $$\beta\gamma = \frac{1}{A'_{44}}\left(\frac{A'}{A'_{44}}\right)^2.$$

Nach (22) sind β und γ von gleichen Vorzeichen für $A'_{44} > 0$, von ungleichen für $A'_{44} < 0$. Im ersteren Falle aber sind nach (21) beide positiv für $A'A''_{44} > 0$ und beide negativ für $A'A''_{44} < 0$. Die Koeffizienten β und γ haben daher, von der Reihenfolge abgesehen, die Vorzeichen:

(23) $$\begin{cases} \text{für } A'_{44} > 0, \quad A'A''_{44} > 0 : + +, \\ \text{für } A'_{44} > 0, \quad A'A''_{44} < 0 : - -, \\ \text{für } A'_{44} < 0 \qquad\qquad\qquad : + -. \end{cases}$$

Die Bedingungen der zweiten Zeile (23) sind aber durch:

$$A'_{44} > 0, \quad A'_{44} \text{ und } A'A''_{44} \text{ nicht beide } > 0$$

ersetzbar. Denn diese lassen nur zu, daß $A'A''_{44} < 0$ oder $= 0$. Das letztere ist nicht möglich, da $A' \neq 0$ nach (17), und A''_{44} nach § 19, (23), wo A''_{44} und A'_{44} mit A'' und A' bezeichnet sind, bei $A'_{44} > 0$ nicht verschwinden kann.

Wir können danach im Anschluß an (16) die folgende Tabelle aufstellen, der wir gleichzeitig noch den parabolischen Zylinder aus Feld II, 3 der Tabelle (2) mit $A'A''_{44} < 0$:

(24) $$\lambda_3\zeta^2 + 2\sqrt{-\frac{A'}{A''_{44}}}\,\eta = 0; \; A = 0,\; A' \neq 0;\; A_{44} = 0,\; A'_{44} = 0,\; A''_{44} \neq 0;\; \lambda_3 = A''_{44}$$

anreihen (§ 53, (34)):

(25)

		$A'A''_{44} > 0,\; A'_{44} > 0$	$A'A''_{44},\; A'_{44}$ nicht beide > 0
$A_{44} = 0,\; A'_{44} \neq 0$	$A'_{44} > 0$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$
	$A'_{44} < 0$	0	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$
$A_{44} = 0,\; A'_{44} = 0$		0	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 2\eta = 0$

6. Die Arten der Ebenenpaare. Die Gleichung des Feldes III, 2 der Tabelle (2):

$$(26)\quad \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 = 0, \quad A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' \neq 0; \quad A_{44} = 0, \quad A'_{44} \neq 0,$$

in der, wie in (18):

$$(27)\qquad \lambda_2\lambda_3 = A'_{44},$$

stellt ein *imaginäres* oder *reelles Ebenenpaar* dar, *je nachdem* $A'_{44} > 0$ *oder* $A'_{44} < 0$.

Da aber beim Verschwinden aller A_{kl} die Gleichungen gelten (I Anm. 1, III, (22)):

$$(28)\quad \begin{cases} \alpha_{22}\alpha_{33} = \alpha_{23}^2, & \alpha_{33}\alpha_{11} = \alpha_{31}^2, \quad \alpha_{11}\alpha_{22} = \alpha_{12}^2, \quad \alpha_{11}\alpha_{44} = \alpha_{14}^2, \\ \alpha_{22}\alpha_{44} = \alpha_{24}^2, & \alpha_{33}\alpha_{44} = \alpha_{34}^2, \quad \ldots, \quad \alpha_{55}\alpha_{66} = \alpha_{56}^2, \end{cases}$$

also alle α_{kl}, soweit sie nicht verschwinden, dasselbe Vorzeichen haben, so haben auch A'_{44} *und* A'' (s. unten (32); (33)), die für (26) nicht verschwinden, *beide dasselbe Vorzeichen.* Das Ebenenpaar (26) ist daher auch imaginär oder reell, *je nachdem* $A'' > 0$ *oder* $A'' < 0$.

Die Gleichung des Feldes III, 3 der Tabelle (2):

$$(29)\qquad \lambda_3\zeta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0 \quad \text{oder} \quad \zeta^2 + \frac{A''}{A''^2_{44}} = 0,$$

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' \neq 0; \quad A_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0, \quad A''_{44} \neq 0,$$

stellt ein *Paar von Parallelebenen* dar, die *imaginär* oder *reell* sind, *je nachdem* $A'' > 0$ *oder* $A'' < 0$.

Für die Gleichung des Feldes III, 4 ist nach § 94, (43): $A'' < 0$.

Danach erhalten wir folgende Tabelle:

(30)

		$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$	
		$A'' > 0$	$A'' < 0$
$A_{44} = 0,\ A'_{44} \neq 0$	$A'_{44} > 0$	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0$	0
	$A'_{44} < 0$	0	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0$
$A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} \neq 0$		$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$
$A_{44} = 0,\ A'_{44} = 0,\ A''_{44} = 0$			$\zeta\tau = 0$

7. Gesamtübersicht der Arten der Flächen zweiter Ordnung. Die Tabellen (8) und (14) lassen sich wegen der übereinstimmenden Kolonnenüberschriften unmittelbar in die erste Kolonne der Tabelle (2) einreihen, (16) und (25) ebenso in die zweite, (30) in die dritte Kolonne der Tabelle (2). So ergibt sich[95]):

Die auf ein rechtwinkliges System Oxyz bezogene Gleichung (1) *stellt unter den folgenden Bedingungen die folgende Art von Flächen zweiter Ordnung dar* (vgl. § 26, (19)):

(31)

		$A \neq 0$: Eigentliche Flächen.		
		$A > 0$		$A < 0$:
		$A'_{44} > 0,\ A' A''_{44} > 0$: I. Imag. Flächen	$A'_{44},\ A' A''_{44}$ nicht beide > 0: II. Geradlinige Fl.	III. Nichtgeradl. Fl.
$A_{44} \neq 0$: Eigentl. Kegelschn.	$A'_{44} > 0$, $A_{44} A''_{44} > 0$: 1. Imag. Kegelschn.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$ Imag. Ellipsoid		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Ellipsoid
	A'_{44}, $A_{44} A''_{44}$ nicht beide > 0: 2. Reell. Kegelschn.		$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Einschal. Hyperb.	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Zweischal. Hyperb.
$A_{44} = 0$, $A'_{44} \neq 0$: Eigentl. Linienpaar	$A'_{44} > 0$: 3. Imag. Linienpaar			$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 2\xi = 0$ Ellipt. Paraboloid
	$A'_{44} < 0$: 4. Reell. Linienpaar		$\frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 2\xi = 0$ Hyp. Paraboloid	
$A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} \neq 0$: 5. Doppellinie				
$A_{44} = 0$, $A'_{44} = 0$, $A''_{44} = 0$: 6. Unbestimmt				

Hier ist A die *Determinante* § 66, (15) der Fläche (1), und bedeuten A_{kl} und α_{kl} deren *Unterdeterminanten* dritten und zweiten Grades § 66, 6. Ferner ist:

$$(32) \quad A' = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44}, \quad A'' = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} + \alpha_{44} + \alpha_{55} + \alpha_{66}, \quad A''' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44};$$

$$(33) \quad A'_{44} = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}, \quad A''_{44} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

$A = 0,\ A' \neq 0$: Kegel		$A = 0,\ A' = 0,\ A'' \neq 0$: Ebenenpaare.		$A = 0,\ A' = 0,\ A'' = 0,\ A''' \neq 0$:
$A'_{44} > 0$, $A'A''_{44} > 0$:	A'_{44}, $A'A''_{44}$ nicht beide > 0:	$A'' > 0$:	$A'' < 0$:	
IV. Imag. Kegel	V. Reelle Kegel	VI. Im. Ebenenp.	VII. Reell. Eb.-P.	VIII. Dpp.-Eb.
$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0$ Imag. ell. Kegel				
	$\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0$ Ellipt. Kegel			
$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$ Imag. ell. Zylind.	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Ellipt. Zylind.	$\frac{\eta^2}{\beta^2} + \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0$ Imag. Ebenenp.		
	$\frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ Hyperb. Zylind.		$\frac{\eta^2}{\beta^2} - \frac{\zeta^2}{\gamma^2} = 0$ Reell. Ebenenp.	
	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 2\eta = 0$ Parab. Zylind.	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} + 1 = 0$ Im. Paralleleb.-P.	$\frac{\zeta^2}{\gamma^2} - 1 = 0$ R. Paralleleb.-P.	$\zeta^2 = 0$ Endl. Dpp.-Eb.
			$\zeta(\tau) = 0$ Endl. + u. f. Eb.	$(\tau^2) = 0$ u. f. Dopp.-Eb.

8. Invarianten und Bedingungen der Art im rechtwinkligen System. *Die Bedingungen des Ranges:* $A \neq 0$; $A = 0$, $A' \neq 0$; $A = 0$, $A' = 0$, $A'' \neq 0$; $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$, $A''' \neq 0$ in der obersten Zeile der Tabelle (31), die auch in der Form § 81, (27) geschrieben werden können, *sind,* wie dort bemerkt, *in jedem recht- und schiefwinkligen System dieselben.*

Die übrigen in der Tabelle (31) vorkommenden Ausdrücke:

$$(34) \qquad A,\ A_{44},\ A'_{44},\ A''_{44}$$

sind nach § 91, (17) sämtlich Invarianten der Fläche im rechtwinkligen System. Das gleiche gilt von A' und A'' im allgemeinen nicht, jedoch sind die Vorzeichen dieser Größen, soweit sie in die Tabelle eingehen, nach den vorstehenden Entwicklungen ebenfalls invariant. In der Tat hat z. B. A'' nach 6 im Falle (26) immer das Vorzeichen der Invariante A'_{44}.

(35) Über den Kolonnen I, II kann nach 2 für $A'A''_{44}$ auch $A_{44}A''_{44}$, über IV, V nach 4 bei den Zeilen 1, 2 für $A'A''_{44}$ auch $A_{44}A''_{44}$ und über VI, VII nach 6 bei den Zeilen 3, 4 für $A'' \gtrless 0$ auch $A'_{44} \gtrless 0$ stehen (§ 26, (19)).

§ 100. Unterarten der Flächen zweiter Ordnung.

1. Schnittpunkte der Fläche mit dem Kugelkreis. Die unendlich ferne Kurve der Fläche zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}x^2 + a_{33}z^2 + \cdots + 2a_{34}zt + a_{44}t^2 = 0$$

hat nach § 93, (2) in bezug auf ein System $\Omega\xi\eta\zeta$ der Hauptachsenrichtungen unabhängig von Ω die Gleichungen:

$$(2) \qquad \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 = 0, \quad \tau = 0.$$

Sie hat daher mit dem imaginären Kugelkreis § 91, (23):

$$(3) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0$$

vier getrennte Punkte S_1, S_2, S_3, S_4 gemein, nämlich:

$$(4) \qquad \xi^2 : \eta^2 : \zeta^2 = \lambda_2 - \lambda_3 : \lambda_3 - \lambda_1 : \lambda_1 - \lambda_2, \quad \tau = 0,$$

wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 (§ 90, 7) alle verschieden sind; dagegen zweimal *zwei zusammenfallende* S_1, S_2, nämlich:

$$(5) \qquad \xi^2 + \eta^2 = 0, \quad \zeta^2 = 0, \quad \tau = 0,$$

oder was dasselbe sagt, eine *doppelte Berührung,* wenn zwei gleiche Wurzeln $\lambda_1 = \lambda_2$ und eine verschiedene λ_3 vorliegen; sie enthält endlich *alle Punkte* des Kugelkreises, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

2. Dreiachsige, Rotations- und Kugelflächen. Diesen drei Fällen entsprechend hat die Fläche nach § 90, 3, 5, 6 *drei bestimmte*

Hauptachsenrichtungen oder nur *eine* oder *keine bestimmte*, so daß sie bezüglich als *dreiachsig, einachsig, unbestimmt-achsig* bezeichnet werden kann.

Die Schnittkurve der Fläche mit einer Ebene des Raumes enthält nach § 91, 8 die imaginären Kreispunkte der Ebene, ist also nach § 26, 6 ein Kreis, im ersten obigen Falle, wenn sie durch zwei von den vier Punkten S_1, S_2, S_3, S_4 geht; im zweiten, wenn sie durch die beiden Punkte S_1, S_2 geht; im dritten stets. Es folgt daher (vgl. § 117, **10**):

I. *Die dreiachsigen Flächen haben sechs Systeme paralleler Kreisschnittebenen, die je durch eine der sechs Seiten des vollständigen Vierecks der vier Schnittpunkte der unendlich fernen Kurve der Fläche mit dem imaginären Kugelkreis gehen.*[150])

II. *Die einachsigen Flächen haben ein System paralleler Kreisschnittebenen, das durch die Sehne der beiden Berührungspunkte der unendlich fernen Kurve der Fläche mit dem imaginären Kugelkreis geht* (§ 117, **14**). Es sind die *Rotationsflächen* im allgemeinen Sinne des Wortes.[137])

III. *Die unbestimmt-achsigen Flächen haben nur Kreisschnitte.* Es sind die *Kugelflächen* im allgemeinen Sinne des Wortes (§ 69, **10**).

Daß es nur diese drei Möglichkeiten gibt, beruht wesentlich auf § 50, **15**—**17**.

3. Bedingungen der Rotations- und Kugelflächen. Da die Unterscheidung der drei Fälle nur von der Gleichheit oder Ungleichheit der Wurzeln der kubischen Gleichung des Hauptachsenproblems abhängt, so folgt sofort aus § 89, 7[137]):

Die Fläche (1) *ist eine Rotationsfläche, wenn entweder keiner der drei Koeffizienten* a_{23}, a_{31}, a_{12} *verschwindet und dann:*

$$(6)\qquad a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23} : a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31} : a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12} = a_{23} : a_{31} : a_{12};$$

oder zwei, etwa a_{31} *und* a_{12}, *verschwinden und dann:*

$$(7)\qquad (a_{11} - a_{22})(a_{11} - a_{33}) - a_{23}^2 = 0;$$

oder alle drei verschwinden und dann zwei von den Koeffizienten a_{11}, a_{22}, a_{33} *gleich sind.*

Sie ist eine Kugel, wenn:

$$(8)\qquad a_{11} = a_{22} = a_{33};\quad a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

4. Der Berührungskegel der Kugel. Für den Berührungskegel der Kugel § 69, (17) ist:

$$(9)\qquad \begin{cases} a_{11} = (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 - r^2, & a_{23} = -(y_0 - b)(z_0 - c), \\ a_{22} = (z_0 - c)^2 + (x_0 - a)^2 - r^2, & a_{31} = -(z_0 - c)(x_0 - a), \\ a_{33} = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2, & a_{12} = -(x_0 - a)(y_0 - b), \end{cases}$$

und daher:

$$(10)\quad \begin{cases} a_{31}a_{12} - a_{11}a_{23} = -k(x_0, y_0, z_0)a_{23}, \quad a_{12}a_{23} - a_{22}a_{31} = -k(x_0, y_0, z_0)a_{31}, \\ \qquad a_{23}a_{31} - a_{33}a_{12} = -k(x_0, y_0, z_0)a_{12}. \end{cases}$$

Der Berührungskegel ist also nach (6) ein *Rotationskegel.*

5. Bedingungen der gleichseitigen und dual gleichseitigen Flächen. Mit Rücksicht auf § 71, **10** *bezeichnen wir allgemein die Fläche* (1) *als gleichseitig,* wenn zwischen den Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der kubischen Gleichung des Hauptachsenproblems (§ 90, (12)) die Beziehung besteht:

$$(11)\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,$$

und als *dual gleichseitig,* wenn im Falle $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$:

$$(12)\qquad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Danach folgt aus § 89, (37):

Die Fläche (1) *ist gleichseitig oder dual gleichseitig, wenn bezüglich:*

$$(13)\qquad A''_{44} = 0 \qquad \textit{oder} \qquad (14)\qquad A'_{44} = 0 \quad (A_{44} \neq 0).$$

Die Bedingung (13) ist nur mit der zweiten und, da für $\lambda_1 = 0$ neben $A_{44} = 0$, $A''_{44} = \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ nicht $A'_{44} = \lambda_2\lambda_3 > 0$ sein kann, mit der vierten und sechsten Zeile der Tabelle § 99, (31); die Bedingung (14) nur mit der zweiten Zeile verträglich.[164])

Gleichseitig können daher die beiden Hyperboloide, der elliptische Kegel, das hyperbolische Paraboloid, der hyperbolische Zylinder und das reelle Ebenenpaar, dual gleichseitig die beiden Hyperboloide und der elliptische Kegel sein.

6. Gleichseitige und dual gleichseitige Berührungskegel. Für den Berührungskegel § 70, (12) des *Ellipsoids* oder *Hyperboloids:*

$$(15)\qquad g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ist:

$$(16)\quad \begin{cases} a_{11} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right), & \alpha_{11} = \frac{g(x_0, y_0, z_0)}{a^2 b^2 c^2}(x_0^2 - a^2), \\ a_{22} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2} + \frac{x_0^2}{a^2} - 1\right), & \alpha_{22} = \frac{g(x_0, y_0, z_0)}{a^2 b^2 c^2}(y_0^2 - b^2), \\ a_{33} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right), & \alpha_{33} = \frac{g(x_0, y_0, z_0)}{a^2 b^2 c^2}(z_0^2 - c^2), \end{cases}$$

so daß die Bedingungen (13) und (14) werden[165]):

$$(17)\qquad \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x_0^2}{a^2} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{y_0^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

$$(18)\qquad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Der Ort der Spitzen x_0, y_0, z_0 aller gleichseitigen Berührungskegel des Ellipsoids oder Hyperboloids (15) *ist das Ellipsoid oder Hyperboloid* (17), *aller dual gleichseitigen die Kugel* (18).

Für den Berührungskegel § 70, (34) des Paraboloids:

$$g(x, y, z) = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0 \tag{19}$$

ist:

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{11} = -1, & \alpha_{11} = \frac{g(x_0, y_0, z_0)}{b^2c^2} 2x_0, \\ a_{22} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2} + 2x_0\right), & \alpha_{22} = -\frac{g(x_0, y_0, z_0)}{b^2c^2} b^2, \\ a_{33} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2} + 2x_0\right), & \alpha_{33} = -\frac{g(x_0, y_0, z_0)}{b^2c^2} c^2, \end{array}\right. \tag{20}$$

so daß die Bedingungen (13) und (14) werden[66]):

$$\frac{1}{b^2c^2}(y_0^2 + z_0^2) + 2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) x_0 = 1, \tag{21}$$

$$2x_0 - b^2 - c^2 = 0. \tag{22}$$

Der Ort der Spitzen x_0, y_0, z_0 aller gleichseitigen Berührungskegel des Paraboloids (19) *ist das Rotationsparaboloid* (21), *aller dual gleichseitigen die Ebene* (22).

7. Bedingungen der orthogonalen und dual orthogonalen Flächen. Haben zwei von den vier Punkten (4), etwa S_1 und S_2, die Koordinaten:

$$\left\{\begin{array}{lll} \xi = \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}, & \eta = \sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}, & \zeta = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}; \\ \xi = -\sqrt{\lambda_2 - \lambda_3}, & \eta = \sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}, & \zeta = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}, \end{array}\right. \tag{23}$$

so ist die Gleichung der Seite S_1S_2 des vollständigen Vierecks $S_1S_2S_3S_4$ in laufenden Punktkoordinaten ξ, η, ζ der unendlich fernen Ebene:

$$\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \eta - \sqrt{\lambda_3 - \lambda_1} \cdot \zeta = 0. \tag{24}$$

Sie ist in bezug auf den Kugelkreis (3) die Polare p des Punktes (§ 84, (15)):

$$\xi_0 = 0, \quad \eta_0 = \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad \zeta_0 = -\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}, \tag{25}$$

der umgekehrt der Pol P der Geraden (24) ist. Er liegt nun auf der Kurve (2), wenn:

$$\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) = 0$$

oder:

$$(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) = 0. \tag{26}$$

Sind also $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ verschieden, so ist mit Hinzufügung der entsprechenden Faktoren:

$$(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = 0 \tag{27}$$

die Bedingung, daß der Pol P einer Seite p des vollständigen Vierecks $S_1 S_2 S_3 S_4$ in (4) *auf der Kurve* (2) *liegt.* Alle durch den Punkt P gehenden Geraden, darunter *zwei Erzeugende* der Fläche (1) sind also (§ 84, 6, V') zu allen durch p gehenden Ebenen, also nach 2 *zu einem System von Kreisschnittebenen der Fläche* (1) *senkrecht.* Die Fläche heißt dann (§ 64, 5) *orthogonal.*

Sie heißt entsprechend *dual orthogonal* (§ 82, (55)), wenn mit $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$:

$$(28) \quad (\lambda_3 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 \lambda_3)(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 - \lambda_3 \lambda_1)(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 - \lambda_1 \lambda_2) = 0.$$

Die linken Seiten der Gleichungen (27); (28) drücken sich aber als symmetrische Funktionen der Wurzeln der kubischen Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ nach § 89, (37) rational in deren Koeffizienten aus. Auf diese Weise ergibt sich:

Die Fläche (1) *ist orthogonal, wenn:*

$$(29) \qquad A_{44}''^3 - 4 A_{44}' A_{44}'' + 8 A_{44} = 0,$$

und dual orthogonal, wenn:

$$(30) \qquad A_{44}'^3 - 4 A_{44} A_{44}' A_{44}'' + 8 A_{44}^2 = 0 \; (A_{44} \neq 0).$$

8. **Das orthogonale Hyperboloid als Erzeugnis kongruenter Ebenenbüschel.** Die Gleichung eines Ebenenbüschels, das die z'-Achse eines rechtwinkligen Systems $O'x'y'z'$ als Achse hat, lautet:

$$(31) \qquad x' \operatorname{tg} \varphi - y' = 0,$$

wo φ der Winkel der laufenden Ebene des Büschels gegen die $z'x'$-Ebene ist (I § 2, (13)).

Seien nun g und g' zwei beliebige windschiefe Gerade und $AA' = 2e$ ihr kürzester Abstand (I § 44, 7). Man wähle dann $A'A$ als x-Achse und den Mittelpunkt von $A'A$ als Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Systems $Oxyz$ (Fig. 158 in § 64 mit e für a). In der zu den beiden Geraden g und g' parallelen yz-Ebene lege man die y- und z-Achse in die Halbierungslinien der senkrechten Projektionen von g und g' auf die yz-Ebene. Die beiden Geraden erhalten dann die Gleichungen:

$$(32) \qquad \begin{aligned} &(g) \quad x - e : y : z = 0 : \beta : \gamma, \\ &(g') \quad x + e : y : z = 0 : \beta : -\gamma, \end{aligned}$$

wobei:

$$(33) \qquad \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

sein soll. Durch die Substitution:

$$(34) \qquad x' = x - e, \quad y' = \gamma y - \beta z, \quad z' = \beta y + \gamma z$$

geht man zu einem rechtwinkligen System $Ax'y'z'$ über, dessen x'-Achse in die x-Achse und dessen z'-Achse in die Gerade g fällt.

Das auf dieses System bezogene Büschel (31) erhält daher im System $Oxyz$ die Gleichung:

$$(x - e)\operatorname{tg}\varphi - (\gamma y - \beta z) = 0. \tag{35}$$

Ebenso ergibt sich als Gleichung eines Ebenenbüschels mit der Achse g':

$$(x + e)\operatorname{tg}\varphi' + (\gamma y + \beta z) = 0, \tag{36}$$

wo φ' die entsprechende Bedeutung hat wie φ. Mit der Annahme:

$$\varphi' = \alpha + \varepsilon\varphi, \tag{37}$$

wo α ein konstanter Winkel und $\varepsilon = \pm 1$ ist, werden die beiden Büschel (35) und (36) projektiv kongruent aufeinander bezogen (§ 38, 8).

Die Gleichungen (35) *und* (36) *stellen dann zwei beliebig im Raume gelegene kongruente Ebenenbüschel dar.*

Man kann sie auch in der Form schreiben:

$$(x - e)\sin\varphi - (\gamma y - \beta z)\cos\varphi = 0, \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\{(x + e)\cos\alpha - (\gamma y + \beta z)\sin\alpha\}\sin\varphi \\ + \{(x + e)\sin\alpha + (\gamma y + \beta z)\cos\alpha\}\cos\varphi = 0.\end{aligned} \tag{39}$$

Durch Elimination von φ erhält man als *Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen beider Büschel* die Fläche zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}(x - e)\{(x + e)\sin\alpha + (\gamma y + \beta z)\cos\alpha\} \\ + \varepsilon\{(x + e)\cos\alpha - (\gamma y + \beta z)\sin\alpha\}(\gamma y - \beta z) = 0\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\{x^2 - e^2 - \varepsilon(\gamma^2 y^2 - \beta^2 z^2)\}\sin\alpha \\ + \{(1+\varepsilon)\gamma xy + (1-\varepsilon)\beta zx - (1-\varepsilon)e\gamma y - (1+\varepsilon)e\beta z\}\cos\alpha = 0.\end{aligned} \tag{40}$$

Je nachdem $\varepsilon = 1$ oder -1 ist, erhält diese Gleichung die beiden Formen:

$$x^2 - \gamma^2 y^2 + \beta^2 z^2 + 2\operatorname{ctg}\alpha(\gamma xy - e\beta z) - e^2 = 0,$$
$$x^2 + \gamma^2 y^2 - \beta^2 z^2 + 2\operatorname{ctg}\alpha(\beta zx - e\gamma y) - e^2 = 0.$$

Da sich diese nur durch Vertauschung von βz und γy unterscheiden, so genügt es, die erste beizubehalten, für die wir $\operatorname{ctg}\alpha = C$ setzen:

$$x^2 - \gamma^2 y^2 + \beta^2 z^2 + 2C(\gamma xy - e\beta z) - e^2 = 0. \tag{41}$$

Für diese Fläche ist mit Rücksicht auf (33):

$$\begin{cases} A = e^2\beta^2\gamma^2(1 + C^2)^2, \quad A_{44} = -\beta^2\gamma^2(1 + C^2), \\ A'_{44} = -\beta^2\gamma^2 + \beta^2 - \gamma^2(1 + C^2) = \beta^4 - \gamma^2(1 + C^2), \\ A''_{44} = 1 - \gamma^2 + \beta^2 = 2\beta^2. \end{cases} \tag{42}$$

Da hiermit ((29); § 99, (35)):

$$A > 0, \quad A_{44} A_{44}'' < 0; \quad A_{44}''^3 - 4 A_{44}' A_{44}'' + 8 A_{44} = 0,$$

ist die Fläche ein orthogonales einschaliges Hyperboloid. In der Tat wird die kubische Gleichung des Hauptachsenproblems:

$$(43) \qquad \Delta(\lambda) = (\beta^2 - \lambda)(\lambda^2 - \beta^2\lambda - \gamma^2(1 + C^2)) = 0,$$

also:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \beta^2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\gamma^2(1 + C^2), \quad \lambda_3 = \beta^2:$$

$$(44) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0.$$

Zwei projektiv kongruente Ebenenbüschel erzeugen als Ort der Schnittlinien entsprechender Ebenen ein orthogonales einschaliges Hyperboloid (vgl. § 38, 8; 9).[165])

9. Das orthogonale Hyperboloid als Ort eines Punktes mit konstantem Abstandsverhältnis von zwei Geraden. Die Bedingung dafür, daß ein Punkt x, y, z von den beiden Geraden (32) Abstände habe, die in dem konstanten Verhältnis μ stehen, lautet (I § 43, (20)):

$$(\beta z - \gamma y)^2 + (x - e)^2 = \mu^2 \{(\beta z + \gamma y)^2 + (x + e)^2\}$$

oder:

$$(45) \quad (1 - \mu^2)\{x^2 + \gamma^2 y^2 + \beta^2 z^2 + e^2\} - 2(1 + \mu^2)\{\beta\gamma y z + e x\} = 0.$$

Der *Ort des Punktes* ist also eine *Fläche zweiter Ordnung*, für welche die x-Achse eine Hauptachse und (§ 95, (3)), falls $\mu^2 \neq 1$:

$$(46) \qquad x_0 = \frac{1 + \mu^2}{1 - \mu^2} e, \; y_0 = 0, \; z_0 = 0$$

der Mittelpunkt ist. Die Koeffizienten der Gleichung (45) sind:

$$(47) \quad a_{11} = 1 - \mu^2, \; a_{22} = (1 - \mu^2)\gamma^2, \; a_{33} = (1 - \mu^2)\beta^2, \; a_{23} = -(1 + \mu^2)\beta\gamma,$$
$$a_{31} = a_{12} = 0, \; a_{14} = -(1 + \mu^2)e, \; a_{24} = a_{34} = 0, \; a_{44} = (1 - \mu^2)e^2.$$

Demnach wird mit Rücksicht auf (33):

$$(48) \qquad \alpha_{11} = -4\beta^2\gamma^2\mu^2, \quad \alpha_{22} = (1 - \mu^2)^2\beta^2, \quad \alpha_{33} = (1 - \mu^2)^2\gamma^2,$$

$$(49) \qquad A_{44}'' = 2(1 - \mu^2), \quad A_{44}' = -4\beta^2\gamma^2\mu^2 + (1 - \mu^2)^2,$$
$$A_{44} = -4\beta^2\gamma^2\mu^2(1 - \mu^2) \text{ (s. auch (55))},$$

$$(50) \qquad A = 16 e^2 \beta^2 \gamma^2 \mu^4.$$

Hiernach ist für $\mu^2 \neq 1$:

$$(51) \qquad A > 0, \; A_{44} A_{44}'' < 0, \; A_{44}''^3 - 4 A_{44}' A_{44}'' + 8 A_{44} = 0$$

und für $\mu^2 = 1$ ((13); § 99, (31)):

$$(52) \qquad A > 0, \quad A_{44} = 0, \quad A_{44}' < 0, \quad A_{44}'' = 0.$$

Der Ort eines Punktes, für den das Verhältnis der Abstände von zwei festen windschiefen Geraden konstant $=\mu$ *bleibt, ist ein orthogonales einschaliges Hyperboloid für* $\mu \neq 1$ *und ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid für* $\mu = 1$.[165])

10. Die festen Geraden als reziproke Polaren. Zwischen zwei harmonischen Polen x', y', z' und x'', y'', z'' der Fläche (45) besteht nach § 68, (8) die Beziehung:

$$(53)\qquad \begin{aligned}&(1-\mu^2)(x'x''+\gamma^2 y'y''+\beta^2 z'z''+e^2)\\ &\quad-(1+\mu^2)(\beta\gamma(y'z''+z'y'')+e(x'+x''))=0.\end{aligned}$$

Sie ist identisch in s' und s'' erfüllt für:

$$(54)\qquad x'=e,\quad y'=\beta s',\quad z'=\gamma s';\quad x''=-e,\quad y''=\beta s'',\quad z''=-\gamma s'',$$

also (I § 43, (2)) für zwei beliebige Punkte der Geraden (32). Jeder Punkt der einen Geraden ist also harmonischer Pol jedes Punktes der andern oder (§ 68, **15**, III):

Die beiden festen Geraden (32) *sind reziproke Polaren der Fläche* (45).

11. Die festen Geraden als Fokalachsen. Die Unterdeterminanten dritten Grades der Elemente (47) sind:

$$(55)\qquad \begin{cases} A_{11}=-4e^2\beta^2\gamma^2\mu^2(1-\mu^2),\ A_{22}=-4e^2\beta^2\mu^2(1-\mu^2),\\ \qquad A_{33}=-4e^2\gamma^2\mu^2(1-\mu^2),\ A_{23}=-4e^2\beta\gamma\mu^2(1+\mu^2),\\ A_{31}=A_{12}=0,\ A_{14}=-4e\beta^2\gamma^2\mu^2(1+\mu^2),\ A_{24}=A_{34}=0,\\ \qquad A_{44}=-4\beta^2\gamma^2\mu^2(1-\mu^2).\end{cases}$$

Daher lautet die Gleichung der Fläche (45) in Ebenenkoordinaten (§ 78, (11)):

$$(56)\qquad (1-\mu^2)\left\{u^2+\frac{v^2}{\gamma^2}+\frac{w^2}{\beta^2}+\frac{1}{e^2}\right\}+2(1+\mu^2)\left\{\frac{vw}{\beta\gamma}+\frac{u}{e}\right\}=0.$$

Für zwei harmonische Polarebenen u', v', w', s' und u'', v'', w'', s'' ist (§ 78, (19)):

$$(57)\qquad \begin{aligned}&(1-\mu^2)\left\{u'u''+\frac{v'v''}{\gamma^2}+\frac{w'w''}{\beta^2}+\frac{s's''}{e^2}\right\}\\ &\quad+(1+\mu^2)\left\{\frac{v'w''+v''w'}{\beta\gamma}+\frac{u's''+u''s'}{e}\right\}=0.\end{aligned}$$

Wendet man diese Beziehung auf zwei Ebenen:

$$(58)\qquad \begin{aligned}&u'=\operatorname{tg}\varphi,\quad v'=-\gamma,\quad w'=\beta,\quad s'=-e\operatorname{tg}\varphi;\\ &u''=\operatorname{tg}\varphi_1,\ v''=-\gamma,\ w''=\beta,\ s''=-e\operatorname{tg}\varphi_1\end{aligned}$$

des durch die Gerade (32) gehenden Büschels (35) an, so kommt sie auf (§ 8, (30)):

$$1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varphi_1 = 0 \tag{59}$$

zurück, und ebenso für zwei Ebenen φ' und φ_1' des Büschels (36).

Die Involution harmonischer Polarebenen, welche die Fläche (45) *an einer der beiden Geraden* (32) *bestimmt, ist eine Involution rechtwinkliger Ebenen; die beiden Geraden sind Fokalachsen*[176]) *der Fläche* (vgl. § 122, **10**).

Druckfehler.

S. 47, Z. 1 v. u. lies (9) statt (8).

S. 68, Fig. 68 sind die Berührungspunkte der punktierten Tangenten etwas nach rechts in die Vertikale durch den Brennpunkt zu schieben.

S. 81, Fig. 76 lies u', v' statt u, v.

S. 83, Fig. 79 lies zweimal s statt w.

S. 226, Formel (5) gehört das Vorzeichen — hinter das erste = statt hinter das zweite.

S. 447, Zeile 16 v. u. lies am Ende der Zeile $c(1+\lambda^2)$ statt $\varepsilon(1+\lambda^2)$.

Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, H. Burkhardt, G. Castelnuovo, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Fano, C. Guichard, P. Heegaard, K. Heun, G. Kohn, H. Liebmann, R. v. Lilienthal, G. Loria, H. v. Mangoldt, E. Müller, J. Neuberg, E. Papperitz, K. Rohn, G. Scheffers, A. Schoenflies, C. Segre, M. Simon, J. Sommer, P. Stäckel, O. Staude, H. Steinitz, A. Voss, E. Wälsch, H. G. Zeuthen, K. Zindler, redigiert von W. Fr. Meyer. A. u. d. T.: Encyklopädie der math. Wissenschaften. Band III. In 3 Teilen. Man verlange Prospekt.

Castelnuovo, G., und F. Enriques, Theorie der algebraischen Flächen. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Clebsch, A., Vorlesungen über Geometrie. Mit besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet und herausgegeben von F. Lindemann. In 2 Bänden. gr. 8.
- I. Band: Geometrie der Ebene. 2., vermehrte Auflage. I. Teil: Kegelschnitte und algebraische Formen. Erste Lieferung. [480 S.] 1906. Geh. n. ℳ 16.— Zweite (Schluß-) Lieferung und II. Teil. [Unter der Presse.]
- II. — Geometrie des Raumes. I. Teil: Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Komplex. Mit vielen Textfiguren. [VIII u. 650 S.] 1891. Geh. n. ℳ 12.— [Teil II in Vorbereitung.]

Dette, W., analytische Geometrie der Kegelschnitte. Mit 45 Figuren im Text. [VI u. 232 S.] gr. 8. 1909. Geb. n. ℳ 4.40.

Dingeldey, F., Lehrbuch der analytischen Geometrie. ca. 400 S. gr. 8. Geb. [Erscheint im Herbst 1910.]
—— Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme. gr. 8. Geb. [In Vorbereitung.]

Ebner, F., Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Mit 93 Figuren im Text. [VIII u. 197 S.] gr. 8. 1906. Geb. n. ℳ 4.—

Fort, O., und O. Schlömilch, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Teile. Mit Holzschnitten im Text. gr. 8. Geh. n. ℳ 9.—, geb. n. ℳ 10.60.
- I. Teil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. 7. Auflage von R. Heger. [XVII u. 268 S.] 1904. Geh. n. ℳ 4.—, geb. n. ℳ 4.80.
- II. — Analytische Geometrie des Raumes von O. Schlömilch. 6. Auflage von R. Heger. [VIII u. 338 S.] 1898. Geh. n. ℳ 5.—, geb. n. ℳ 5.80.

Ganter, H., und F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. In 2 Teilen. gr. 8.
- I. Teil. Ganter und Rudio, die analytische Geometrie der Ebene. 6. verbesserte Auflage. Mit 53 Textfiguren. [VIII u. 190 S.] 1906. Geb. n. ℳ 3.—
- II. — Rudio, die analytische Geometrie des Raumes. 4. verbesserte Auflage. Mit 20 Textfiguren. [X u. 194 S.] 1908. Geb. n. ℳ 3.—

Graßmann, H., projektive Geometrie der Ebene. Unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. In 2 Bänden. I. Band: Binäres. Mit 126 Figuren im Text. [XII u. 360 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. ℳ 12.—, geb. n. ℳ 13.—

[Gregorius a St. Vincentio.] Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleich. Bearb. Von K. Bopp. [III u. 228 S.] gr. 8. 1907. Geh. n. ℳ 10.—

Grünwald, J., Abriß einer Geometrie der orientierten Linienelemente in der Ebene. Geb. [In Vorbereitung.]

Gundelfinger, S., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Fr. Dingeldey. Mit Figuren im Text und einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1895. Geh. n. ℳ 12.—

Heffter, L., und C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 2 Bände.
- I. Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Textfiguren. [XVI u. 526 S.] gr. 8. 1905. Geb. n. ℳ 14.—
- II. — [Erscheint im Sommer 1910.]

Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von S. Gundelfinger. [VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. Geh. n. ℳ 6.—

Hochheim, A., Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene, 3 Hefte, in je 2 Teilen. gr. 8.
- Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. 3. vermehrte Auflage, bearbeitet von Fr. Hochheim. 1904.
  - A. Aufgaben. [VI u. 98 S.] Geb. n. ℳ 2.40.
  - B. Auflösungen. [128 S.] Geb. n. ℳ 2.60.